１次元一様分布モデルのアドホックネットワークにおける通信可能性の解析

能代　愛*　　吉川　毅†　　栗原　正仁‡
北海道大学

1　はじめに

近年，携帯電話，PDA 等の携帯端末の急速な普及に伴い，新たな形態のネットワークとして，交換機や基地局等のインフラストラクチャに依存せず，交換機能を持つ端末のみで構成される自律分散型ネットワークである，アドホックネットワークに対する関心が高まってきている．アドホックネットワークでは，ネットワークトポロジーが動的に変化するため，端末の存在範囲や，端末数，端末の分布，通信可能な範囲などが，任意の端末同士が通信できる確率 (通信可能性) に影響を及ぼすと考えられ，この通信可能性の解析はシステムを構築する上で不可欠である．そこで本論文では，１次元のアドホックネットワークモデルにおいて最も基本的である一様分布モデルに関する通信可能性について解析的結果を示す．１次元モデルに対する解析結果は，その応用においても道路などの１次元空間として近似できる領域に対して利用できる．

2　１次元一様分布モデル

直線上の区間 $I = \{p|0 \le p \le l\}$ を端末の存在範囲とし，端末を配置する．端末は静止しており，各端末は中継機能を持っているものとする．前提条件として区間 I の両端点（$p = 0, l$）に端末が存在するものとする．この前提により両端の端末が通信可能となる確率を求めることが容易となる．もしこの前提が応用の際成り立たなくても，この解析解は区間 I 全域での通信可能性を検討している点で有用であると考える．区間 I の内部 $(0 < p < l)$ には，n 個の端末が一様分布するものとする．配置された端末を左から $X_0, X_1, \ldots, X_{n+1}$ とし，その各端末間距離を $W_0, W_1, \ldots, W_n$ とする (図１)．二つの端末は，その端末間距離がある通信可能距離 r 以内であれば，互いに通信可能である．本論文では通信可能距離 r は固定とする．アドホックネットワークでは，端末を経由するマルチホップ通信により，離れた端末間の通信を行う．したがって，各端末間距離 $W_0, W_1, \ldots, W_n$ がすべて r 以内であれば，区間 I の両端点の端末 X_0 と X_{n+1} は互いに通信可能である．このモデルについて，次節で両端の端末が通信可能となる確率の導出を行う．

3　解析

端末 X_0 と端末 X_{n+1} が通信可能である確率 $P_n(l)$ は，すべての端末間距離 $W_0, \ldots, W_n$ が r 以内となる

An Analysis of the Connectivity in the Ad-Hoc Networks of an 1-dimensional uniform distribution model.
*Ai NOSHIRO, Hokkaido University
†Takeshi YOSHIKAWA, Hokkaido University
‡Masahito KURIHARA, Hokkaido University

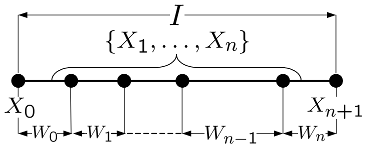

図 1: １次元一様分布モデル

次のような条件付き確率で表すことができる．

$$P_n(l) = P_r[W_i \le r, \forall i=0,\ldots,n+1 | X_1,\ldots,X_n \in I]. \tag{1}$$

なお，式 (1) は W_i の条件付き分布関数なので，$F(r)$ のように r を変数として表現するのが一般的であるが，以下では r を固定，l, n を可変にして再帰的な関係式を導出するので，$P_n(l)$ と表記する．

$n = 0$ のとき，すなわち両端の端末しか存在しない場合，式 (1) が次のようになるのは自明である．

$$P_0(l) = \begin{cases} 1 & (0 \le l \le r) \\ 0 & (r < l). \end{cases} \tag{2}$$

次に，両端の端末以外にも端末が複数存在する場合を考える．n 個の端末 $X_1, \ldots, X_n$ が I 上の区間 $L = \{q|0 < q < x\}$ 内に存在するものとする．このとき，端末 X_n の分布関数は次のように表せる．

$$F_n(x) = P_r[X_n \le x] = \left(\frac{x}{l}\right)^n. \tag{3}$$

そして，式 (3) を微分することにより確率密度関数 $f_n(x)$ が次式のように求められる．

$$f_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{l^n}. \tag{4}$$

$n \ge 1$ のとき，両端の端末 X_0 と X_{n+1} が通信可能である確率は次のような再帰的な式で表せる．

$$P_n(l) = \int_{l-r}^{l} P_{n-1}(x) f_n(x) dx. \tag{5}$$

$P_{n-1}(l)$ は端末 $X_0, \ldots, X_n$ が通信可能である確率，$f_n(x)dx$ は $X_n \in [x, x + dx)$ となる確率を表している．これらは独立なので式 (5) が成り立つ．

ここで式 (5) に対して，距離の単位を $l = dr$，$x = tr$，$T_n(d) = \frac{d^n P_n(dr)}{n!}$ に置き換えて簡単化することにより，次式が得られる．

$$T_n(d) = \int_{d-1}^{d} T_{n-1}(t) dt. \tag{6}$$

$0 \leq d \leq 1$，すなわち $0 \leq l \leq r$ のとき，$P_n(l) = 1$ より，

$$T_n(d) = \frac{d^n}{n!} \qquad (0 \leq d \leq 1). \tag{7}$$

特に $n = 0$ のとき，

$$T_0(d) = P_0(l) = \begin{cases} 1 & (0 \leq d \leq 1) \\ 0 & (1 < d). \end{cases} \tag{8}$$

