

ジャンプ過程を含む変数で記述される評価関数の最適化と 企業間取引における製造・販売リアルオプション価値の 評価への応用

池田 欽一^{†1} 時永 祥三^{†2}

システム最適化において変数が急激なジャンプ過程など従来のブラウン運動とは異なる変動要因を含むモデルの導入が必要となっている。本論文ではジャンプ過程を含む変数で記述される評価関数の最適化と企業間取引における製造・販売リアルオプション価値の評価への応用を示す。具体的には、市場における商品価格や部品価格の変化を通常のブラウン運動に加えて状態依存のジャンプ過程を含むように拡張し、評価関数の最適化問題を確率的動的計画法を用いて偏微分方程式を解く問題へと帰着させる。製品の製造・販売における取引関係において発生する製品や部品価格のジャンプ過程を含む4つのケースを想定し、これらのそれぞれについてリスク回避を積極的に行わない場合と確率的動的計画法により最適化を行った場合との価値の差をオプション・プレミアムとして評価し、その特性を議論する。

Optimization of Evaluation Functions Described by Variables Including Jump Diffusion Processes and Its Applications to Valuation of Real Option Premiums for Production/Sales Originated Risks in Transactions among Firms

YOSHIKAZU IKEDA^{†1} and SHOZO TOKINAGA^{†2}

This paper deals with the optimization of evaluation functions described by variables including jump diffusion processes and its applications to valuation of real option premiums for production/sales originated risks in transactions among firms. We extend the evaluation of investment value by introducing jump diffusion processes in the price of products and parts as well as ordinary Brownian motions. Then, the optimization of evaluation functions is reduced to the tasks to solve partial differential equations based on the stochastic dynamic programming. We classify the relation of production/sales into several patterns, and then define the option premium as the difference of values between case with optimization procedures and case without risk hedging procedures. Simulation results are used for examining the price jumps, and also for evaluating option premium of four cases.

1. はじめに

取引される商品や株式の価格が定常的なブラウン運動をする仮定を拡張し、価格のジャンプ状の急激な変動（以下ではジャンプ過程と呼ぶ）を考慮したシステム記述とモデル化を行うことが追及されている^{1)–4)}。またシステムの最適化問題においては、変動要因を定常的なブラウン運動でモデル化することが行われてきたが、さまざまな変動要因を含む最適化問題を確率的

動的計画法などを用いて解き、システムの運用を評価する方法も検討され^{5)–9)}、さらに、このような最適化問題においてジャンプ過程を変動要因として含む場合への拡張がなされている^{10)–14)}。本論文では、ジャンプ過程を含む変数で記述される評価関数の最適化と企業間取引における製造・販売リアルオプション価値の評価への応用を示す¹⁵⁾。

これまで価格にジャンプ過程を変動要因として含む問題が考察され、さらに価格にこのような変動を組み入れた資産運用や発電設備の運用最適化などが提案されている^{5)–14)}。これらの成果は価格変動にジャンプ過程を含むモデルとして証券投資などにおいて適用がなされているが、特に Thompson らの研究では、ジャ

^{†1} 信州大学
Shinshu University

^{†2} 九州大学
Kyushu University

ンプ過程を状態依存にすることで一般化している。しかしながらこれらの先行研究では、最適化問題を単独で解析するにとどめており、意思決定問題などへと拡張することはなされていない¹²⁾。本論文では基本的には、先行研究において定式化された価格のジャンプ過程変動のモデルと評価関数の最適化手法を用いるが、目的として、これまで明らかにされてこなかった企業の製品製造やこれに関連するリスク回避のコストを評価する問題に適用することがある。

これまでの研究では、企業の投資や製造に関するリスクに関しては、さまざまな事例分析がなされているが、定量的な評価がなされることは少なく、また、その適用も理論的なものに限定されている^{16)–22)}。また株式オプションの理論式を形式的に適用する方法論が示されているが、これを一般的な製造業にまで拡張することには問題がある¹⁾。最近 Tomlin により、事故や市場の急激な変化に応じて企業がとるべき政策をパターン化する研究が示され、これに直接関連して動的計画法による選択枝の分析方法が提案されている⁷⁾。また、Kamrad らにより国内と海外の複数の部品調達工場が存在する場合に、為替レート変動を仮定した場合の最適な調達政策を見出す方法が提案されている⁸⁾。しかしながら、これらの研究においては、製品や部品の価格変動はブラウン運動に従うとする従来のモデルを踏襲しており、事故や倒産などに起因するジャンプ状の変動を考慮していない。また、これらの手法を拡張して近似的に動的計画法を用いてプレミアムを評価することも可能であるが、リスク中立など解を求める基本的な条件を満足していないという問題がある^{19)–22)}。

本論文では、ジャンプ過程を含む変数で記述される評価関数の最適化と企業間取引における製造・販売リアルオプション価値の評価への応用を示す¹⁵⁾。本論文ではまず、ジャンプ過程を含む変動要因で記述される評価関数の最適化問題をモデル化するが、この場合、変動要因のパラメータが状態に依存するように一般化されていることを仮定する。次に、分かりやすい例として製品の製造販売をとりあげ、利益を最大化する最適化問題の定式化を行い、確率的動的計画法の手法を用いることにより状態変数に対する偏微分方程式を用いた解析が可能となることを示す。応用例として製品の製造・販売における取引関係を4つのパターンに分類し、これらのそれぞれについてリスク回避を積極的に行わない場合と確率的動的計画法により最適化を行った場合との価値の差をオプションプレミアムとして評価し、その特性を議論する。同時に、変動要因の変化が与えられた場合に、最適な生産を継続すること

が可能である場合のコストや利益を推定できるので、現実には発生している生産（評価方法としては、現在価値法にあたる）との差を求めることにより、リスクプレミアムを推定する。

以下、2章ではジャンプ過程を含む変数の評価関数と最適生産のモデル化を示す。3章ではリアルオプションの評価方法について述べる。また4章では本論文でとりあげる調達と回収のリスクモデルについて示し、シミュレーション結果の検討を行う。

2. ジャンプ過程を含む変数の評価関数と最適化

2.1 企業間取引におけるリスクと課題

以下では数理モデルの説明をする前に、本論文で提案するリアルオプション価値の評価手法の意義について簡単に述べておく。企業間の取引や類似の事例におけるリスクの発生としては、爆発火災事故などがある。製鉄所での爆発事故発生により、ここより自動車鋼板などを調達していた自動車製造企業での在庫確保が難しくなり、生産の縮小を余儀なくされた。自動車産業の高度な要求に応える必要性があり、製品代替がきわめて困難とされている。同様に、タイヤ工場の火災事故においてタイヤ在庫不足が見込まれ、大型トラック製造縮小などがなされた。このようなケースで事故を想定した在庫政策などが考えられるが、回避できないリスクを株式オプションのような形で引き受けるシステムも1つの手段として存在する。

一方、製品の販売についてのリスクも存在するため、顧客企業に対する販売代金の回収にあたり、この業務を代行する金融機関サービスがある。金融機関の商品として貸倒れリスク保証商品があり、企業が販売する商品やサービスなどの対価・費用を回収できない場合に、これを保証する業務を行う。支払い不能が発生した場合に、これにより発生するリスクを負担するかわりに、平常時におけるプレミアムを支払う方式となっている。

これらの事例で示すように、極限まで効率化された企業の製造販売のシステムにおいては、微小な事故の発生においても、重大な結果を招くことになる。そのため、リスク分散などの手段が考慮されているが、発生の頻度とリスク回避のコストを見積もることがポイントとなっている。本論文で示すリアルオプション価値の評価手法により販売・調達リスクにおける、このように明確でなかったリスク回避の金額（プレミアム）を求める方法を与えることができる。

3. リアルオプションの定義について

以下では、本論文で用いるリアルオプションの定義について、これまでの先行研究と比較しながら述べていく。生産活動や事業進行におけるリアルオプションを表現する場合に、延期・撤退による収益の確保という概念が用いられる。よく知られている研究として Dixit らの論文がある^{16),17)}。たとえば、生産設備に対する投資を進める場合に、商品価格の下落が予測される場合には、投資を延期 (defer) するか、あるいは場合によっては撤退 (exit) することにより、余分な損失を回避して投資を最適化する。しかし投資に関しては後戻りはできないため、現実にはこのような投資の最適化は行えないので延期・撤退を考慮した場合の投資の価値と、このようなリスク回避を実施しない投資のケースとの差を、最適政策との差であると定義し、リスク回避の価値、すなわちオプションとして定義している。

