

CIP スキームを用いたレベルセット法による 界面捕獲の数値精度

杉野 隆三郎^{†1} 角田 和彦^{†2}

レベルセット法は、3DCG におけるサーフェス表現や移動物体の最適軌道同定などの界面捕獲に有効な数値計算手法とされるが、レベルセットの運動を記述する移流方程式の数値計算にコストがかかり、符号付き距離関数の再初期化や解析領域をナローバンド化するなど数値技法に工夫を要する。そこで、本研究では移流方程式の数値解法として有効とされる CIP スキームを用いた新しいレベルセットアルゴリズムを開発し、その数値精度を検証した。様々な空間解像度に対して数値実験を実施した結果、本手法が符号付き距離関数の数値計算に特別な工夫をしなくても Lax-Wendroff スキームなどの他の数値解法よりもプロファイルの再現性に優れることを示す。

Numerical Accuracy of Interface Capturing by Level Set Method with CIP Scheme

RYUZABURO SUGINO^{†1} and KAZUHIKO KAKUDA^{†2}

Level set methods are the general framework for surface modelings that combine the geometric flexibility of implicit function methods with the effective computational techniques. They are particularly useful for solving problems on visual computing on optimal computing. The key ingredient is the numerical method of convection equations computing the signed distance function, which is often contained complicated algorithm with high CPU cost. In this paper, a novel and effective computation method for solving interface capturing problems is the context of level set method. The methods, which we call CIP-level set method, is a combination of CIP scheme in the convection phase with level set method in the interface capturing phase. Applicability of the method is shown in comparison of other numerical schemes for rotating profile problem as a bench mark test in a two-dimensional convection equation. The numerical accuracy of the method is discussed with the obtained computational results.

1. はじめに

Web 技術の浸透により、観測や数値実験によるデータ解析だけでなく、アニメーションやゲームなどのコンテンツ表現としても 2D, 3D の精密な CG 表現の需要が高まってきており、レンダリングの前処理としてオブジェクトの良質なサーフェスを生成するためのより高精度かつ計算コストの低い形状モデリング手法の開発が望まれている¹⁾。

近年、メッシュや分割曲面によるモデリングに代わってノイズやデータ欠損に強い陰関数曲面によるモデリングの研究がさかんになってきた²⁾⁻⁴⁾。特に複数の距離画像から高品質の 3DCG を生成する技術は、デジタル画像機器を用いた映像処理やロボットの視覚情報処理など Computer Vision の分野で強く求められており、このような計測情報から得られたサンプル点で定義されるデータからの曲面再構築手法として RBF, MPU, MLS, LSM など代表的される陰関数モデリングが開発されてきた。

RBF と MPU は放射状基底関数の線形和として曲面を再構築するものであり、MLS と LSM は 3 次元座標のスカラー場になんらかの曲面記述を定義して曲面を再構築するモデリングである。なかでも LSM (Level Set Method) は、異色の手法であり Evans らにより界面記述のモデルとして計算幾何学で提案⁵⁾されたものが、数値流体力学における衝撃波などの自由境界問題を解く手法⁶⁾として発展してきた歴史を持つ。その後、Osher, Sethian らにより動的なサーフェス再構築手法として画像処理分野への応用が開始された^{7),8)}。

ここで、動的なサーフェスモデリング手法の代表的なものとして 2 次元モデルの snakes や 3 次元モデルの active tubes がある⁹⁾が、これらは調整すべきパラメータが多いうえ、多次元への拡張性、界面の分離・結合などの位相変化、面と面のエッジなどシャープな形状の再現性、複雑なアルゴリズムなどの点で問題をかかえており、レベルセット法が優位に立っている。また、静的な再構築法としては、距離画像からソリッド物体のサーフェスモデルを生成するためにボリュメトリック密度関数 $\phi: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ の $\phi(x, y, z) = 0$ なるレベル集合 (level set) を導入したカーレス・ルヴォイ法¹⁰⁾がある。

Visual Computing (VC) 分野におけるレベルセット法の重要な応用としては、多視点画像からの画像再構築とロボット制御における物体認識であろう。前者は CG (Computer

^{†1} 阿南工業高等専門学校
Anan National College of Technology

^{†2} 日本大学生産工学部
College of Industrial Technology, Nihon University

Graphics) の分野に属する問題であり、後者は CV (Computer Vision) の問題といえるが、どちらにしても高品質のサーフェスモデルを低 CPU コストで生成することが大切な基本技術であり、画像プリミティブ、曲面の基底関数などの構成要素の性質に依存しない位相変化にロバストなレベルセット法が有効な計算手法と考えられる。画像再構築への応用としては、MRI データや複数の距離画像などの元画像から抽出された大容量の点群データが不可避的に有する各種のノイズやデータの欠損を平滑化あるいは補間し複雑な形状のサーフェスを生成あるいは同定を検討した研究報告^{3),4),11)}がある。また、物体認識への応用としてロボットが障害物をよけて移動するための軌道生成¹²⁾やビデオカメラなどの視覚センサで移動物体の追跡する際に観測不可能な閉塞領域が発生するオクルージョン問題の解決¹³⁾に適用した報告がある。

レベルセット法 (LSM) はこのように優れた界面捕捉性能を持つ手法であり VC 分野への応用が期待されるが大きな問題をかかえている。LSM の基本的な計算手順は、スカラー場を記述する密度関数をなんらかの速度場に設定し、界面として定義されるレベル集合の平均曲率流れを数値計算することにある。ここで問題となるのは、平均曲率流れを支配する移流方程式が高い非線形性を有しており簡単な計算スキームで解くと数値解の精度が著しく低下することである。

数値流体力学 (CFD) の分野では古くから移流方程式の数値計算がかかえるこの問題に注目し、これを解消するために様々な計算スキームを開発してきた¹⁴⁾。CFD 分野では、高次近似スキームに様々な数値技法を駆使した計算法を開発して移流方程式を精度良く解くことで流れ問題の高い非線形性を克服してきたが、VC 分野の LSM は低次のスキームを用いる例が多く、高次スキームを用いたとしてもアダプティブな計算グリッド生成技法、計算領域のナローバンド化や符号付き距離関数の再初期化など CPU コストの高い複雑な計算アルゴリズム⁷⁾を導入しないと品質の高い界面を捕獲・生成することはできない。

Yabe ら¹⁵⁾が提案した CIP は、移流方程式を用いた流れ問題の数値計算における数値拡散と位相誤差を同時に解決する計算スキームであり、シンプルなアルゴリズムでありながらシャープな界面の捕獲が可能である。そして、CFD 分野で重要な移流方程式や移流拡散方程式の数値計算に対する CIP 法の有効性が実証されてきた¹⁶⁾⁻¹⁸⁾。最近では、電磁波の伝播や Schrödinger 方程式を用いた原子分子計算など他の力学系シミュレーションへの応用研究¹⁹⁾が活発に行われている。

そこで、本研究ではレベルセット法に CIP スキームを組み込んだ VC 向けの界面捕獲手法を構築し、その界面捕獲の数値精度を調べた。具体的には、注目する形状のサーフェスを

基に符号付き距離関数を作成する計算アルゴリズム、CIP スキームを用いた符号付き距離関数の移流方程式の離散的定式化を示し、得られた数値データをセグメンテーションするためのセルを用いた等値線の方法による計算アルゴリズムを示す。本手法の数値的精度の検証として、基本的なプロファイルの速度場における界面捕獲テスト問題を数値実験し、Up-Wind スキームならびに Lax-Wendroff スキームとの比較をする。その結果より、本手法が他のレベルセット法が用いる特別な数値技法なしに高い精度で形状プロファイルを捕獲・追跡できることを示す。

2. レベルセット法と符号付き距離関数

2.1 符号付き距離関数とレベルセット方程式

レベルセット法の基本となるものは符号付き距離関数と呼ばれる実数値スカラー関数 $\phi(x, y, z) : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ であり、この関数 ϕ の等値面が形作る閉曲面を注目するサーフェスすなわち界面と定義する。本研究では、計算手法の開発とベンチマークを目的とするので考える空間は 2 次元に限定する。このため、ターゲットとなる界面は関数 $\phi(x, y) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ の等値線が形作る 2 次元の閉曲線となる。そして、なんらかの駆動力で関数 ϕ を移動・変形させて、特定の等値線を望むプロファイルに収束させるのがレベルセット法の基本概念である。

具体的には、陰関数的に表現された界面 $\phi(x, y) = 0$ となる符号付き距離関数 ϕ を水平速度 u と垂直速度 v を成分とする速度場 $\vec{u} = (u, v)$ $u, v \in \mathbf{R}$ 中に配置し、速度場の影響で変形運動する関数 ϕ を移流方程式で記述することになる。この設定に基づいて定式化された移流方程式は次式ようになる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (1)$$

次に、VC 分野で多用されている偏微分方程式を次に示す。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + F|\nabla \phi| = 0 \quad (2)$$

この式 (2) は、注目する界面の成長速度 \vec{F} のノルム $F = |\vec{F}|$ を使って式 (1) から導き出されたものであり、Osher らによってレベルセット方程式と呼ばれた⁶⁾。式 (2) の第 2 項には、対象とする画像イメージから取得された点群データにより定義される自己駆動性を有する平均曲率流れの速度場⁷⁾を与えることになる。この偏微分方程式を数値計算することで、各時間ステップにおける $\phi = 0$ の閉曲線を界面と見なしてその変化を動的に追跡することになる。この方程式は、元の移流方程式 (1) とは異なる性質を持ち、航空機や船舶の最適軌

3 CIP スキームを用いたレベルセット法による界面捕獲の数値精度

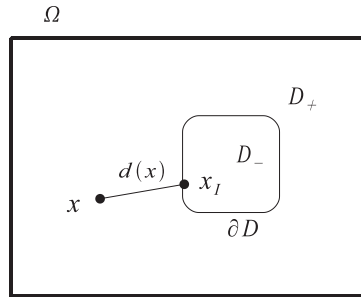


図 1 界面 ∂D と考えている領域 Ω 中の任意点 \mathbf{x} との距離 $d(\mathbf{x})$
 Fig. 1 The distance $d(\mathbf{x})$ from a point $\mathbf{x} \in \Omega$ to the interfaces ∂D of objects.