このとき，$T_n(d)$ は d の n 次区分多項式となると仮定すると，$i = 0, 1, \ldots, n+1$ のとき

$$T_n(d) = T_i^{(n)}(d) = \sum_{j=0}^{n} C_{ij}^{(n)} d^j \quad (i < d \leq i+1). \tag{9}$$

と書ける．この式を式 (6) に代入し計算すると，$i = 1, \ldots, n$ のとき d の係数の関係式が以下のように求められる．

$$\begin{aligned} C_{i0}^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \{ (i^{k+1} + (-1)^k) C_{i-1,k}^{(n-1)} \\ &\quad - i^{k+1} C_{ik}^{(n-1)} \} \qquad (j = 0). \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} C_{ij}^{(n)} &= \frac{1}{j} [\sum_{k=j-1}^{n-1} (-1)^{k-j} \binom{k}{j-1} C_{i-1,k}^{(n-1)} \\ &\quad + C_{i,j-1}^{(n-1)}] \qquad (1 \leq j \leq n). \end{aligned} \tag{11}$$

特に $n = 0$ のとき，

$$C_{ij}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$n \neq 0$ のとき，特に，

$$\begin{cases} C_{00}^{(n)} = \ldots = C_{0,n-1}^{(n)} = 0 \\ \qquad\qquad C_{0n}^{(n)} = \frac{1}{n!} \end{cases} \qquad (i = 0), \tag{13}$$

$$C_{n+1,0}^{(n)} = \ldots = C_{n+1,n}^{(n)} = 0 \qquad (i = n+1), \tag{14}$$

となる．ここで係数 $C_{ij}^{(n)}$ は一般に分数となるため，$F_n(y) = \frac{n!}{d^n} T_n(d) (y = \frac{1}{d})$ とおいて，$i = 0, \ldots, n+1$ のとき，

$$\begin{aligned} F_n(y) = F_i^{(n)}(y) &= \sum_{j=0}^{n} A_{ij}^{(n)} y^{n-j} \\ &\quad (\frac{1}{i+1} \leq y < \frac{1}{i}), \end{aligned} \tag{15}$$

とすると，係数 $A_{ij}^{(n)}$ は整数となる．このとき $A_{ij}^{(n)}$ は以下のように求められる．

$$A_{ij}^{(n)} = n! C_{ij}^{(n)} \tag{16}$$

$F_n(y)$ の特徴として次のようなことが挙げられる．

a. $F_n(y)$ は，y に関して高々n 次区分多項式となる．

b. $F_n(y)$ の y の係数及び定数項は式 (10)，(11)，(16) により漸化的に求めることができる．

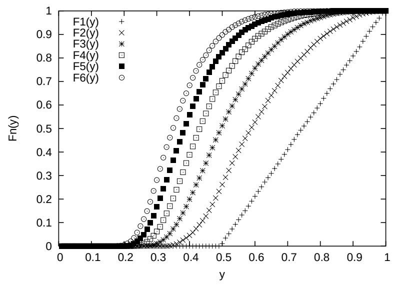

図 2: $F_n(y)$ の計算結果

c. $F_n(y)$ の y の係数及び定数項はすべて整数となる．

d. $F_n(y)$ の区分多項式の境界は連続である．

e. $F_n(y)$ は $n-1$ 階微分まで連続である．

特徴の c，d，e については，証明はしていないが，実際に $n = 1, \ldots, 6$ については確認している．

以上，式 (10)，(11)，(15)，(16) によって，両端の端末が通信可能となる確率を求めることができる．以下に具体例として $n = 3$ の場合である $F_3(y)$ を示す．

$$F_3(y) = \begin{cases} 1 & (1 \leq y) \\ 4y^3 - 12y^2 + 12y - 3 & (\frac{1}{2} \leq y < 1) \\ -44y^3 + 60y^2 - 24y + 3 & (\frac{1}{3} \leq y < \frac{1}{2}) \\ 64y^3 - 48y^2 + 12y - 1 & (\frac{1}{4} \leq y < \frac{1}{3}) \\ 0 & (y < \frac{1}{4}) \end{cases} \tag{17}$$

図 2 に端末数が $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ の計算結果のグラフを示す．このグラフ結果は，シミュレーション結果とほぼ一致し，数値的に見ても，誤差 0.01%から数%の範囲であった．このことからも求めた解析解の正当性が確認できる．

4　まとめと今後の課題

本論文では，アドホックネットワークの１次元一様分布モデルを用いて，モデルの両端の端末が通信できる確率である通信可能性を解析的に求めた．また，計算機シミュレーションにより，その正当性を確認した．今後の課題としては，より現実的なモデルとして端末が移動するモデルや，通信可能距離が端末ごとに異なるモデルにおける通信可能性の検証を考えている．

参考文献

[1] Olivier Dousse, Patrick Thiran, Martin Hasler, “Connectivity in ad-hoc and hybrid networks,” In Proceedings of IEEE Infocom 2002, New York, USA, June. 2002.

[2] Paolo Santi, Douglas M. Blough, “An Evaluation of Connectivity in Mobile Wireless Ad Hoc Networks,” In Proceedings of IEEE DSN, pp. 89-98, Washington DC, USA, June. 2002.