リアルオプションの価値がいくらになるかを評価する方法として、Dixit らによる微分方程式に帰着させて解析的な解を求める方法もあるが、つねに帰着でき解が求まるとは限らない。そのため、動的計画法による方法が多用される。分かりやすい例として、電力事業への参入をとりあげる。電力販売価格は 2 項過程に従って変動していると仮定し、期間 $t = 0$ から $t = T$ までの間に、一定の運用コスト C を負担して一定の数量 W を販売し、事業の収益をあげる。現在の価格を P_0 とし、単位期間あたりに価格が上昇 (下降) 時には u (d) 倍となると仮定する。ここで、 $ud = 1$ とする。現在から t 期先における価格を P_t としてモデル化すると、 $P_t = P_0 \exp[(2k - t)\sigma]$ として与えられる。ここで、 σ は価格の変動の分散 (ボラティリティ) であり、 k はこの期間に価格が上昇する回数である。なお、価格が上昇 (下降) する確率 p ($1 - p$) は、市場における無リスク資産の利子率 r との関係で与えられる (いわゆるリスク中立の仮定)。

このような価格変動の仮定のもとでは、終期 $t = T$ における事業の価値は、 $V_T = P_T W - C$ により与えられる。価格と運用コストとの関係で、終期の事業価値がマイナスになるケースもある。価格変動にかかわらず運用を継続する場合、すなわちオプションを考慮しない場合には、終期 T から 1 つ前の期 $t = T - 1$ における事業の価値は、 $V_{T-1} = pV_T^u + (1 - p)V_T^d$ となる。ただし、 V_T^u (V_T^d) は、価格変動の 2 項過程を時間進行に合わせて描いた 2 分岐における、時刻 $T - 1$ の格子点から上方 (下方) に延びた先の格子点における価値である。これを運用開始の時期 $t = 0$ まで遡

及して推定を進めることにより、この事業の現在価値 V_0^N が求められる。一方、電力価格に現状に応じて運用をしないオプションを行使できる場合には、終期の事業価値は、事業価値がマイナスにある場合には運用しないので $V_T = \max[P_T W - C, 0]$ となる。このような最大値をとる操作を遡及的に開始時期まで適用することにより、オプションを考慮した場合の事業価値 V_0^O が得られる。この両者の差異 $V_T^O - V_T^R$ が、オプションの価値として定義される。この基本モデルを拡張して複数の投資対象が存在する場合や、撤退のほかに運用や投資を増強するオプションを考慮する研究もある。しかし基本的には、動的計画法に基づいて 1 期後の事業価値 V_{t+1} に現在の期における最適な運用 G_t を加えて現在の事業価値 $V_t = G_t + \rho V_{t+1}$ を求める方法論は同じである (ρ は p, u, d から計算される割引率)。

なおここで注意する点が 2 つあり、第 1 番目は最適政策は理論的には定式化できるが、将来の価格は未知であり実際には実現できないことである。第 2 番目はオプション、すなわち、とることができる政策により、オプション価値の評価が変わることである。上の例では撤退が選択できると仮定したが、生産の縮小しか可能でない場合には評価値が異なる。

あとで示すように、本論文では、それぞれの時期における最適な製品製造の政策を評価関数の最大化の手法を用いて与えており、上に述べた電力事業における価格変動に応じた時期 t における事業価値の最大化をはかることに相当している。評価関数の最大化の結果として得られる偏微分方程式は、微小時間における最適な政策が満足すべき関係式を与えている。一方、この偏微分方程式も、終期 T における条件を与えて開始時期 $t = 0$ に向けて遡及的に有限差分の方法により解かれていく^{14),15),23)}。したがって方法論は異なるが、上に述べた例において動的計画法を用いて、開始時期におけるオプションを考慮した場合の事業価値を求める方法と同じである。したがって、本論文において現実にリアルオプションを評価するために、オプションを考慮しない製品製造のケースを、電力事業におけるオプションを考慮しない場合に対比させて定義すればよい。電力事業の例では、2 項過程で記述される価格変動のすべての格子点の価格において、電力の製造と販売を行っている。したがって、本論文のモデルにおいても、オプションを考慮しない製品製造は、価格変動をまったく考慮しない生産に相当する。

3.1 ジャンプ過程と評価関数

不確実な変動要因で記述される評価関数とその最適

化のモデルには、さまざまなものが考えられるが、本論文では分かりやすい事例として、部品を調達して製品を製造販売するケースをモデルとして仮定する。なお、以下で述べるモデルは資源投入と製造販売の基本的なモデルであり、この分野以外に拡張することは難しくはない。

いま、製品製造を行う企業（メーカ）が存在し、メーカは部品（簡単のため 1 種類とする）を調達して製品として製造し販売するケースを考える。製造販売は期間 $t = 0 \sim T$ にわたって行われると仮定する。市場の商品価格と部品の価格が急変するモデルを仮定する。

メーカは需要にみあった生産をするが、価格が変動すると仮定しているため、これらを変動要因とする評価関数の最適化手法により最適な生産計画を求める。以下のように、記号を定義しておく。すべて時刻 t における値である。

- 製品製造の部品の単価： $f(t)$.
- 市場での製品需要数量： $D(t)$.
- 市場での製品の販売価格： $P(t)$.
- メーカの製品の製造数量： $c(t)$.
- メーカの在庫数量： $R(t)$.

企業の時刻 t における投資の価値を $V(t)$ としておくと、この値を最大化する問題は、複数の変動過程を含む評価関数の最大化問題として記述することができる^{5)-9),12),14)}。多くの問題で、変動過程をブラウン運動でモデル化した場合には、その微小変化、および時間の微小変化を用いて、偏微分方程式を導出することができる。原理的にはこの偏微分方程式を解くことにより最適な政策を求めることができる。しかし、本論文ではジャンプ過程を含む要因を変動過程として含むので、このような問題に適したように拡張を行う。

需要 $D(t)$ は、次のモデルに従うと仮定する。

$$dD(t) = d_1(d_0 - D(t))dt + \sigma_D dW(t). \quad (1)$$

ただし、 d_0, d_1, σ_D は定数で、 $dW(t)$ は、ブラウン運動の微分値である。製品の製造数量 $c(t)$ は決定変数であるので、これを用いた在庫数量の変分とは次のような関係になる。

$$dR(t) = [c(t) - D(t)]dt. \quad (2)$$

また、 $P(t)$ は定常的にはブラウン運動に従って変動すると仮定するが、消費動向などにより急激に価格が高騰（あるいは低落）するモデルを用いる^{12),14)}。

$$dP(t) = \alpha_P(P, t)dt + \sigma_P(P, t)dz_P + \sum_{k=1}^{N_P} \gamma_k(P, t, J_k)dq_k. \quad (3)$$

ここで、 $\alpha_P(\cdot), \sigma_P(\cdot)$ は任意の $P(t), t$ に関する関

数である。 dz_P はブラウン運動の微分値であり、 dq_k は 0 あるいは 1 をとる変動に従うポアソン過程である。また、 $\gamma_k(P(t), t, J_k)$ は、 $P(t), t$ およびある定められた確率分布から生成される確率変数 J_k の関数である。最後の項が、ジャンプ状の価格変動に対応している。

$$dq_k = \begin{cases} 0, & 1 - \epsilon_k(P, t)dt \text{ の確率で,} \\ 1, & \epsilon_k(P, t)dt \text{ の確率で.} \end{cases} \quad (4)$$

N_P は発生するジャンプの種類数の総数である。なお、ジャンプ過程の生成に関する第 3 項については、通常はランダムな発生を仮定しているが、もとの価格レベルまでの回復時間が長くなるなどの現実的な状況を考慮して、ある一定の時間にわたって大きな値をとり続けるケースも許すような設定しておく。