道生成で用いられる Eikonal 方程式と同値な方程式²⁰⁾ と見なせる．この方程式は空間勾配のノルム計算をともなうので数値的にも解きにくいものであり，単純な差分スキームを用いると大きな数値誤差の影響でプロファイルの追跡が困難となる．

次に，レベルセット法で一般的に用いられる符号付き距離関数 ϕ について図 1 を用いて説明する．考えている 2 次元の全体領域 $\Omega = D_- \cap D_+$ 中に注目する物体が占める領域 D_- が存在し，その境界 ∂D を界面と見なして ∂D 上の任意の点 \mathbf{x}_I と Ω 中の点 $\mathbf{x} = (x, y)$ との符号付き距離 $d(\mathbf{x})$ を式 (3) のように定義する．

$$d(\mathbf{x}) = \begin{cases} +\min(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I|) & \rightarrow \mathbf{x} \in D_+ \\ -\min(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I|) & \rightarrow \mathbf{x} \in D_- \end{cases} \quad (3)$$

つまり，距離を求めたい領域点 \mathbf{x} とその点に最も近い界面上の点 \mathbf{x}_I とのユークリッド距離であり，もし $\mathbf{x} \in \partial D$ であれば $d(\mathbf{x}) = 0$ となる．

この符号付き距離を Ω 中の任意点 $\mathbf{x} = (x, y)$ で， $\phi(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x})$ とすることで符号付き距離関数 ϕ すなわち符号付き距離関数を定義する．ここで，注目する界面は $\phi = 0$ となり，内部領域 D_- が負の関数値を，外部領域 D_+ で正の関数値を持つことになる．符号付き距離関数は陰関数の持つ性質をすべて備えており，1 通りの界面パターンに対して符号付き距離関数はただ 1 つだけ求まり，かつ勾配 $\nabla\phi$ のノルムについて $|\nabla\phi(\mathbf{x})| = 1$ が成立するという著しい性質を持つ．さらに，符号付き距離関数は界面が単調かつ連続であることから十分に高い信頼性に基づく数値微分が保障される．また，符号付き距離関数のこのような性質を用いると一般的には計算が複雑になる法線ベクトルや曲率の計算が簡単になる．レベルセッ

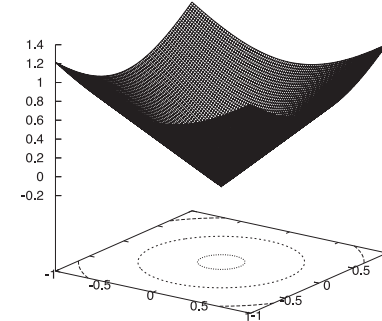
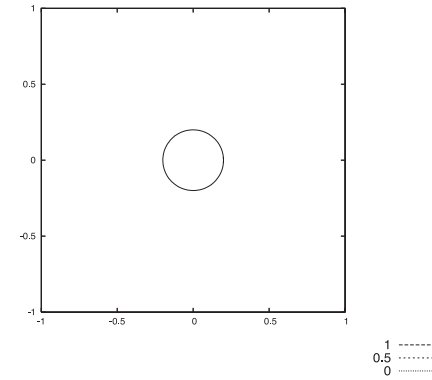


図 2 設定された円形界面の形状 (上図) , 円形界面に対する符号付き距離関数を用いたレベルセット関数 (下図)
 Fig.2 The shape of a disposed circle interface (upper), The level set function of a circle interface by signed distance function (lower).

トで表現された等値線上で単位法線ベクトル \vec{n} は式 (4) のように表せる．

$$\vec{n} = \frac{\nabla\phi(\mathbf{x})}{|\nabla\phi(\mathbf{x})|} = \nabla\phi(\mathbf{x}) \quad (4)$$

また，同じく等値線上での曲率 κ は式 (5) のように変形できる．

$$\kappa = \nabla \cdot \frac{\nabla\phi(\mathbf{x})}{|\nabla\phi(\mathbf{x})|} = \nabla \cdot \nabla\phi(\mathbf{x}) = \Delta\phi(\mathbf{x}) \quad (5)$$

これらにより，平均曲率流れ問題などを解くときの計算量を減らすことができる．ここで，図 2 の上図に示すように直径 0.4 の円が原点に配置されたときの符号付き距離関数がどのようなものかを図 2 の下図に示す．図を見ると分かるように想定した円を界面 $\phi = 0$

として内側が負の関数値を持ち、界面から外側に遠ざかるにつれて正の関数値が単調に増加していく。

2.2 符号付き距離関数の計算アルゴリズム

先の定義に従った符号付き距離関数を具体的に計算するアルゴリズムについて述べる。2次元の計算領域を考えることにして、この領域中に任意形状を持つ初期界面を配置する。ここで、初期界面のプロファイルを構成する図形は、単連結な閉曲線であるものとする。レベルセット法をサーフェスの再構築に用いる場合は方程式として記述しやすい直方体や球面を初期界面として設定することが多い²¹⁾が、実測データから得た複雑なプロファイルに対して高精度かつ高速に計算すること、さらにレベルセット関数を再初期化する必要に迫られたり、レンダリングなどのポスト処理に引き渡すセグメントデータの準備などを考えると、なんらかの離散化されたプロファイルを初期界面とすることが望ましい。3次元の場合は適切なポリゴンモデルでセグメント化することになるが、本研究で2次元を考えるので界面を適切なサイズの線分セグメントの集合として表現することにする。

以上の考え方に基づいて、設定した計算グリッド上の各点で距離関数を離散的に求める。これは、各グリッド点と界面を構成する線分セグメント上の離散点との距離のうち、最も短い距離を選ぶことになる。具体的には、各グリッド点の座標を $\mathbf{x}_{i,j} = (x_i, y_j)$ とし、セグメント上の点の座標を $\mathbf{x}_I = (x_I, y_I)$ とするとこの2点間の距離 l は式 (6) となる。

$$l = \sqrt{(x_i - x_I)^2 + (y_j - y_I)^2} \tag{6}$$

基になるデータが有する解像度やCPUコストを考慮して、この計算は離散的に実施することにする。すなわち、各セグメント上のエッジ接点および重心点についてのみ距離計算を行い、最小の l を注目するグリッド点 $\mathbf{x}_{i,j}$ での距離関数の値とする。

次に、注目しているグリッド点が界面の内側か外側かの内外判定をして符号を決定するアルゴリズムを述べる。この種の閉曲線に対する内外判定には、注目する点から無限遠に向けて直線を引き、交差するセグメント数を計算して判定を行うことが多い。しかし、このアルゴリズムを実際に用いると、セグメントのエッジ端点に交差したり、セグメントと直線が平行に近かったりする場合には数値誤差のためうまくいかない場合があった。そこで、本研究では以下に述べるガウス積分を用いた内外判定アルゴリズムを新たに開発して用いた。まず、2次元のガウス積分について次のように考える。図3のように閉曲線 C の内部に注目する点 P が存在したとする。さらに、点 P を中心とする単位円 C_0 と周回積分を行う C 上の点 Q と点 P までの距離を半径 $r = |\mathbf{r}|$ とする円 C_r があるものとする。ここで、単位

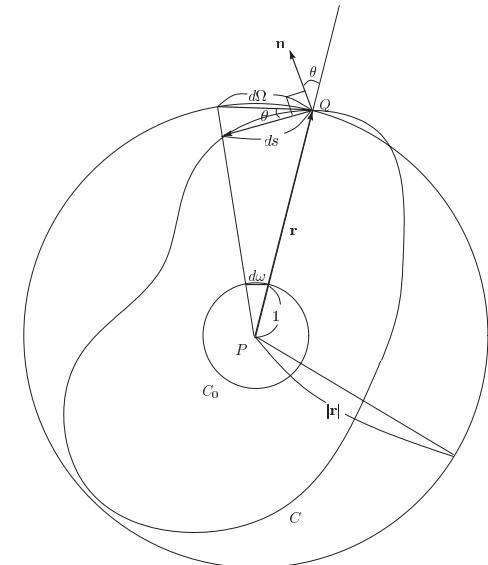


図3 閉曲線 C の内部に存在する点 P のガウス積分
Fig. 3 Gauss integral for an inner point P in Jordan curve C .

円 C_0 と円 C_r は同心であり、中心 P から C_r と C が交わる点 Q までのベクトルを \mathbf{r} 、 C 上の単位法線ベクトルを \mathbf{n} とする。 C が Jordan 曲線であるとき、線素 ds と点 P で形作る錐により切り取られる量を考えると、点 P が C の内側か外側かで式 (7) に示す積分量 I が決まる。

$$I = \begin{cases} \int_C \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^2} ds = 0 & \rightarrow \text{outer point} \\ \int_C \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^2} ds = 2\pi & \rightarrow \text{inner point} \end{cases} \tag{7}$$

ただし、点 P が C 上に存在する場合、式 (7) は $\lim_{r \rightarrow 0} 1/r^2 = \infty$ であるが、 $r = 0$ で距離関数が $d(\mathbf{x}) = 0$ になるため計算する必要はない。

数値計算のために、式 (7) の周回積分 I を閉曲線 C を m 分割してセグメント化した離散化式を次式 (8) に示す。ここで、 i はグリッド点 P の番号、 j は閉曲線を構成する線分セグメントの番号、 Q_j はセグメントのエッジ端点とする。

$$\tilde{I} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\mathbf{n}_j \cdot \overrightarrow{P_i Q_j}}{|\overrightarrow{P_i Q_j}|^2} |\overrightarrow{Q_j Q_{j+1}}| \quad (8)$$

この離散化積分も数値誤差を持っているが、ただ 1 つの実数に対する 2 値判定であるため適切な閾値を与えれば内外判定が破綻するようなことはなく、堅牢なアルゴリズムといえる。

3. CIP スキームによる移流方程式の数値計算

3.1 2次元移流方程式の数値解法

ここでは、式 (1), (2) で表される 2 次元の移流方程式の数値計算方法を考察する。移流方程式の離散化の考え方としては様々なものがあるが、本論では式 (1) を展開した次式を満足する数値解の構成法を差分スキームによる補間近似で説明する。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

まず、式 (9) を離散メッシュの両端点に配置された 2 個の計算グリッド点を持つスカラー量を 1 次補間により離散化した Up-Wind スキームを次式に示す。

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n + \frac{u \Delta t}{\Delta x} (\phi_{i,j}^n - \phi_{i-1,j}^n) + \frac{v \Delta t}{\Delta x} (\phi_{i,j}^n - \phi_{i,j-1}^n) \quad (10)$$

ここで、 i, j, n はそれぞれ空間水平方向、垂直方向、時間方向の離散化インデックスを示し、 $\Delta x, \Delta y, \Delta t$ は水平、垂直、時間方向の離散増分を示すものとする。この差分スキームは風上法ともいわれ、式 (10) の右辺第 2, 3 項の空間方向の差分がつねに上流から下流に向かって行われるよう計算しなくてはならない。たとえば、右辺第 2 項において、場における水平速度 u が正なら $(\phi_{i,j}^n - \phi_{i-1,j}^n)$ とし、 u が負なら $(\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i,j}^n)$ とする。このスキームは簡便な定式化であるが、空間の一階微分を持つ性質に対して、大きな数値拡散誤差を持っており、時間ステップを進めると関数分布のプロファイルが著しく崩れてしまう。

ここで、移流方程式の数値計算において重要なクーラン数と呼ばれる無次元数 c を紹介する。このクーラン数が $c \leq 1$ のときに移流方程式の数値解が安定、 $c > 1$ のときは解は不安定になり発散する。この条件を CFL (Courant-Friedrich-Lewy) 条件といい、移流方程式を差分的なスキームで数値計算する場合にその精度や安定性を議論するとき重要な指標¹⁴⁾ となる。クーラン数 c は、2 次元の速度場を $\vec{u} = (u, v)$ としたとき次式で表される。

$$c = |\vec{u}_{max}| \frac{\Delta t}{\Delta x + \Delta y} \quad (11)$$

次に、式 (9) を空間方向に 3 個の連続するグリッド点を用いて 2 次補間により離散化した Lax-Wendorff スキームを式 (12) に示す。Lax-Wendorff スキームは、中央差分から発生する不安定性を数値拡散効果により安定化させるスキームであり、プロファイルが滑らかな場合は高精度かつ安定な解が得られる。そのため CFD 分野では昔から愛用されているが、プロファイルがシャープな形状でキンクなどの不連続性を持つ場合は位相誤差が卓越する。計算を続けて時間進展をさせると、発生した微小振動が大きく成長し、元のプロファイルから遠く離れた数値結果¹⁴⁾ となる。

$$\begin{aligned} \phi_{i,j}^{n+1} = & \phi_{i,j}^n - \frac{u \Delta t}{2 \Delta x} (\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n) \Delta t + \frac{u^2 \Delta t}{2 \Delta x^2} (\phi_{i+1,j}^n - 2 \phi_{i,j}^n + \phi_{i-1,j}^n) \Delta t^2 \\ & - \frac{v \Delta t}{2 \Delta y} (\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j-1}^n) \Delta t + \frac{v^2 \Delta t}{2 \Delta y^2} (\phi_{i,j+1}^n - 2 \phi_{i,j}^n + \phi_{i,j-1}^n) \Delta t^2 \end{aligned} \quad (12)$$

3.2 CIP スキームによる定式化

VC 分野の研究では、前節で紹介した Up-Wind スキームを用いることが多い。それは、2.1 節で述べたレベルセット方程式を用いてプロファイルの時間進展をさせるアルゴリズムを用いているからであり、Eikonal タイプの式 (2) を簡単に解くには低精度な Up-Wind スキームを採用せざるをえない。その場合は、前節でも述べたように大きな数値誤差に見舞われることになり、レベルセット関数の再初期化や再初期化を回避するための特殊なアルゴリズムを用いてプロファイルの保存性を確保することになる。

そこで我々は、式 (2) で示されるレベルセット方程式を解くことをやめて、移流問題に高い精度を持つ CIP スキームを用いて元の移流方程式 (1) をそのまま解くことを提案する。界面進展を数値計算するためには、2.1 節で示したように平均曲率流れ問題を解く必要があるので、式 (13) に示す一般化された界面成長方程式²²⁾ を式 (1) に組み込んだものを新たに次のように定式化する。

$$\vec{G} = K \vec{n} = (K n_x, K n_y) \quad (13)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{G} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (14)$$

ここで、 K は界面の平均曲率になんらかの補正項を加えた一般化平均曲率、 \vec{n} は界面上に定義される単位法線ベクトルを示す。さらに、式 (13), (14) は次式のように書き換えられるが、これは 3.1 節で示した一般的な移流方程式 (9) そのものである。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + Kn_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + Kn_y \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (15)$$

現在までに拡散誤差や位相誤差を減らすために、様々な高次補間スキームや TVD, ENO, WENO などの全変動保存スキームが開発¹⁴⁾されてきたが、これらの定式化は、用いる補間点として計算グリッドを多点化する必要があるうえに計算アルゴリズムが複雑化してしまう。CIP 法は、3 次の補間関数を用いるが関数値だけでなくその微分量をも伝播させるとともに、補間係数をその微分量から構成するため、2 点グリッド間補間とシンプルな計算アルゴリズムが構成できるうえ、未知関数の微分量も同時に移流させるというスキームの性質で移流するプロファイルの保存が保障される。

以下に、CIP スキームによる移流方程式 (9) の離散化手法を述べる。CIP スキームによる定式化は、補間関数の選択と離散化方程式の構成法により様々なものがあるが、本研究では最も基本的かつシンプルな変数変換をとみなわない A 型 CIP スキームを用いる。まず、用いる 2 次元 3 次補間多項式を次のように定義する。

$$f(x, y) = \sum_{l=0}^3 \sum_{m=0}^3 C_{lm} x^l y^m \quad (16)$$

次に、未知関数 ϕ の空間方向の導関数を $\partial \phi / \partial x = \partial_x \phi$, $\partial \phi / \partial y = \partial_y \phi$ と略記することを認めて、それぞれに成立するべき移流方程式と計算グリッド上の諸量の関係ならびに式 (16) を最もコンパクトにする補間関数を用いて離散化を行う (導出の詳細は付録 A.1 を参照のこと) と以下ようになる。

$$\begin{aligned} \phi_{i,j}^{n+1} = & \phi_{i,j}^n - u\{(C_{30}u + C_{21}v)u\Delta t^2 - (C_{20}u + C_{11}v)\Delta t + \partial_x \phi_{i,j}\}\Delta t \\ & - v\{(C_{03}v + C_{12}u)v\Delta t^2 - C_{02}v\Delta t + \partial_y \phi_{i,j}\}\Delta t \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \partial_x \phi_{i,j}^{n+1} = & \partial_x \phi_{i,j}^n + u\{(3C_{30}u + 2C_{21}v)\Delta t^2 - 2C_{20}\}\Delta t \\ & + v(C_{12}v\Delta t - C_{11})\Delta t \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \partial_y \phi_{i,j}^{n+1} = & \partial_y \phi_{i,j}^n + v\{(3C_{03}v + 2C_{12}u)\Delta t^2 - 2C_{02}\}\Delta t \\ & + u(C_{21}v\Delta t - C_{11})\Delta t \end{aligned} \quad (19)$$