同様に、部品価格 $f(t)$ も、急激に変化する事態（高騰あるいは低落）が発生するモデルを導入する。

$$df = \alpha_f(f, t)dt + \sigma_f(f, t)dz_f + \sum_{k=1}^{N_f} \delta_k(f, t, K_k)dr_k. \quad (5)$$

$$dr_k = \begin{cases} 0, & 1 - \eta_k(f, t)dt \text{ の確率で,} \\ 1, & \eta_k(f, t)dt \text{ の確率で.} \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 dz_f はブラウン運動の微分値であり、 dr_k は、 dq_k と同様にある一定の確率分布に従う、1 または 0 をとるポアソン過程であり、これにかかっている係数 $\delta_k(f, t, K_k)$ は、 $f(t), t$ およびある定められた確率分布から生成される確率変数 K_k の関数であり、事故などの事象が発生したときに高騰（低落）する大きさに対応する。 N_f はジャンプの種類数の総数である。

3.2 確率微分と 2 次の偏微分方程式

上に述べたような前提のもとで、現在の時刻 t から最終の時刻 T までの製品の製造販売による価値を最大化する問題の解を求める手順を示す。与えられた評価関数の最大化問題は、次のものである。

$$V(P, f, c, t, R) = \max_c E \left[\int_t^T e^{-\rho(t-\tau)} F(P, f, c, t, R) d\tau \right]. \quad (7)$$

$$F(P, f, c, t, R) = P(t)D(t) - A(c(t), f(t)) - H(R) - B(D(t) - c(t) - R(t)). \quad (8)$$

ここで、 $A(\cdot), H(\cdot), B(\cdot)$ は製品を生産するコストを表す関数、在庫コスト関数、在庫切れ（back order）コスト関数である。通常、関数 $B(\cdot)$ は生産が十分でない場合に、他社から製品を直接調達する場合のコストを意味するが、ここでは製品価格が下落して、製造するより直接製品を調達するほうが有利な場合に、製品製造数量を調整するための関数として用いる。なお

関数 $B(x)$ は通常定義では、変数 x が非負の場合には変数と同じ値 x をとり、変数が負の場合にはゼロとなる関数である。しかし、本論文で取り扱うような確率微分を用いる定式化においては、関数は 2 次微分可能であることが必要である、これを考慮して本論文では次のような近似的な関数を用いている。

$$B(x) = 0.5x(1 + \tanh(10x)) \quad (9)$$

ρ は、このような投資問題で設定する定数で、時間経過とともに価値が減少する割合（割引率）を示す。

この式を 2 つの時間区間に分けて表現すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} & V(P, f, c, t, R) \\ &= \max_c E \left[\int_t^{t+dt} e^{-\rho(\tau-t)} F(P, f, c, t, R) d\tau \right. \\ & \left. + \int_{t+dt}^T e^{-\rho(\tau-t)} F(P, f, c, t, R) d\tau \right]. \quad (10) \end{aligned}$$

さらに変形すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} & V(P, f, c, t, R) = \\ & \max_c E \left[\int_t^{t+dt} e^{-\rho(\tau-t)} F(P, f, c, t, R) d\tau \right. \\ & \left. + e^{-\rho dt} \int_{t+dt}^T e^{-\rho(\tau-(t+dt))} F(P, f, c, t, R) d\tau \right]. \quad (11) \end{aligned}$$

この第 2 項は、評価関数の定義式において時間をずらした表現であるので、この式を、時間 t の微小変化 dt の間における変分を用いて書き直すと、次のようになる。

$$\begin{aligned} & V = \max_c E \left[\int_t^{t+dt} e^{-\rho(\tau-t)} F(P, f, c, t, R) d\tau \right. \\ & \left. + e^{-\rho dt} V(P+dP, f+df, t+dt, R+dR; c(t+dt)) \right]. \quad (12) \end{aligned}$$

なお、ここで制御変数 c と評価値 $V(\cdot)$ との関係について説明する。式 (12) に示されるように、式の左辺には最適化の結果としての $V(\cdot)$ があり、右辺にはこの最適化の対象である $V(\cdot)$ が存在する。しかし決定変数 c が含まれる項は $F(\cdot)$ 、および式に示される $dR(t)$ だけであり、評価値 $V(\cdot)$ はこれらの項に対する最大化の操作が終了した段階で確定する。したがって、評価値 $V(\cdot)$ には決定変数 c は、陽には含まれない。この式 (12) に対して、多次元変数に対する Ito のレンマを用いて確率変数の 2 次微分までを求めたあと、代入を繰り返し、式 (2) ~ (6) を用いて変形すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} 0 = \max_c & \left[F(P, f, c, t, R) + L(V) + (c-D)V_R \right] dt \\ & + \sum_{k=1}^{N_P} E[V_k^{(+,P)} - V] dq_k \\ & + \sum_{k=1}^{N_f} E[V_k^{(+,f)} - V] dr_k \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(V) = & V_t + \frac{1}{2} \sigma_P^2 V_{PP} + \frac{1}{2} \sigma_f^2 V_{ff} \\ & + \alpha_P V_P + \alpha_f V_f - \rho V. \quad (14) \end{aligned}$$

$$V_k^{(+,P)} = V(P + \gamma_k(P, t, J_k), f, t, R). \quad (15)$$

$$V_k^{(+,f)} = V(P, f + \eta_k(f, t, K_k), t, R). \quad (16)$$

ただし、 $V_k^{(+,P)}$ ($V_k^{(+,f)}$) は、価格 P (f) において大きさが $\gamma_k(\cdot)$ ($\delta_k(\cdot)$) のジャンプが発生した場合の $V(\cdot)$ の値である。また、偏微分の記号は $V_P = \partial V / \partial P$ 、 $V_{PP} = \partial^2 V / \partial P^2$ などを意味する。なお、すでに述べたように $V(\cdot)$ は、変数 c の陽な関数ではない。

dt より早く減衰する項目を除去し、期待値をとり微小量 dt により割ることで、次の偏微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \max_c \left[L(V) + F(P, f, c, t, R) + (c-D)V_R \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{N_P} \epsilon_k E[V_k^{(+,P)} - V] \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{N_f} \eta_k E[V_k^{(+,f)} - V] \right] = 0. \quad (17) \end{aligned}$$

上に示した偏微分方程式において、決定変数である $c(\cdot)$ は、次に示す最大化問題の解として与えられる。

$$\max_c [F(P, f, c, t, R) + (c-D)V_R]. \quad (18)$$

このように決定された c を代入して、利益 $V(\cdot)$ に関する偏微分方程式を得ると、次のようになる。

$$\begin{aligned} 0 = & L(V) + F(P, f, c, t, R) + (c-D)V_R \\ & + \sum_{k=1}^{N_P} \epsilon_k E[V_k^{(+,P)} - V] \\ & + \sum_{k=1}^{N_f} \eta_k E[V_k^{(+,f)} - V]. \quad (19) \end{aligned}$$

以上のような確率微分方程式を、境界条件を定めることにより解けば、価格が決定される。この偏微分方程式の解の終端条件は次のようになる。

$$V(P, f, T; c) = 0. \quad (20)$$

これまでの導出手順を用いると、変動要因に関する偏微分方程式が得られるので、これを解くことにより評価関数の最適化を行う決定変数 $c(\cdot)$ の値、およびこのときの評価関数の値を求めることができる。しかしながら、一般には、変動要因の数が増加したり係数の形状が複雑になったりすると、解析的に解を求めることはきわめて困難になる。このようなことを考慮して、以下では、偏微分方程式を数値的に解く方法として、よく用いられる有限差分による計算法を使用する^{14),15),23)}。

なお、上に示したような確率的動的計画法から偏微分方程式を導出し、これを解いて解を求める方法に対して、ある場合には、等価な動的計画法による近似解法を適用することができる^{19)–22)}。しかし、本論文で取り扱っているような変数がジャンプ過程を含んでいるケースでは、等価な表現を得ることは難しい。したがって、以下では直接偏微分方程式を解く方法を用いている。

4. リアルオプションの評価方法

4.1 製造と販売における価格変動とリスク

市場での製品価格と部品価格について、本論文では以下の4つのパターンを仮定する。なお説明の都合上、ジャンプ変動により価格の急激な上昇（下降）が発生する場合を、価格に上昇（下降）ジャンプが含まれていると呼ぶことにする。