諸量を更新しながら式 (17)–(19) を反復計算することで CIP 法により 2 次元移流方程式が 3 次精度で数値計算することができる。

4. 界面捕獲アルゴリズム

4.1 セルを用いたセグメンテーション

界面を陰関数の等値面で表現した場合、考えているオブジェクトが配置されている解析領域全体にボリュームデータが存在することになり、これを可視化するにはサーフェスレンダリングかボリュームレンダリングを用いて表示することになる。本研究では、捕獲した界面のモデルを様々な用途²³⁾に利用することを想定して、最もコンパクトで CPU コストの低いポリゴン型のデータに変換する。3 次元モデルではマーチング・キューブ法を用いることが一般的と考えられるが、本研究ではベンチマーク用の 2 次元モデルであるので以下に述べる等高線の方法で線分要素でセグメント化することにした。界面捕獲計算の精度を調べたり、今後、新しい計算手法を導入したりしたときの汎用性も考慮すると、できるだけ正確に界面をセグメンテーションしたいので、マーチング・キューブによく見られる正方形のセルではなく正方形セルを 1 つの対角線で 2 つの三角形セルにしたものを使用することにした。このとき、各セル・データを構造体として、セル接点座標、セル接点での陰関数値、セルの各エッジにおける界面との交差点などのデータを持たせる。これらをもとに、等高線のアルゴリズムで各セルのエッジと界面の交差点を求めてそれらを接続することで界面のセグメント・モデルが得られる。図 4 に示すように、セルを形成する節点 P_1, P_2, P_3 はそれぞれ座標値 (x, y) と陰関数の値 ϕ を持っている。それらから等高線アルゴリズムで得られた $\phi = 0$ の界面のエッジとの交点が ϕ_0^1, ϕ_0^2 であり、この 2 点の座標を連結するとそれが等高

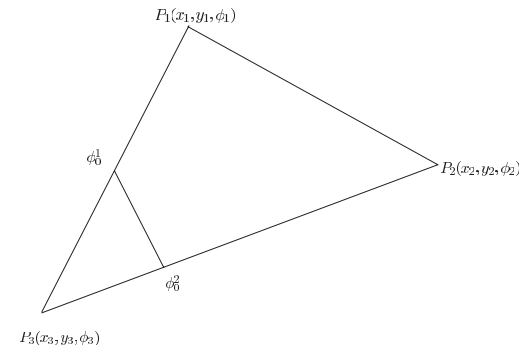


図 4 界面をセグメントする 3 角形セル
Fig. 4 The triangular cell for interface segmentation.

7 CIP スキームを用いたレベルセット法による界面捕獲の数値精度

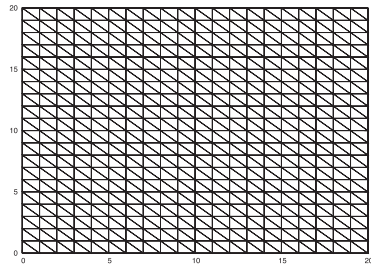


図 5 3 角形セルで構成されるセグメント用のメッシュ

Fig. 5 The segmentation mesh is consisted by the triangular cells.

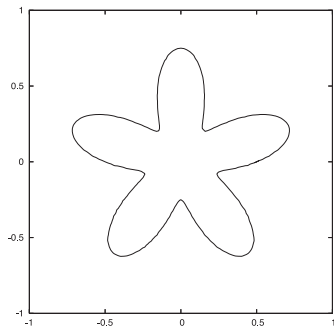


図 6 101 × 101 のメッシュでセグメントされた複雑な界面

Fig. 6 The complicated interface is segmented by cell mesh 101 × 101.

線を用いた界面のセグメントモデルになる。21 × 21 の計算グリッドで作成したセルのメッシュを図 5 に示す。このように、セルメッシュ・オーダが全界面のプロファイルにセグメント化される際のモデリング精度を決めることになる。このアルゴリズムを用いて 101 × 101 の 3 角形セル・メッシュにより、非凸形状を有する複雑な界面をセグメントした例が図 6 に示す界面である。さらに、このセグメントモデルをもとに 2.2 節で述べたアルゴリズムで符号付き距離関数を計算し、そのランドスケープを描いたものが図 7 である。この結果を見ると、セル・メッシュの分解能に応じて、花形の界面が十分に正確にモデル化できていると同時に複雑な界面の符号付き距離関数が正しく生成できていることが分かる。

4.2 CIP-レベルセット法による計算アルゴリズム

これまでに述べた CIP-レベルセット法と界面のセグメント化をまとめて、本研究で用い

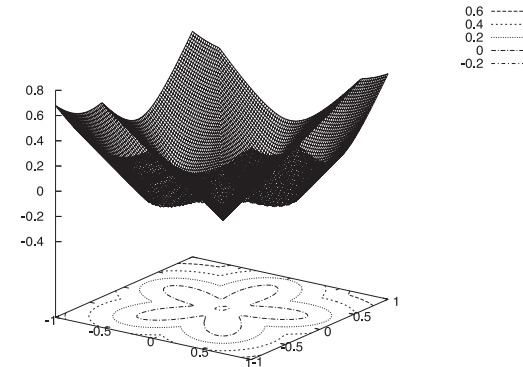


図 7 セグメントされた複雑な界面の符号付き距離関数

Fig. 7 The signed distance function of a segmented complicated interface (Mesh 101 × 101).

た界面捕獲アルゴリズムの全体を 4 個の手続き STEP 1-4 に分けてここに示す。

ここで、ループ処理をしているのは STEP 4 だけであり、初期時間ステップから最終時間ステップまでの界面進展を数値計算している。もし、計算スキームで界面上で定義される幾何学データを用いるような場合やポリゴン・データだけをファイルに出力する場合は STEP 2 の処理を STEP 4 セッションさせればよい。また、STEP 3 を STEP 4 のループ処理に入れるということは、レベルセット関数の再初期化をするということであるが、本研究では再初期化はしていない。

- STEP 1) 初期界面のプロファイル・データの読み込みと設定
- STEP 2) 等値面アルゴリズムによるセグメント・データの作成
- STEP 3) セグメント・データを用いた符号付き距離関数の作成
- STEP 4) 任意ステップまでの移流方程式の数値計算と出力

5. 数値実験

5.1 対象問題の設定

本研究では、移流方程式のベンチマークとしてよく用いられる Rotating Cone 問題をモディファイしたテスト問題を設定して数値精度を検証した。この問題は、速度ベクトル場 $\vec{b} = (-y, x)$ である場にコーン型の分布を持つスカラー関数を置き、回転的にスカラー関数が移流されたときのプロファイルの保存性を調べることで、計算スキームの数値精度を

8 CIP スキームを用いたレベルセット法による界面捕獲の数値精度

チェックするものである．コーン型のプロファイルが1周したときに，初期形状と近ければ満足な解が得られたことになる．

本研究では，円形や正方形などのプリミティブな界面プロファイルについて，符号付き距離計算アルゴリズムを用いて符号付き距離関数を作成し，それを回転場中で移流させる Rotating Profile 問題を設定した．計算対象とする2次元における全領域は正方形領域とし， $[x: -1, 1] \times [y: -1, 1]$ のサイズを持つものとする．プロファイルを移流させる速度場 $\vec{b}(x, y)$ は，回転移流速度をスカラー ω で制御できる次式を定義する．

$$\vec{b} = (-\omega y, \omega x) \tag{20}$$

計算パラメータは，次のように設定する．まず，インクリメンタル時間は $\Delta t = 0.001$ で固定，かつ $\omega = 2\pi$ として，1000step で移流プロファイルが正方領域内を1周するようにした．次に計算で用いるグリッド間隔 $(\Delta x, \Delta y)$ については，空間方向のサンプリング間隔（離散分解能）を変更することで数値精度を比較するため3つの計算グリッド数を 21×21 (case-1), 51×51 (case-2), 101×101 (case-3) と設定する．

以上の設定の下で，本数値実験の計算パラメータは表1のようになる．

5.2 円形プロファイルの捕獲問題

直径0.4の円形な界面プロファイルを式(20)による速度場中に配置し，回転的な流れで界面を領域中を1周させる問題を，3章で示した各スキームで数値計算した結果を比較する．各スキームとも表1で示した3種類の空間解像度で計算をしたが，ここでは最も解像度の高い case-3 の結果を示す．

図8，図9，図10は，それぞれ3.1節で示した Up-Wind, Lax-Wendorff, CIP の各スキームの定式化により界面移動の時間発展を数値計算し，100stepごとに4.1節のセグメントアルゴリズムで抽出した界面プロファイルを示したものである．どの図も，初期プロファイルが回転場に移流されて反時計回りに移動していく様子が分かる．図8で示した Up-Wind

は，だんだんと円形プロファイルが小さくなり，500step で元の直径サイズの $1/5$ 位に縮小し，600step 以降はプロファイルが捕獲されず消失してしまう．ここに示さないが，case-1, 2の低解像度ではもっと早い段階でプロファイルは消失する．このように Up-Wind は数値拡散誤差が大きいためステップごとに関数分布がシャープさを失う．

図9は，Lax-Wendorff による計算結果であるが，ほぼ円形のプロファイルを保ちながら1000stepまで移動していることが分かる．図10は，CIP による結果であり，Lax-Wendorff と同様にプロファイルを保ちつつ1周している．図9，図10を比較すると1000stepでの

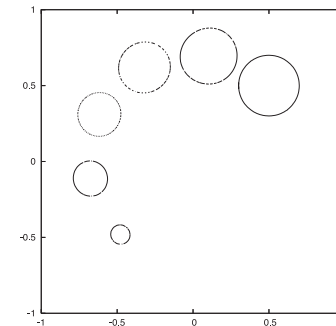


図8 回転場中で捕獲された円形界面のプロファイルの変化 (Up-Wind, 101 × 101 mesh)
Fig. 8 The deformation profiles of a captured interface in the rotation field (Up-Wind, 101 × 101 mesh).

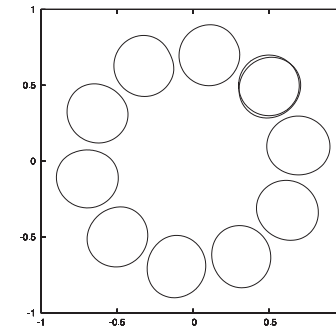


図9 回転場中で捕獲された円形界面のプロファイルの変化 (Lax-Wendorff, 101 × 101 mesh)
Fig. 9 The deformation profiles of a captured interface in the rotation field (Lax-Wendorff, 101 × 101 mesh).

表1 各計算グリッド数における離散分解能とクーラン数

Table 1 Discretized resolution and Courant number of the each computation grid number.

	u_{max}	Δt	$\Delta x, \Delta y$	c
case-1	$2\sqrt{2}\pi$	0.001	0.1	0.04443
case-2	$2\sqrt{2}\pi$	0.001	0.04	0.11107
case-3	$2\sqrt{2}\pi$	0.001	0.02	0.22214

case-1: 21×21 mesh case-2: 51×51 mesh
case-3: 101×101 mesh

9 CIP スキームを用いたレベルセット法による界面捕獲の数値精度

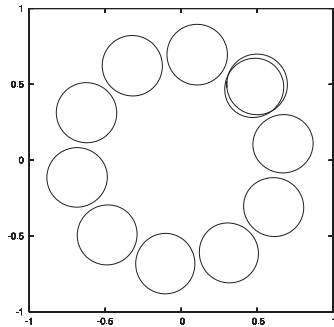


図 10 回転場中で捕獲された円形界面のプロファイルの変化 (CIP, 101×101 mesh)

Fig. 10 The deformation profiles of a captured interface in the rotation field (CIP, 101×101 mesh).

界面の重心位置に関しては Lax-Wendorff は CIP より正確に計算している。しかし、各ステップのプロファイルの形状を比較すると、Lax-Wendorff の方はわずかな卵型の変形を振動的に繰り返して移動しているが、CIP の方はほぼ真円を保ったまま移動していることが分かる。これは、Lax-Wendorff の方は位相誤差が大きいためレベルセットの分布に振動成分が発生するためであり、CIP は微係数の移流も同時に計算することからプロファイルの保存性が高いからである。ただし、Lax-Wendorff は系の保存性に優れるため円形のような滑らかな形状の場合は、ある程度の計算精度を保つので重心の移動は CIP より正確に計算できたと考えられる。ここで、 $\phi = 0$ の界面近傍だけでなく符号付き距離関数の分布全体の時間進展を検証する。以上より、Lax-Wendorff スキームは滑らかで、かつ複雑でないプロファイルに対しては比較的良好な再現性を示すことが分かるが、より詳細な数値的検討については 5.4 節で示す。

最も捕獲精度の低い Up-Wind について、case-3 で計算した場合の $\text{step} = 100, 300, 500, 800$ における関数 ϕ の分布のランドスケープを、それぞれ図 11, 図 12, 図 13, 図 14 に示す。これらのグラフを見ると、数値拡散の影響で符号付き距離関数の劣な分布が徐々に鈍っていき、最後にはなべ底のようにまったくピークを持たない分布になることが分かる。この状態では、 $\phi = 0$ の界面を示すレベルセットは存在しなくなるので、界面プロファイルがセグメント空間から消失する。

5.3 矩形プロファイルの捕獲問題

次に、移流問題としてより条件の厳しい矩形プロファイルで数値実験を行う。計算条件とパラメータは前節で用いたものと同じに設定し、初期形状として直径 0.4 の円に内接する正

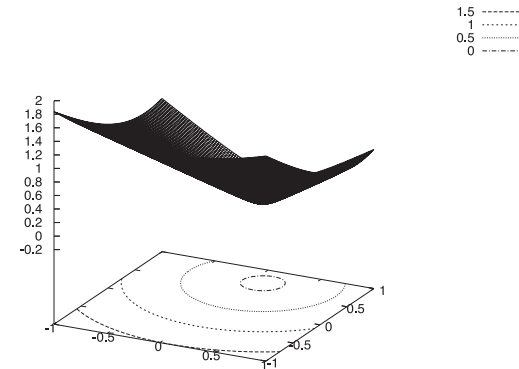


図 11 円形界面の符号付き距離関数のランドスケープ (Up-Wind, $t = 100$ step)

Fig. 11 The landscape of level set function with a circle interface (Up-Wind, $t = 100$ step).

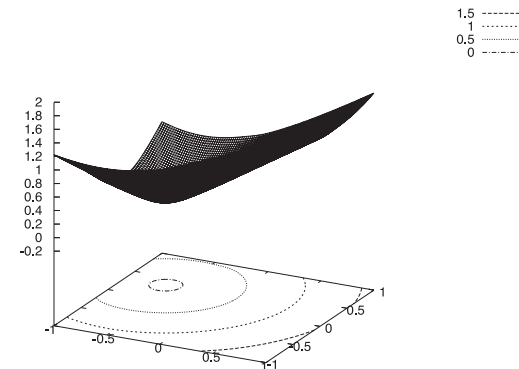


図 12 円形界面の符号付き距離関数のランドスケープ (Up-Wind, $t = 300$ step)

Fig. 12 The landscape of level set function with a circle interface (Up-Wind, $t = 300$ step).

方形を与える。空間解像度は各計算スキームとも表 1 で示した 3 つのケースで計算をしたが、最高解像度の case-3 の結果を示す。

図 15, 図 16, 図 17 は、円形の場合と同様に Up-Wind, Lax-Wendorff, CIP の各計算スキームによる界面移動の時間発展を 100 step ごとにセグメンテーションで抽出したプロファイルである。やはり、初期プロファイルが回転的に移流されて反時計回りに移動して

10 CIP スキームを用いたレベルセット法による界面捕獲の数値精度

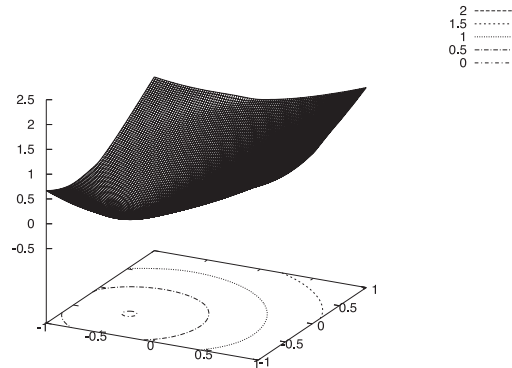


図 13 円形界面の符号付き距離関数のランドスケープ (Up-Wind, $t = 500$ step)

Fig. 13 The landscape of level set function with a circle interface (Up-Wind, $t = 500$ step).

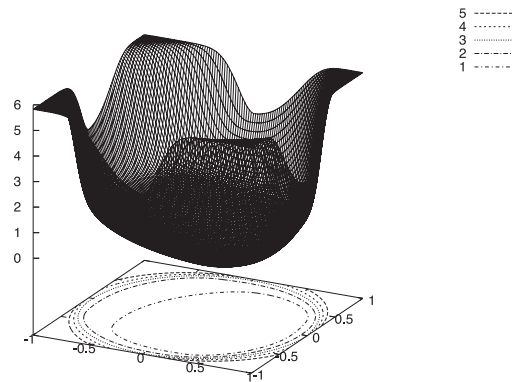


図 14 円形界面の符号付き距離関数のランドスケープ (Up-Wind, $t = 800$ step)

Fig. 14 The landscape of level set function with a circle interface (Up-Wind, $t = 800$ step).

いくことが分かる。図 15 の Up-Wind による結果は、正方形のプロファイルがだんだんと鈍って円形化しながら縮小し、円形の数値実験よりも早い 500 step で完全に消失してしまう。円形プロファイルよりも矩形プロファイルの方が計算条件が厳しく拡散誤差が効いてくることが分かる。

図 16 は、Lax-Wendorff による計算結果であるが、Up-Wind とは違ってプロファイルが

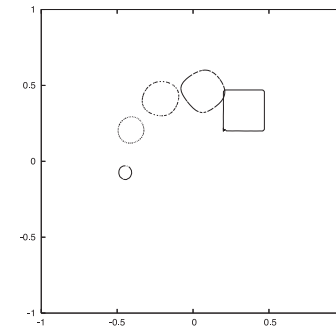


図 15 回転場中の捕獲された四角形界面のプロファイルの変化 (Up-Wind, 101×101 mesh)

Fig. 15 The deformation profiles of a captured interface in the rotation field (Up-Wind, 101×101 mesh).