(1) 部品価格に上昇ジャンプ

製品製造に必要な部品の価格に上昇するジャンプが含まれる場合に相当し、原因として部品の品薄や、火災などの事故による部品調達の困難さの発生などが考えられる。

(2) 製品価格に下降ジャンプ

製造した製品の市場での価格に下降ジャンプが含まれる場合に相当しており、製品の供給過剰や欠陥にともなう販売不振などが考えられる。

(3) 基本製造モデル

製品製造のための部品価格と製品販売の市場価格の両方に、それぞれ、上昇ジャンプと下降ジャンプの両方が含まれるケースであり、本論文で基本モデルとして記述してきたモデルに相当する。将来の価格変動にあらゆる事態が想定される、一般的な場合に相当する。

(4) 需要欠損モデル

企業が製造した製品を小売業者などへ販売した金額が、回収できないケースに相当する。このモデル化にはさまざまな方法が考えられるが、以下では需要に

下降ジャンプが発生したと仮定し、製造した製品販売が計画どおりには進まないというモデルを導入する。ただし、この需要の下降ジャンプが価格における下降ジャンプと同じ式（式(3)–(6)）で記述することができる。

4.2 オプションプレミアムの評価

すでに述べたように、本論文で導いた製品、製造の最適化問題は、ある価格レベルにおいて満足すべき関係を偏微分方程式により記述する問題に帰着されている。したがって、このような最適な製造政策を適用できる条件が、オプションプレミアム計算の基本となる。具体的には、最適な政策をとらない、あるいはとることができないケースと、本論文の手法により最適な生産を行った場合との利益価値の差額が、プレミアムとなる。このような定式化は、製品製造に関連した生産計画や投資問題において、一般的に行われるリアルオプション評価手法である。

偏微分方程式は有限差分の方法により、時刻 T から逆に解かれていき、最終的に時刻 $t = 0$ における $V(\cdot)$ の値により、この場合の生産の価値（利益）が推定される（動的計画法による解法でも同じ手法を用いている）。この間、それぞれの時刻 t においては最適な製造数量が決定変数として求められていく。

このようなことを考慮すると、最適ではない生産とは、製品や部品の価格変動に依存しないで、一定の生産方法を選択するケースに相当する。分かりやすくするために、以下では前節で述べた4つのケースのそれぞれについて、リアルオプションのプレミアムを推定するための、最適化を行わない生産を説明する。

(1) 部品価格に上昇ジャンプ

一定量の製品在庫を仮定し、これに生産数量を加えて需要に一致するように生産を行う。back orderの費用は考慮しない。すなわち、部品の価格が高騰しても代替的な手段は講じない。このような生産の場合の時刻 $t = 0$ における価値と、最適生産を行った場合との差がプレミアムになる。

(2) 製品価格に下降ジャンプ

同様に一定量の製品在庫を仮定し、これに生産数量を加えて需要に一致するように生産を行い、back orderの費用は考慮しない。製品の価格が急落しても生産を継続し代替的な手段は講じない。このような生産の場合の時刻 $t = 0$ における価値と、最適生産を行った場合との差がプレミアムになる。

(3) 基本製造モデル

同様に一定量の製品在庫を仮定し、これに生産数量を加えて需要に一致するように生産を行い、back or-

der の費用は考慮しない．製品と部品の価格がどのように変動しても需要に一致する数量を生産し販売する．このような生産の場合の時刻 $t = 0$ における価値と、最適生産を行った場合との差がプレミアムになる．

(4) 需要欠損モデル

この場合は、上に述べた 3 つのケースとやや異なる定義が必要である．需要に急激な下降ジャンプがない、当初の予定需要の時系列を $D(t)$ としておく．需要欠損モデルは、製品を販売した企業からの販売費用が回収できないケースに相当し、この場合の需要の時系列を $D_s(t)$ とする．これをケース A とする．これに対応する製造販売のケースとしては、需要変動がない、すなわち生産した製品は変動のある前の需要 $D(t)$ 通りに販売できる場合に相当する．これをケース B とする．ケース A およびケース B とともに、与えられた需要 $D_s(t)$ あるいは $D(t)$ のもとの最適な生産を実施すると仮定し、これらの 2 つのケースについて、時刻 $t = 0$ における価値の差がプレミアムになる．

なお、本論文では価格にジャンプ過程が含まれる場合のプレミアムを推定しているが、このようなジャンプ過程が存在しない場合、すなわち価格が時変パラメータを含むブラウン運動に従うと仮定する場合のプレミアムも、推定することができる．このような、価格が時変パラメータを含むブラウン運動に従うケースにおけるプレミアムを B プレミアムと呼び、本論文で仮定する価格にジャンプ過程が含まれる場合のプレミアムを J プレミアムと呼んでおく．

5. 応用例

5.1 ジャンプ過程の生成

以下では、これまで述べたジャンプ過程を変動要因として含む変数で記述される評価関数の最適化問題の解析と、これを基礎としたリアルオプション手法による製造販売リスクのプレミアム価値の評価への応用を、シミュレーションを基礎として考察する．

最初に、需要の時系列と生産コストについての仮定を示す．需要の時系列に含まれるパラメータは、 $d_0 = 1,000$, $d_1 = 0.1$, $\sigma_D = 10$ とする．生産のコスト関数 $A(\cdot)$ は、 $A(c, f) = (c + 0.01c^2 + 0.001c^4)f$ とする．back order の関数 $B(\cdot)$ は $B(q, P) = 0.5x(1 + \tanh(10x))$, $x = (q + 0.01q^2)P$, $q = D(t) - c(t) - R(t)$ とする．

ジャンプ過程変動は製品価格および部品価格の双方に含まれていると仮定するが、ジャンプ過程の方向は、正と負のどちらもありうると仮定しておく．本論文で用いる変動要因に含まれるジャンプ過程については、

瞬間的な上昇か下降かに限定したものではなく、商品価格のように上昇（下降）した場合にもとのレベルにもどるまでに時間を要する場合も仮定する．

本論文では、これらの 2 つのケースについて記述するパラメータが最適化問題に与える影響についても議論するが、以下のシミュレーションにおいては、Thompson らの研究でも用いられている変動を参考にしたモデルを基本となるケースとして考察する．

なお本論文で行っているパラメータの設定は、特に具体的な対象に基づいて行ったものではないが、これまでのジャンプ変動過程のモデルを用いた先行研究を参考にしている．すなわち電力オークション市場における価格変動などを参考にすると、ジャンプ発生時には最大で定常時の 10 倍程度まで価格が上昇する現実のデータが存在する．したがってジャンプ過程の発生時には、このような範囲の価格変動を再現できるようなパラメータの設定にしている．同様に、ジャンプが発生したあと、急速にもとの価格レベルにもどることが現実の市場で確認されており、これを再現できるようなパラメータの設定にしている．

変動のモデルを以下に示す．それぞれのジャンプ過程は価格の急激な増加（減少）と、この時点からの急激な減少（増加）の 2 つのポアソン過程から成り立っている．したがって式 (3) ~ (6) において、 $N_P = N_f = 4$ とする．なお、説明は価格 P について行っているが同様のモデルを価格 f にも適用する．

(1) 上昇ジャンプ過程の場合

$$dP = 0.4[15 \sin(2\pi t - 15.4\pi/24) + P_Z - P]dt + \sigma_P P dz + (J_1 - P)dq_1 + (J_2 - P)dq_2, \quad (21)$$

$$J_1 \sim N(a_{P11}, s_{P11}), J_2 \sim N(a_{P12}, s_{P12}). \quad (22)$$

dq_1, dq_2 は、それぞれ、確率 $\lambda_{up}(P)dt$, $\lambda_{down}(P)dt$ で 1 になる．

$$\lambda_{up}(P) = \begin{cases} \theta_{P11}P/PT_{11}, & P \leq PT_{11}, \\ \theta_{P11}, & P > PT_{11}. \end{cases} \quad (23)$$

$$\lambda_{down}(P) = \begin{cases} \theta_{P12}, & P \geq PT_{12}, \\ 0, & P < PT_{12}. \end{cases} \quad (24)$$

(2) 下降ジャンプ過程の場合

$$dP = 0.4[15 \sin(2\pi t - 15.4\pi/24) + P_Z - P]dt + \sigma_P P dz + (J_1 - P)dq_1 + (J_2 - P)dq_2. \quad (25)$$

$$J_1 \sim N(a_{P21}, s_{P21}), J_2 \sim N(a_{P22}, s_{P22}). \quad (26)$$

dq_1, dq_2 は、それぞれ、確率 $\lambda_{down}(P)dt$, $\lambda_{up}(P)dt$ で 1 になる．

$$\lambda_{down}(P) = \begin{cases} \theta_{P21}(PT_{21} + 10 - P), & P \leq PT_{21}, \\ 3\theta_{P21}, & P > PT_{21}. \end{cases} \quad (27)$$