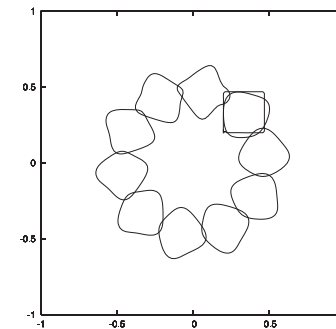


図 16 回転場中の捕獲された四角形界面のプロファイルの変化 (Lax-Wendorff, 101×101 mesh)

Fig. 16 The deformation profiles of a captured interface in the rotation field (Lax-Wendorff, 101×101 mesh).

消失することではなく、1000 step まで形状を捕獲していることが分かる。しかしながら、正方形の形状は保つことはできなくなり、エッジ部分は鈍って丸くなるとともに、いびつな形状が微妙に変化しながら 1 周している。図 17 は、CIP による結果であるが、若干エッジが丸くなりプロファイルの重心が若干ずれているが、ほぼ正方形を保ったまま 1 周分の移流が完了していることが分かる。図 16、図 17 を比較すると、エッジ部を有するプロファイルに対する Lax-Wendorff の界面捕獲性能は CIP に比べて著しく劣り、使用に耐えられないことが明らかになった。これは、Lax-Wendorff の方は円形などの滑らかなプロファイルでは

11 CIP スキームを用いたレベルセット法による界面捕獲の数値精度

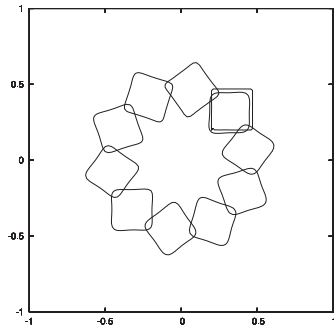


図 17 回転場中の捕獲された四角形界面のプロファイルの変化 (CIP, 101 mesh)

Fig. 17 The deformation profiles of a captured interface in the rotation field (CIP, 101 × 101 mesh).

顕著化しなかった位相誤差が、矩形プロファイルでは卓越してしまい、レベルセットの分布を大きく歪ませるためである。

ここで、前節の数値実験と同様に界面近傍だけでなく、レベルセット分布全体の時間進展を可視化する。矩形問題において最も捕獲精度の高い CIP について、関数 ϕ のランドスケープを図 18、図 19、図 20 に示す。それぞれは、計算パラメータを case-3 に設定したときの step = 0, 500, 1000 におけるランドスケープであるが、これらを見ると、すり鉢状のプロファイルを持つ符号付き距離関数はシャープなピーク形状を保ちながら、回転場を 1 周していることがよく分かる。

5.4 数値精度の検討

ここでは、各計算スキームにより捕獲されたプロファイルの数値精度について検討する。数値精度の検証方法にはいろいろなものがあるが、VC 分野への利用を念頭に置いて捕獲されたプロファイルの volume の保存性と形状の保存性に注目する。

まず、初期プロファイルとして設定した界面が占有する領域の面積に対する数値計算で捕獲したプロファイルの占有面積の割合を調べたもので、100step ごとのデータをプロットした。これは界面の時間進展にともなう各計算スキームの volume 保存性の検証であり、もし、この数値が '1' なら初期プロファイルの面積と同じであることを示す。図 21 は、空間解像度を case-3 に設定した円形の Rotating Profile 問題の結果であり、Up-Wind, Lax-Wendorff, CIP の各スキームとも計算ステップが進むと volume が減少していくことが分かる。特に、Up-Wind は拡散誤差が大きいため計算開始から 500step でプロファイルが消失し、volume がなくなることが分かる。Lax-Wendorff は振動的な変化をするものの 1000step

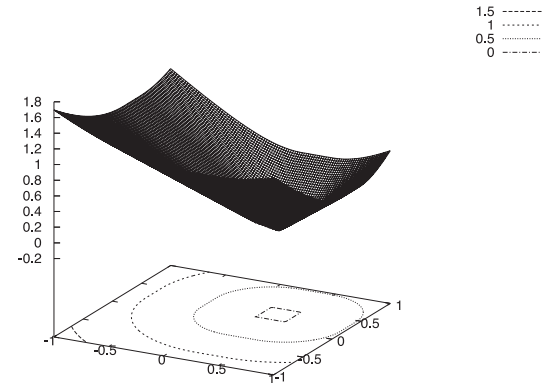


図 18 四角形界面の符号付き距離関数のランドスケープ (CIP, $t = 0$ step)

Fig. 18 The landscape of level set function with a square interface (CIP, $t = 0$ step).

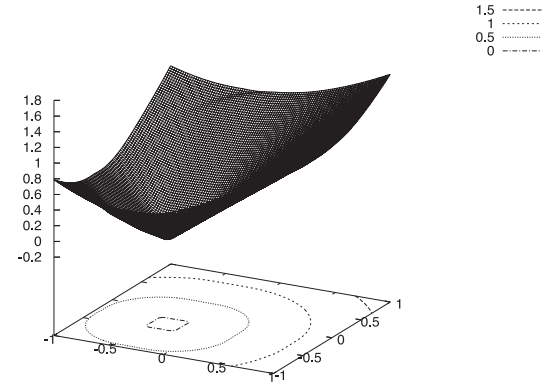


図 19 四角形界面の符号付き距離関数のランドスケープ (CIP, $t = 500$ step)

Fig. 19 The landscape of level set function with a square interface (CIP, $t = 500$ step).

で約 98% の保存性を保ち、CIP も徐々に減少しているものの約 93% の保存性を保つことが分かる。図 22 は、case-3 で正方形の Rotating Profile 問題の結果であり、正方形などの矩形な形状はシャープなエッジを有するため円形と比べて数値計算はより厳しいものとなる。3 種類の計算スキームすべてにおいて円形の場合より volume の保存性は悪くなることが分かる。Up-Wind は面積の消失が約 100step 早くなり、Lax-Wendorff は振動的に変化をし

12 CIP スキームを用いたレベルセット法による界面捕獲の数値精度

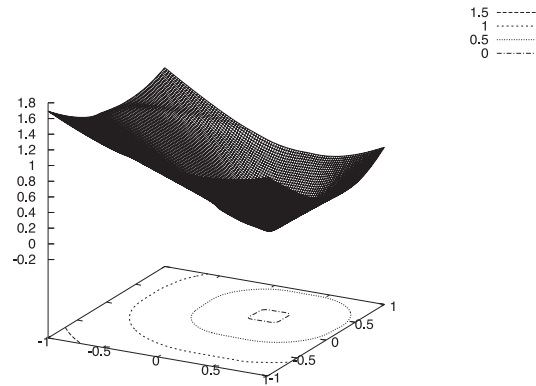


図 20 四辺形界面の符号付き距離関数のランドスケープ (CIP, $t = 1000$ step)

Fig. 20 The landscape of level set function with a square interface (CIP, $t = 1000$ step).

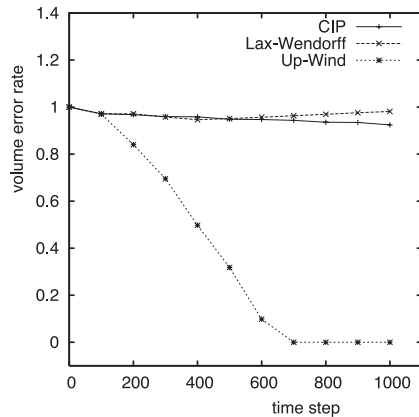


図 21 各スキームで捕獲したプロファイルの面積変化率の時間ステップ変化 (円形プロファイル, 101×101 mesh)
Fig. 21 The comparison of time histories which are changing volume of a area by the each scheme (a circular profile, 101×101 mesh).

て最終的に 100%を超えて面積が若干増えるが, CIP は単調に減少して約 91%の面積になることが分かる.

次に, レベルセット法を画像再構築などの VC 分野に応用するには, 取り扱う画像の LOD (Level of Detail) が問題となるが, これはボクセル分割数などから決まる空間解像度に依

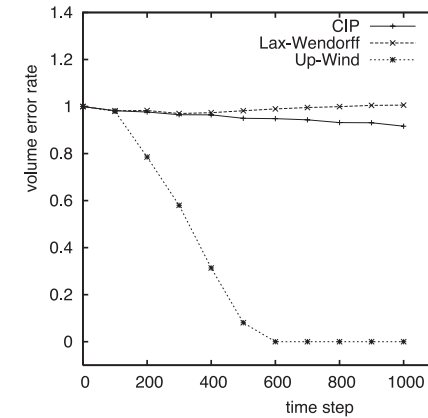


図 22 各スキームで捕獲したプロファイルの面積変化率の時間ステップ変化 (矩形プロファイル, 101×101 mesh)
Fig. 22 The comparison of time histories which are changing volume of a area by the each scheme (a rectangular profile, 101×101 mesh).

存している. そこで, 空間解像度に対する計算スキームの数値精度を検証することが重要になるため, 計算スキームの空間解像度すなわち計算グリッドのメッシュ分割数に対する形状誤差の収束性を調べる. ただし, Up-Wind スキームは途中でプロファイルが消失してしまい評価できないので除外し, 以降では Lax-Wendroff と CIP の 2 種類の計算スキームを比較検討する. まず, 捕獲されたプロファイルの形状誤差 e_{prof}^h を式 (21) で評価する.

$$e_{prof}^h = \max \left\{ Ave \left\{ d(Q_{final}^h, \partial D_{initial}^h) \right\}, Ave \left\{ d(Q_{initial}^h, \partial D_{final}^h) \right\} \right\} \quad (21)$$

ここで, $Ave \left\{ d(Q_{final}^h, \partial D_{initial}^h) \right\}$ は 1000 step 目のセグメントされた界面を構成する離散点と初期界面との平均距離を示し, $Ave \left\{ d(Q_{initial}^h, \partial D_{final}^h) \right\}$ は, 初期界面を構成する離散点と 1000 step 目の界面との平均距離を示す. 前者は初期プロファイルの最終形状に対するずれを, 後者は最終プロファイルに対する初期形状のずれを表すものであり, このような直線でセグメントされた 2 つの閉曲線の形状の違いを離散点で計算すると, この 2 つの量は必ずしも一致しないため, ずれの大きい方を評価量にする. 界面のセグメント分割数を大きくして離散分解能を高めていくと, この 2 つの計算量の差は小さくなっていく.

さらに, 各スキームとも計算によって得られたプロファイルの重心を初期プロファイルの重心と一致するようにプロファイル全体を平行移動させて計算プロファイルと初期プロファイルをマッチングさせた. これにより, 重心位置のずれの影響を排除して捕獲されたプロ

ファイルの再現性に注目した形状の誤差を評価することができる。そして、重心位置のずれを見積もることもプロファイルの捕獲計算では重要なので、式 (22) に示す量で重心のシフト量を評価する。

$$G_{shift} = |\mathbf{G}_{final} - \mathbf{G}_{initial}| \quad (22)$$

ここで、 \mathbf{G}_{final} 、 $\mathbf{G}_{initial}$ はそれぞれ最終形状と初期形状の重心座標を示しており、 G_{shift} は 2 つの重心間の距離を表す。

図 23、図 24 は、それぞれ円形と矩形のプロファイル再現性として、Lax-Wendorff と CIP の空間解像度すなわち計算グリッドの増分 h に対する形状誤差を対数スケールでプロットしたものである。さらに、 $O(h)$ の収束性を示す直線もプロットした。図 23 から、2 つの計算スキームともほぼ 1 次収束をしていることが分かる。空間解像度が上がると若干ではあるが、Lax-Wendorff の方が CIP よりも優れていることが分かる。これは、CIP が volume 保存誤差の影響で精度が落ちて、プロファイルが Lax-Wendorff より縮小してしまったことが原因と考えられる。次に図 24 を見ると、CIP は 1 次の収束性を示しているが、Lax-Wendorff の方は分割数が増えると精度が落ちるといふ不自然な収束になることが分かる。この理由は、Lax-Wendorff は矩形などのシャープなプロファイルにおいて位相誤差が急激に卓越するために符号付き距離関数に振動的な分布が現れて、捕獲したプロファイルが正方形から大きくずれてしまったからである。

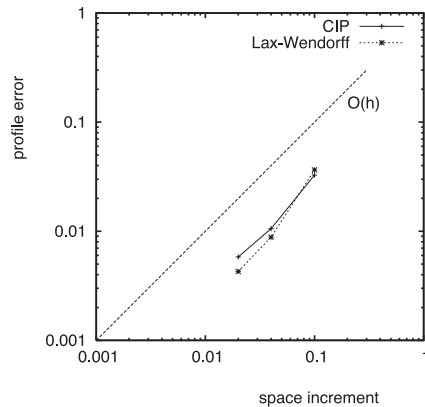


図 23 捕獲された界面を持つ形状誤差の空間分割数による収束状況 (円形プロファイル, step = 1000)
Fig. 23 The convergences of profile error with the three dividing numbers (a circular profile, step = 1000).

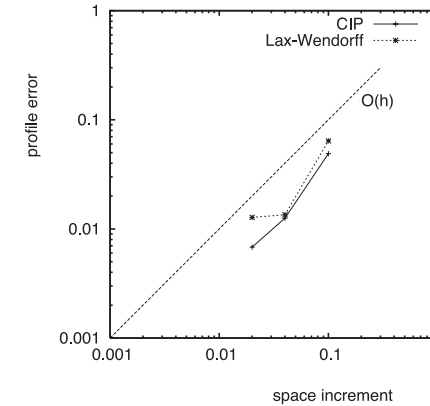


図 24 捕獲された界面を持つ形状誤差の空間分割数による収束状況 (矩形プロファイル, step = 1000)
Fig. 24 The convergences of profile error with the three dividing numbers (a rectangular profile, step = 1000).

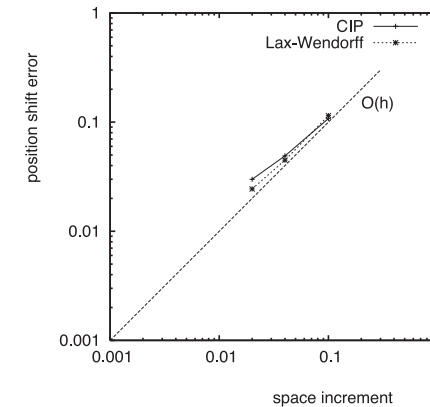


図 25 捕獲された界面を持つシフト誤差の空間分割数による収束状況 (円形プロファイル, step = 1000)
Fig. 25 The convergences of shift error with the three dividing numbers (a circular profile, step = 1000).

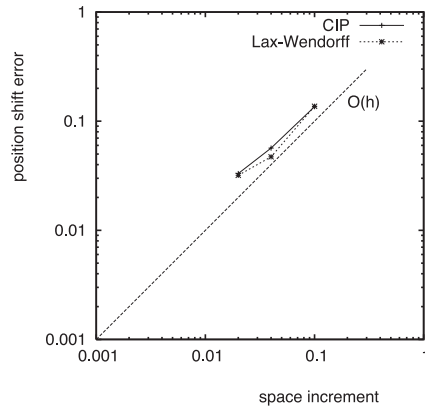


図 26 捕獲された界面が持つシフト誤差の空間分割数による収束状況 (矩形プロファイル, step = 1000)
 Fig. 26 The convergences of shift error with the three dividing numbers (a rectangular profile, step = 1000).

ことが分かる。そして、その差はわずかなものながら、CIP よりも Lax-Wendorff の方がプロファイル全体の位置情報を正確にとらえていることが分かる。本研究で用いた CIP スキームは、速度が空間的に変化する場合には保存性が保障されていないためにこのような結果になったものと考えられる。

6. ま と め

本研究では、符号付き距離関数を用いたレベルセット法について CIP スキームを組み込んだ新しい界面捕獲アルゴリズムを提案し、その数値精度を持つ性質を他の計算スキームとの比較を通じて明らかにした。そして、Osher らが提案する Eikonal 方程式と同値なレベルセット方程式を数値計算するのではなく、元の移流方程式を直接離散化することで CIP スキームとレベルセット法を結合する新しい定式化を示すと同時に、サーフェス・モデリングあるいは画像再構築への応用を想定したレベルセット法に対する移流方程式の数値解法を他の近似計算スキームと比較検討した。

さらに、符号付き距離関数の零値レベルから界面プロファイルを捕獲する手法として等値線の方法によるセグメンテーション・アルゴリズムを示した。ここで、符号付き距離関数の効率的かつロバストな計算アルゴリズムとして、セグメント化された界面からの距離の求め方とガウス積分を用いた任意点の界面に対する内外判定アルゴリズムを示すと同時に、複

雑な界面形状に対する符号付き距離関数の生成例を示してその有効性を確認した。CIP-レベルセット法の適用性を示すために、VC 分野への利用で重要な計算パラメータである空間解像度を変更した場合の数値精度を他の計算スキームとの比較を通じて検証した。ベンチマーク問題として、滑らかな形状とエッジを持つシャープな形状に関する Rotating Profile 問題を数値実験した。

この数値的検証を通じて、Up-Wind は拡散誤差が大きいため計算ステップが進むとプロファイルが鈍りながら縮小し消失してしまうこと、Lax-Wendorff は volume 保存性に優れたものの、形状がシャープになると位相誤差が卓越して形状が振動的に歪むことが分かった。CIP は、若干 volume 保存性が劣るものの、プロファイルの形状保存性が優れており、界面捕獲に関してほぼ十分な再現性を有することが分かった。ここで大切なことは、CIP スキームを用いたレベルセット法は、様々な数値的技法による手当てを組み込んだ他のレベルセット法においても頻繁に実行する必要がある距離関数の再初期化の適用回数を相当程度減らしても十分な精度でプロファイルを再現できる可能性を示したことにある。この事実は、応用プログラムを開発する際にアルゴリズムがシンプルに構成できるとともに、CPU コストの面からも CIP-レベルセット法が他の手法より優位になる可能性を示している。