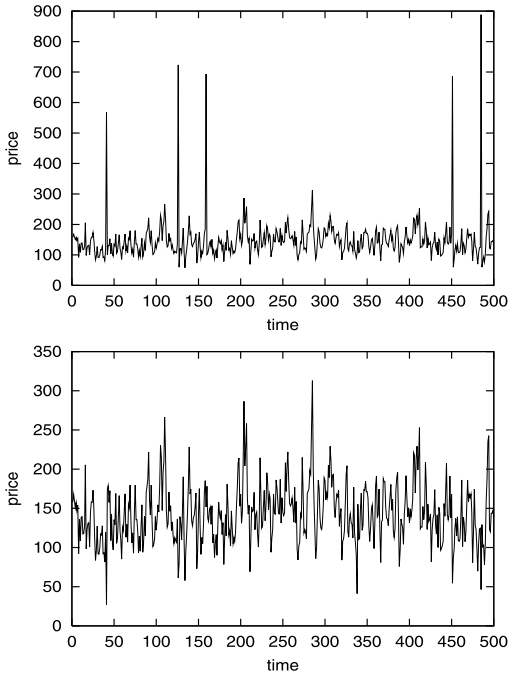


図 1 上昇(下降)ジャンプ過程を含む価格変動(上:上昇ジャンプ,下:下降ジャンプ)

Fig.1 Price changes including upward (downward) jump (upper: upward jump, lower: downward jump).

$$\lambda_{up}(P) = \begin{cases} \theta_{P22}, & P \leq PT_{22}, \\ 0, & P > PT_{22}. \end{cases} \quad (28)$$

なお,これらのパラメータを変更する影響の概要については,以下のようにまとめられる.乱数の平均と標準偏差(a_{P1k} , s_{P1k})は,ジャンプの大きさを規定する.上昇(下降)ジャンプの場合の確率 θ_{P11} (θ_{P21})は,上昇(下降)ジャンプの発生頻度を与え,これらが大きいと上昇(下降)ジャンプが頻発する.同時に上昇(下降)ジャンプの場合の確率 θ_{P12} (θ_{P22})が大きい場合には,価格が上昇(下降)してもとのレベルにもどる時間が短いことを意味しており,確率が小さい場合には,上昇(下降)したまま継続する時間が長くなる.

図 1 には,これらのジャンプ過程を含む価格変動について, $\sigma_P = 0.2P$, $P_Z = 150$, $a_{P11} = 700$, $s_{P11} = 100$, $a_{P12} = 200$, $s_{P12} = 10$, $a_{P21} = 30$, $s_{P21} = 10$, $a_{P22} = 100$, $s_{P22} = 10$, $PT_{11} = 450$, $PT_{12} = 300$, $PT_{21} = 100$, $PT_{22} = 50$, $\theta_{P11} = 0.01$, $\theta_{P12} = 0.85$, $\theta_{P21} = 0.004$, $\theta_{P22} = 0.85$ として設定した場合の例を示している.なお,これらのパラメータと同様なものを価格 f に対しても割り当てるため, P_Z , σ_P , a_{P1k} , s_{P1k} , PT_{1k} , θ_{P1k} に対応する記号を,それぞれ P_f , σ_f , a_{f1k} , s_{f1k} , fT_{1k} , θ_{f1k} と

しておく.

なお,これらのパラメータの設定値は以下の価格 f に対する設定と同様に標準値として用いることとし,パラメータ値を変化させる対象でない場合には,これらの値に固定しておく. $\sigma_f = 0.2f$, $P_f = 100$, $a_{f11} = 600$, $s_{f11} = 100$, $a_{f12} = 100$, $s_{f12} = 10$, $a_{f21} = 30$, $s_{f21} = 10$, $a_{f22} = 100$, $s_{f22} = 10$, $fT_{11} = 300$, $fT_{12} = 200$, $fT_{21} = 70$, $fT_{22} = 50$, $\theta_{f11} = 0.01$, $\theta_{f12} = 0.85$, $\theta_{f21} = 0.004$, $\theta_{f22} = 0.85$.

式 (19) に示す偏微分方程式を解くためには,ジャンプが発生した場合の評価関数の値,すなわち $V_k^{(+,P)} = V(P + \gamma_k(P, t, J_k), f, c, t, R)$, $V_k^{(+,f)} = V(P, f + \delta_k(f, t, K_k), c, t, R)$ を計算する必要がある.これには,次のような期待値を求める計算を適用する.式 (19) にジャンプ過程変動を記述する部分を代入して整理すると,次のようになる.

$$H_{ik} = \int_{-\infty}^{\infty} V(J_{ik}) r_k(J_k) dJ_k. \quad (29)$$

$$I_{ik} = \int_{-\infty}^{\infty} V(K_k) s_k(K_k) dK_k. \quad (30)$$

ここで, $k = up, down$ で, $V_k^{(+,P)}(\cdot)$, $V_k^{(+,f)}(\cdot)$ の期待値の計算において, $V_k(P + \delta_k) = V(P + J_k - P) = V(J_k)$, $V_k(f + \delta_k) = F(f + K_k - f) = V(K_k)$ となることを用いている.

ただし,関数 $r_k(J_k)$, $s_k(K_k)$, $k = up, down$ は,それぞれ,価格 $P(f)$ に対する $N(700, 100)$, $N(200, 10)$ に対応する変数 $J_k(K_k)$ についての正規確率密度関数である.この積分は,台形則により簡易計算される.

この偏微分方程式を,有限差分の方法により数値計算し,あらためて変数 R に関する 1 次の偏微分の値を求めておく^{(14),(15)}.なお,偏微分方程式は有限差分のもとでは連立方程式になるが,この方程式は取り扱っている偏微分方程式の性質からスパースな係数行列となるので,ガウス消去法で解いても安定的に解が求まる^{(14),(15),(21)}.

5.2 評価関数と決定変数の特性事例

以下の応用例を通じて,シミュレーションを実施するための変数 P , f , R の刻み幅である ΔP , Δf , ΔR は,変数の範囲を適切に選び,変数をそれぞれ 40, 40, 10 分割した離散的な値を仮定する.また, $\Delta t = 1$ とする.

なお,商品価格と部品価格の平均的な数値に対応する P_Z , f_Z については, $P_Z > 1.3f_Z$ の関係が保たれる範囲で変更してもシステム全体の挙動には大きな変

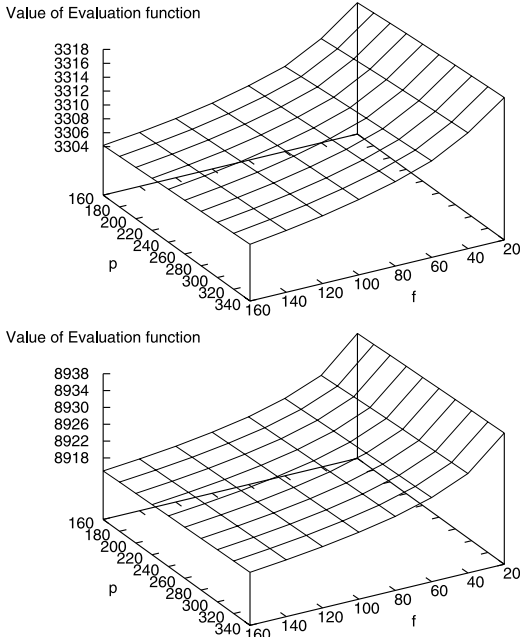


図 2 商品価格がジャンプ過程を含む場合の評価関数 (上：価格に上昇ジャンプが含まれる，下：価格に下降ジャンプ)

Fig.2 Evaluation function when price include jump diffusions (upper: upward jump, lower: downward jump).

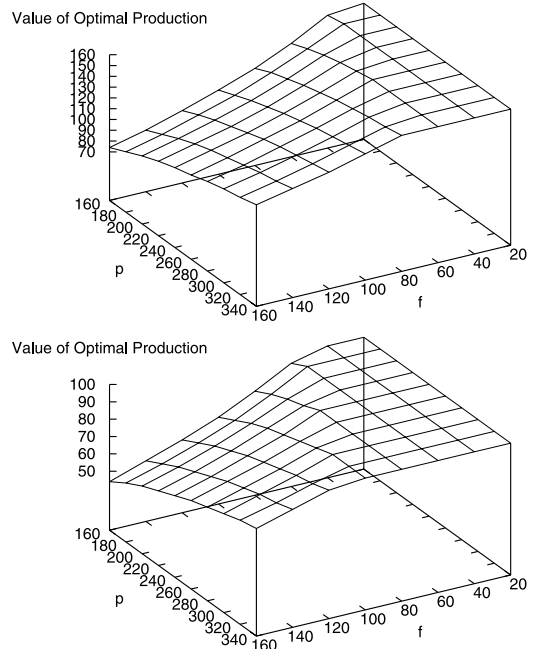


図 3 商品価格がジャンプ過程を含む場合の最適な製造数量 (上：価格に上昇ジャンプ，下：価格に下降ジャンプ)

Fig.3 Optimal production when price include jump diffusions (upper: upward jump, lower: downward jump).

化はないことから、 $P_Z = 150, f_Z = 100$ として固定しておく。またジャンプ発生条件については、頻度やその大きさは発生のためのしきい値である PT_{lk}, fT_{lk} により調整することもできるが、同様に条件を簡単に正規乱数のパラメータを変化させることによって与えることができる。したがって以下では、ジャンプ過程変動発生を規定するパラメータ PT_{lk}, fT_{lk} についても、 $PT_{11} = 450, PT_{12} = 300, PT_{21} = 100, PT_{22} = 50, fT_{11} = 300, fT_{12} = 200, fT_{12} = 70, fT_{22} = 50$ などのように固定しておく。

まずシミュレーションを通じて得られる最適化された評価関数 $V(P, f, t)$ と、これに関連した決定変数である $c(P, f, t)$ の特性の事例を示しておく。図 2 には部品価格に上昇ジャンプが含まれる場合と、商品価格に下降ジャンプが含まれている場合の評価関数 $V(P, f, t)$ の最適解を示している。また図 3 には、このときの決定変数である $c(P, f, t)$ の特性を示している。これらの図において両方の軸には、価格 $P(t), f(t)$ をとっている。なお、これ以外のケースについての評価関数 $V(\cdot)$ と変数が示す特性について図示することは省略するが、変数の軸方向に関数値が変化することが確認できる。

図 2 から分かるように、部品価格に上昇ジャンプ

変動が含まれている場合には価格 $P(f)$ が大きく(小さく)なるに従って単調に評価関数の値 $V(\cdot)$ は増加している。価格 P を固定し価格 f を変化させた場合の $V(\cdot)$ の変化が、 f を固定し P を変化させた場合の $V(\cdot)$ の変化よりも大きくなっている。評価関数が形成する関数値の表面形状は滑らかであり急激な変化は見られない。製品価格に下降ジャンプが含まれている場合も、同様の形状を示すことが分かる。

次に、最適な製造数量である $c(P, f, t)$ を示した図 3 から分かるように、生産に有利な状況では製造数量は大きな値をとっているが、部品価格が高騰するに従って、その数量は減少することが分かる。また、製品価格に下降ジャンプが含まれている場合にも、同様の傾向が顕著であることが分かる。

5.3 オプションプレミアムの価値の評価結果

以下では、前に区分した 4 つのケースについてオプションプレミアムの価値の評価結果を示すとともに、その特徴について分析する。なおプレミアムの性質を分析するには、できるだけ変動させるパラメータが少ないほうが便利であるので、シミュレーション実施においてはこれを考慮している。前にも述べたように価格に対して、特に変更しないパラメータ $a_{P11}, s_{P11}, a_{P12}, s_{P12}$ などに対しては標準値を設定しておく。

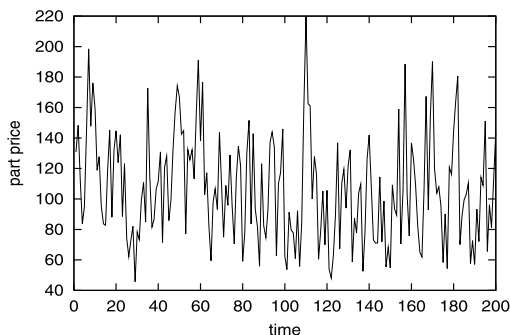


図 4 部品価格 f の変化の例

Fig. 4 An example of part price change f .

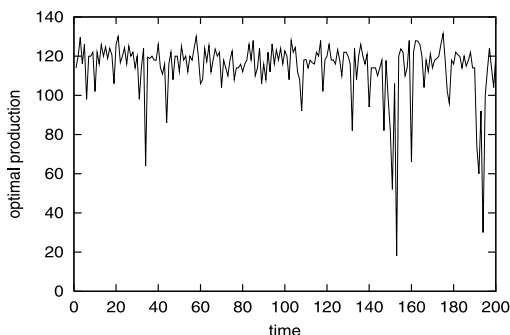


図 5 対応する最適な製造数量 c

Fig. 5 Corresponding optimal production c .

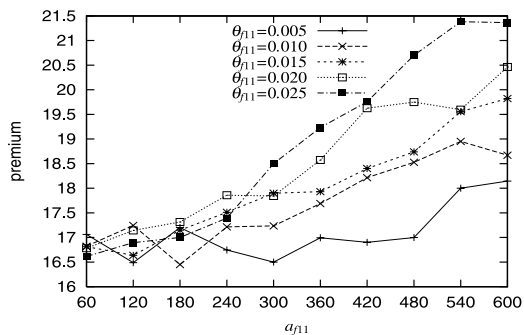


図 6 パラメータ a_{f11}, θ_{f11} によるプレミアムの変化

Fig. 6 Change of premium along parameters a_{f11}, θ_{f11} .

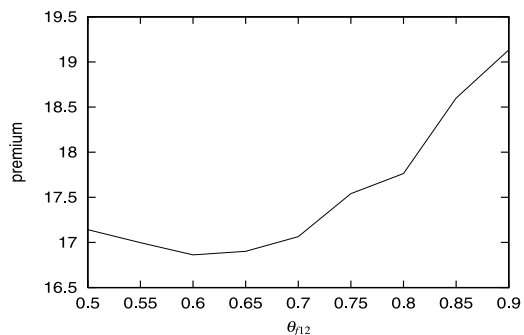


図 7 パラメータ θ_{f12} によるプレミアムの変化

Fig. 7 Change of premium along parameter θ_{f12} .

すでに述べたように、本論文ではモデルを記述するパラメータを外部条件として、ランダムに変化させた場合の最適解との組合せをデータとして収集している。このため以下のシミュレーションを通じて、パラメータを変化させる範囲条件を次のように設定している。

$a_{P11} = 70 \sim 700, s_{P12} = 10 \sim 100, a_{P21} = 30 \sim 300, s_{P21} = 1 \sim 10, a_{f11} = 20 \sim 200, s_{f11} = 10 \sim 100, a_{f21} = 3 \sim 30, s_{f21} = 1 \sim 10, \theta_{P11} = 0.005 \sim 0.05, \theta_{P12} = 0.1 \sim 0.9, \theta_{P21} = 0.002 \sim 0.02, \theta_{P22} = 0.1 \sim 0.9, \theta_{f11} = 0.005 \sim 0.05, \theta_{f12} = 0.1 \sim 0.9, \theta_{f21} = 0.002 \sim 0.02, \theta_{f22} = 0.1 \sim 0.9$ 。

リアルオプションの推定結果について主なものを以下に示す。

(1) 部品価格に上昇ジャンプ

図 6 にはいくつかの θ_{f11} について、価格 f における上昇ジャンプの分布の平均と標準偏差を相互に比例させながら変化させた場合のプレミアムの推定値を示している。これ以外のパラメータは標準値に固定しておく。図では a_{f11} の値を横軸に、プレミアムを縦軸にとり表示している。また上昇ジャンプがもとのレベルにもどるまでの時間の影響を見るために、図 7 に