以上により、本研究で提案した CIP-レベルセット法はシンプルなアルゴリズムでありながら、VC 分野における点群データからの曲面モデリングや画像再構築での使用に対して、有効な数値計算モデルであることが明らかになった。今後は、この定式化の実用問題への適用のため平均曲率流れに対する数値的性能を検証していく予定である。

参 考 文 献

- 1) 西田友是, 近藤邦雄, 藤代一成: ビジュアルコンピューティング, 画像電子学会, 東京電機大学出版局 (2006).
- 2) Ohtake, Y., Belyaev, A.G., Alexa, M., Turk, G. and Seidel, H.-P.: Multi-level partition of unity implicits, *ACM Trans. Graphics (Proc. SIGGRAPH 2003)*, Vol.22, No.3, pp.463-470 (1999).
- 3) 佐藤善隆, 羽石秀昭: レベルセット法を用いた医用画像セグメンテーション, 電子情報通信学会技術研究報告, MI2004-81(2005-1), pp.1-6 (2005).
- 4) 佐川立昌, 池内克史: 符号付距離場の整合化による形状モデル補間手法, 電子情報通信学会論文誌 D-II, Vol.J88-D-II, No.3, pp.541-551 (2005).
- 5) Evans, L.C. and Spruck, J.: Motion of level sets by Mean Curvature I, *J. Diff. Geom.*, Vol.33, No.635 (1991).
- 6) Osher, S. and Sethian, J.A.: Fronts propagating with curvature-dependent speed:

- Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations, *J. Comp. Phys.*, Vol.79, pp.12–49 (1991).
- 7) Sethian, J.A.: *Level Set Methods and Fast Marching Methods*, Cambridge University Press (1999).
 - 8) Osher, S. and Fedkiw, R.: *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, Springer (2003).
 - 9) 高木幹夫, 下田陽久 (編): *新編画像処理ハンドブック*, 東京大学出版 (2004).
 - 10) Curless, B. and Levoy, M.: A volumetric method for building complex surfaces using volumetric diffusion, *Proc. 23rd Ann. Conf. on Computer Graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH '96)*, pp.303–312 (1996).
 - 11) Malladi, R., Sethian, J.A. and Vemuri, B.C.: Shape modeling with front propagation: A level set approach, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol.17, No.2, pp.157–175 (1994).
 - 12) 中島民雄, 矢向高弘, 村上俊之, 大西公平: レベルセット法を用いた移動ロボットの軌道生成, 平成 11 年電気学会産業応用部門大会講演論文集, pp.537–540 (1999).
 - 13) 岩下友美, 倉爪 亮, 辻 徳生, 原 健二, 長谷川勉: Fast Level Set Method を用いた複数移動物体の三次元追跡, 日本ロボット学会誌, Vol.23, No.7, pp.813–820 (2005).
 - 14) 越塚誠一: 数値流体力学, インテリジェントエンジニアリングシリーズ, 培風館 (1997).
 - 15) Takewaki, H., Nishiguchi, A. and Yabe, T.: The cubic-interpolated pseudo-particle (CIP) method for solving hyperbolic-type equations, *J. Comp. Phys.*, Vol.61, pp.261–268 (1985).
 - 16) Yabe, T. and Xiao, F.: Description of complex and sharp interface during shock wave interaction with liquid drop, *J. Phys. Soc. Japan*, Vol.62, pp.2537–2540 (1993).
 - 17) Xiao, F., Yabe, T. and Ito, T.: Constructing oscillation prevent scheme for the advection equation by a rational function, *Comp. Phys. Commn.*, Vol.93, pp.1–12 (1996).
 - 18) Aoki, T.: Multi-dimensional advection of CIP (Cubic-Interpolated Propagation) scheme, *CFD Journal*, Vol.4, pp.279–291 (1995).
 - 19) 矢部 孝, 内海隆行, 尾形陽一: CIP 法—原子から宇宙までを解くマルチスケール解法, 森北出版 (2003).
 - 20) 西田徹志: 流れの中の航行シミュレーションと最適経路の探索, 日本シミュレーション学会誌, Vol.26, No.2, pp.90–94 (2007).
 - 21) Zhao, H.-K., Osher, S., Merriman, M. and Kang, M.: Implicit and nonparametric shape reconstruction from unorganized data using a variational level set method, *Compter Vision and Image Understanding*, Vol.80, pp.295–314 (2000).
 - 22) Brakke, K.A.: *The Motion of a Surface by its Mean Curvature*, Princeton University Press (1978).
 - 23) 村木 茂, 喜多泰代: 3 次元画像解析とグラフィックス技術の医学応用に関するサー

ベイ, 電子情報通信学会論文誌 D-II, Vol.J87-D-II, No.10, pp.1887–1920 (2004).

付 録

A.1 CIP スキームで用いる補間係数

式 (16) を展開すると式 (23) に示すように総計 16 項の高次多項式になる。しかし本研究では、最もコンパクトなサイズとなる 10 項の 2 変数の 3 次補間多項式を次のように設定する。

$$f_{i,j}(x, y) = C_{30}x^3 + C_{20}x^2 + C_{10}x + C_{03}y^3 + C_{02}y^2 + C_{01}y + C_{21}x^2y + C_{12}xy^2 + C_{11}xy + C_{00} \quad (23)$$

次に 4 個の計算グリッド点 (i, j) , $(i+1, j)$, $(i, j+1)$, $(i+1, j+1)$ に対して, 式 (23) をフィットさせて係数 C_{lm} について若干の条件を与えて解くと次のようになる。

$$C_{30} = \frac{1}{\text{sgn}(u)\Delta x^3} \{ \text{sgn}(u)\Delta x(\partial_x\phi_{iup,j} + \partial_x\phi_{i,j}) - 2(\phi_{i,j} + \phi_{iup,j}) \} \quad (24)$$

$$C_{20} = \frac{1}{\Delta x^2} \{ \text{sgn}(u)\Delta x(\partial_x\phi_{iup,j} + 2\partial_x\phi_{i,j}) + 3(\phi_{iup,j} + \phi_{i,j}) \} \quad (25)$$

$$C_{03} = \frac{1}{\text{sgn}(v)\Delta y^3} \{ \text{sgn}(v)\Delta y(\partial_y\phi_{i,jup} + \partial_y\phi_{i,j}) - 2(\phi_{i,j} + \phi_{i,jup}) \} \quad (26)$$

$$C_{02} = \frac{1}{\Delta y^2} \{ \text{sgn}(v)\Delta y(\partial_y\phi_{i,jup} + 2\partial_y\phi_{i,j}) + 3(\phi_{i,jup} + \phi_{i,j}) \} \quad (27)$$

$$C_{21} = \frac{1}{\text{sgn}(v)\Delta y\Delta x^2} \{ -(\phi_{iup,jup} - \phi_{iup,j} - \phi_{i,jup} + \phi_{i,j}) - \text{sgn}(u)\Delta x(\partial_x\phi_{i,jup} - \partial_x\phi_{i,j}) \} \quad (28)$$

$$C_{12} = \frac{1}{\text{sgn}(u)\Delta x\Delta y^2} \{ -(\phi_{iup,jup} - \phi_{iup,j} - \phi_{i,jup} + \phi_{i,j}) - \text{sgn}(v)\Delta y(\partial_x\phi_{iup,j} - \partial_x\phi_{i,j}) \} \quad (29)$$

$$C_{11} = \frac{1}{\text{sgn}(u)\Delta x} \{ -(\phi_{iup,jup} - \phi_{iup,j} - \phi_{i,jup} + \phi_{i,j}) + C_{21}\Delta x^2 \} \quad (30)$$

ここで, $\text{sgn}(u)$ と $\text{sgn}(v)$ は u と v が持つスカラー値の正・負から符号を取り出す符号関数を表すものとし, $iup = i - \text{sgn}(u) \cdot 1$, $jup = j - \text{sgn}(v) \cdot 1$ とする。

(平成 19 年 11 月 21 日受付)

(平成 20 年 1 月 10 日再受付)

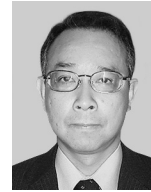
(平成 20 年 1 月 19 日再受付 (2))

(平成 20 年 1 月 28 日採録)



杉野隆三郎（正会員）

1993年日本大学大学院生産工学研究科博士後期課程修了。博士（工学）。木更津工業高等専門学校助手，スタンフォード大学客員研究員を経て，現在，阿南工業高等専門学校制御情報工学科准教授。数値解析や情報科学の研究に従事。自然・社会・人工物に潜むアルゴリズムに興味を持つ。電子情報通信学会，日本応用数学会各会員。



角田 和彦（正会員）

1985年日本大学大学院生産工学研究科（博士後期課程）数理工学専攻修了。工学博士。1996年より日本大学助教授，2005年より教授，現在に至る。複雑流れの数値シミュレーション，PC クラスタの並列分散処理に関する研究に従事。日本機械学会，日本流体力学会，JSCM，日本計算工学会各会員。