は、 θ_{f12} を変化させた場合のプレミアムを示している。なお、上昇ジャンプの発生頻度とその大きさは逆比例であると仮定することが自然であるので(すなわち大きなジャンプは稀にしか発生しない)、 θ_{f12} と a_{f11}, s_{f11} とは逆比例の関係に保ちながら変化させている。図 7 においては上昇ジャンプに関係しないパラメータは標準値に固定し、横軸には代表して θ_{f12} をとり、縦軸にはプレミアムを示している。

図 6 の結果から、部品価格の上昇ジャンプの分布の平均値が増加するに従って、プレミアムは増加する傾向にあることが分かる。これらの傾向線は単調で滑らかなものではない理由としては、プレミアムの期待値を最適な生産における生産数量をもとにして計算していることがあげられる。しかしながら、理由はこれだけではなく、ジャンプの発生頻度が大きくなる場合でも、比例してプレミアムが増加しないケースもある。この理由の 1 つとして、ジャンプの分布の平均値に比例して標準偏差も変化させているので、平均値が大きな場合には価格の上昇も大きい、逆にマイナスに作用するケースも増加することが考えられる。

図 7 においては、上昇ジャンプからもとのレベルに価格がもどる速度が速いケースではプレミアムがやや

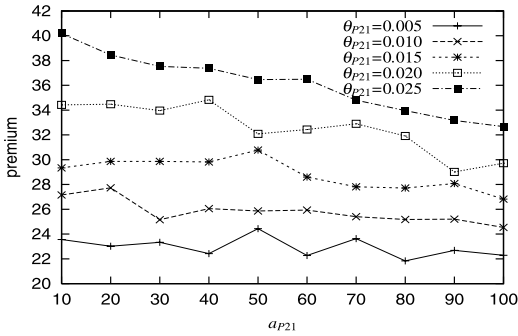


図 8 パラメータ a_{P21} , θ_{P21} によるプレミアムの変化
 Fig. 8 Change of premium along parameters a_{P21} , θ_{P21} .

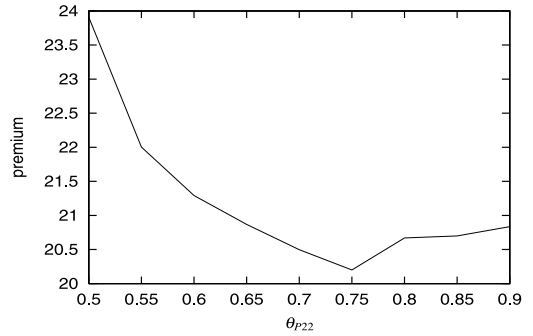


図 9 パラメータ θ_{P22} によるプレミアムの変化
 Fig. 9 Change of premium along parameter θ_{P22} .

大きいことが分かる．しかしながら，プレミアムの増加は θ_{f12} に単調に比例したのではなく中間の部分に最小値が現れている．このことから，ジャンプの頻度とその大きさを逆比例した場合には，効果が相殺されることを反映していると考えられる．

なお，3.2 節においては 2 つのプレミアムの定義，すなわち本論文におけるプレミアムの定義（J プレミアム）と，価格変動に通常のブラウン運動だけを仮定した場合のプレミアムの定義（B プレミアム）の違いについて説明している．図 6，図 7 においてもこれと同様の定義を用いると，価格変化にジャンプ過程が含まれない場合には，図 6，図 7 に示すグラフの最小値（グラフのベースをなす部分，図 6，図 7 では，それぞれ約 17.0，16.8 の値）が，通常の意味での B プレミアムになる．

このような 2 つのプレミアムの定義の違いによる数値の差異は，以下の図 8，図 9，図 10，図 11 においても現れるが，これらの個別についての説明は省略する．

(2) 製品価格に下降ジャンプ

図 8 にはいくつかの θ_{P21} について，価格 P における下降ジャンプの分布の平均と標準偏差を相互に比例させながら変化させた場合のプレミアム価値の評価値を示している．これ以外のパラメータは標準値に固定しておく．図 8 では a_{P21} の値を横軸に，プレミアムを縦軸にとり表示している．また下降ジャンプがもとのレベルにもどるまでの時間の影響を見るために，図 9 には， θ_{P22} を変化させた場合のプレミアムを示している．下降ジャンプの発生頻度とその大きさは逆比例であると仮定することが自然であるので， θ_{P22} と a_{P21} ， s_{P21} とは逆比例の関係に保ちながら変化させている．図 9 においては下降ジャンプに関係しないパラメータは標準値に固定し，横軸には代表して θ_{P22} をとり，縦軸にはプレミアムを示している．

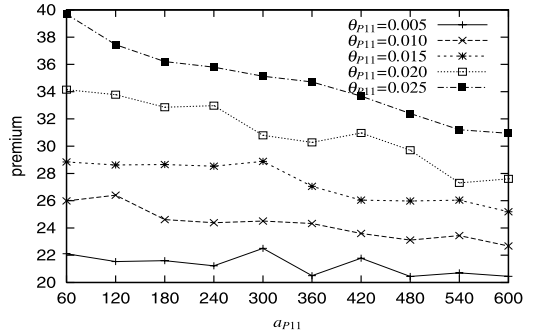


図 10 パラメータ a_{P11} などによるプレミアムの変化
 Fig. 10 Change of premium along parameters a_{P11} etc.

図 8 から見てとれるように，製品価格において下降ジャンプが含まれている場合には，ジャンプの分布の平均値と標準偏差が小さい場合のほうが，これらが大きな場合よりは傾向的に大きくなる事が分かる．このことは，下降ジャンプの大きさが大きい場合には，標準偏差も大きいので，急激なジャンプとなるが継続性はないことが 1 つの理由となっていると思われる．

図 9 においても，このようなジャンプの頻度と，発生からもとのレベルにもどる時間との関係が見い出せる．下降ジャンプが相対的に小さいが，しかしその継続時間が相対的に長い場合のほうが，ジャンプが大きくて発生頻度が小さい場合よりは，プレミアムが大きくなっている．このような傾向は，商品市場における価格変動と企業のリスク分析をする場合に，有効な分析結果となるであろう．

(3) 基本製造モデル

図 10 にはいくつかの θ_{P11} について，価格 P ， f の両方において上昇および下降ジャンプが同時に存在する場合に，ジャンプの分布の平均と標準偏差を，相互に比例させながら変化させた場合のプレミアムの推定値を示している．これ以外のパラメータは，標準値に固定しておく．ジャンプ発生の頻度に相当するよう

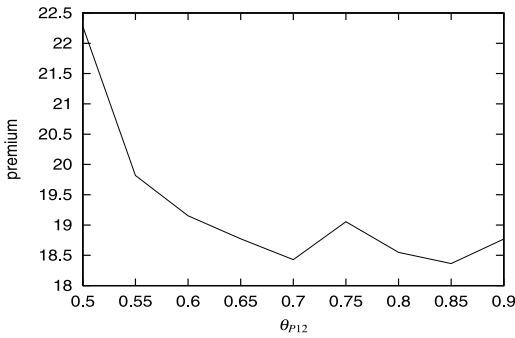


図 11 パラメータ θ_{P12} などによるプレミアムの変化

Fig. 11 Change of premium along parameters θ_{P12} etc.

に標準偏差も、比例的に同時に変化させておく。図には図示する都合上、代表的にいくつかの θ_{P11} について表示している。図の横軸についても、図では代表的に a_{P11} の値を横軸にとり、プレミアムを縦軸に表示している。また上昇および下降ジャンプがもとのレベルにもどるまでの時間の影響を見るために、図 11 には、 $\theta_{P12}, \theta_{P22}, \theta_{f12}, \theta_{f22}$ を変化させた場合のプレミアムを示している。下降ジャンプの発生頻度とその大きさは逆比例であると仮定することが自然であるので、 θ_{P12} などと a_{P12}, s_{P12} などは逆比例の関係に保ちながら変化させている。図 11 においては上昇および下降ジャンプに関係しないパラメータは標準値に固定し、横軸には代表して θ_{P12} をとり、縦軸にはプレミアムを示している。

図 10 より分かるように、ジャンプの分布の平均値と標準偏差が大きくなるに従って、プレミアムが減少する傾向になる。すなわち、ジャンプの分布の平均と標準偏差が小さい場合のほうが、プレミアムとしては相対的に大きな数値となる。この図は、製品価格に下降ジャンプが含まれている図 8 と似た傾向を示している。このようなことから、製品および部品価格に上昇および下降のジャンプが含まれている場合には、製品価格の下落の影響が比較的大きく現れることが予測できる。

次に図 11 より分かるようにジャンプが相対的に小さいが、しかしその継続時間が相対的に長い場合のほうが、ジャンプが大きくて発生頻度が小さい場合よりは、プレミアムが大きくなっている。この図についても製品価格の下落の影響を分析した図 9 と同じような傾向を示している。このことから図 10 と同様に、製品および部品価格に上昇および下降のジャンプが含まれている場合には、製品価格の下落の影響が比較的大きく現れることが予測できる。

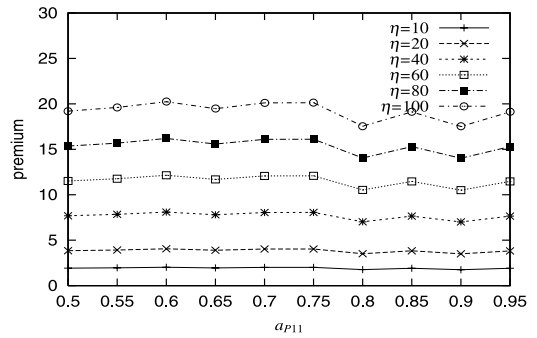


図 12 パラメータ $\eta = a_F \times p_F$ によるプレミアムの変化

Fig. 12 Change of premium along parameter

$$\eta = a_F \times p_F.$$

(4) 需要欠損モデル

図 12 には、商品の取引先の倒産などで販売金額が回収できない場合のプレミアムを示している。この場合には、需要が下落する大きさ a_F とその頻度 p_F との積 $\eta = a_F \times p_F$ を、 $\eta = 10 \sim 100$ として変化させている。同時に価格 P, f のジャンプには、上昇と下降の両方が含まれていると仮定し、これらのジャンプの分布の平均値と標準偏差を小さいほうから徐々に大きくし、並行して比例的に変化させている。これらのパラメータ以外は、標準値に固定しておく。図 12 の横軸はジャンプの分布を変化させた場合の a_{P11} の値であり、同時に変化させた他のジャンプの分布のパラメータを代表させている。図 12 には η の値により、6 つの傾向線を描いている。

図 12 より、 a_{P11} が大きくなるとプレミアムがやや小さくなってはいるが、ほぼ同じ大きさであることが分かる。これは需要が下落したと仮定しても、この場合の生産は最適化手法により実施されているので、需要の下落に比例した金額がプレミアムに反映されることが影響している。実際には、このような最適生産が仮定できないケースも存在するので、プレミアムはこの金額よりも増加する可能性がある。

6. む す び

本論文ではリアルオプション手法による企業間取引における製造・販売リアルオプション価値の評価と、その応用について述べた。商品価格や部品価格の変化をブラウン運動に加えてジャンプ過程を含むように拡張し、評価関数の最適化問題を確率的動的計画法を用いて偏微分方程式を解く問題へと帰着させた。リスク回避を積極的に行わない場合と確率的動的計画法により最適化を行った場合との価値の差をオプションプレミアムとして評価、その特性を議論し、現実の事象と

そのプレミアムについて述べた。

今後、本論文の手法を製造業における天候などの変動要因へと適用し検証する予定である。

謝辞 本研究の一部は、日本学術振興会科学研究費基盤研究(B)19310099により実施されている。ここに感謝の意を表する。

参考文献

- 1) Black, F. and Scholes, M.: The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, Vol.81, pp.637–659 (1973).
- 2) Merton, R.: Option pricing when underlying stock returns are discontinuous, *Journal of Financial Economics*, pp.125–144 (1976).
- 3) Pan, J.: The jump-risk premia implicit in options: Evidence from an integrated time-series study, *Journal of Financial Economics*, Vol.63, pp.3–50 (2001).
- 4) Kuo, S.G.: Option pricing under a double exponential jump diffusion model, *Management Science*, Vol.50, No.9, pp.1178–1192 (2004).
- 5) Merton, R.: Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case, *The Review of Economics and Statistics*, Vol.LI, pp.247–257 (1969).
- 6) Merton, R.: Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model, *Journal of Economic Theory*, Vol.3, pp.373–413 (1971).
- 7) Tomlin, B.: On the value of mitigation and contingency strategies for managing supply chain disruption risks, *Management Science*, Vol.52, No.5, pp.639–657 (2006).
- 8) Kamrad, B. and Siddique, A.: Supply contracts, profit sharing, switching, and reaction options, *Management Science*, Vol.50, No.1, pp.64–82 (2004).
- 9) Leippold, M., Trojani, F. and Vanini, P.: Equilibrium impact of value-at-risk regulation, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.30, pp.1277–1313 (2006).
- 10) Liu, J., Longstaff, F.A. and Pan, J.: Dynamic asset allocation with event risk, *Journal of Finance*, Vol.LVIII, pp.231–259 (2003).
- 11) Embrechts, P., Kluppenberg, C. and Mikosch, C.: *Modeling Extreme Events for Insurance and Finance*, Springer (1999).
- 12) Thompson, M., Davison, M. and Rasmussen, H.: Valuation and optimal operation of electric power plants in competitive markets, *Operations Research*, Vol.50, No.4, pp.546–562 (2004).
- 13) Takriti, S., Krasenbrink, B. and Wu, L.: Incorporating fuel constraints and electricity spot prices into the stochastic unit commitment problems, *Operations Research*, Vol.48, No.2, pp.268–280 (2000).
- 14) 譚 康融, 儲 梅芬, 時永祥三: ジャンプ過程変動を含む確率モデル分析における Importance Sampling を用いた評価関数のテイル分布推定とその応用, 電子情報通信学会論文誌, Vol.J90-A, No.2, pp.92–102 (2006).
- 15) 池田欽一, 時永祥三: ジャンプ過程を含む変数で記述される評価関数の最適化と企業間取引における製造・販売リアルオプション推定への応用, 数理モデル化と問題解決研究報告, Vol.2007-MPS-66, pp.33–36 (2007).
- 16) Dixit, A.: Entry and exit decision under uncertainty, *Journal of Political Economy*, Vol.97, No.3, pp.620–638 (1989).
- 17) McDonald, R.L.: The value of waiting, *Quarterly Journal of Economics*, Vol.101, pp.707–727 (1986).
- 18) McDonald, R.L. and Siegel, D.R.: Investment and the valuation of firms when there is an option to shut down, *International Economic Review*, Vol.26, pp.331–349 (1985).
- 19) Kogut, B. and Kulatilaka, N.: Operational flexibility, global manufacturing and the option value of a multinational networks, *Management Science*, Vol.40, No.1, pp.123–139 (1994).
- 20) Huchzermeier, A. and Cohen, M.A.: Valuing operational flexibility under exchange rate risk, *Operations Research*, Vol.44, No.1, pp.100–113 (1996).
- 21) Huchzermeier, A. and Loch, C.H.: Project management under risk: Using the real options approach to evaluate flexibility in R&D, *Management Science*, Vol.47, No.1, pp.85–101 (2001).
- 22) Takagi, N. and Tokinaga, S.: Prediction of chaotic time-series by using the multi-stage fuzzy inference systems and its applications to the analysis of operating flexibility, *JORSJ*, Vol.20, No.3, pp.243–259 (2002).
- 23) Cairns, A.J.G.: *Interest Rate Models*, Princeton University Press, New Jersey (2004).

(平成 19 年 8 月 6 日受付)

(平成 19 年 9 月 14 日再受付)

(平成 19 年 9 月 26 日採録)



池田 欽一

平成 8 年九州大学経済学部経済工
学科卒業，平成 14 年同大学院博士
課程修了．博士（経済学）．平成 13
年信州大学経済学部助教授．経済統
計解析，複雑系，時系列解析の研究

に従事．日本 OR 学会会員．



時永 祥三（正会員）

昭和 46 年九州大学工学部情報工
学科卒業．昭和 52 年同大学大学院
博士課程修了．工学博士．同年北九
州高専電気工学科講師．昭和 54 年
大分大学工学部組織工学科講師，助

教授．昭和 61 年九州大学経済学部経済工学科助教授，
平成 4 年同教授．昭和 64 年～平成 2 年カリフォルニ
ア大学，テキサス大学客員研究員．経営情報システム，
経営エキスパートシステム，時系列処理の研究に従事．
日本 OR 学会会員．
