グループに対応した双方向マッチングアルゴリズム

竹田 淳† 伊藤 由樹†† 土田 泰治†† 奥田 晴久† 橋本 学†
† 三菱電機 (株) 先端技術総合研究所 †† 三菱電機インフォメーションシステムズ (株)

1 はじめに

複数の就職志願者を複数の企業に割り当てる問題や，通信パケットをチャネルに割り当てる問題などを定式化するのに用いられる 2 集合間の多対 1 の双方向マッチング問題を考える．ここで，一方の集合の各要素は他方の集合の部分集合に対して一意的な順序をつけた優先度リストを持ち，優先度リストに基づいたマッチングを行なう．このような双方向マッチング問題に対しては，マッチングの安定性を定義することができ，常に安定なマッチングを生成するアルゴリズムが知られている [1]．しかし，一方の集合の要素のグループを考え，グループは他方の集合の同一の要素としかマッチングできないという拘束条件が与えられた時，安定なマッチングの存在は保証できなくなる．我々は，このようなグループの拘束条件がある場合に双方向マッチング問題を一般化し，常に一般化された安定性を満たすマッチングを生成するアルゴリズムを提案する．以下では，就職志願者を企業に割り当てる問題を例に取り多対 1 の双方向マッチング問題を定義するが，ここで成立する結果は適用対象には依存せず，一般の双方向マッチング問題に対して成立する．

2 準備

企業の集合を $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_{N_p}\}$，就職志願者の集合を $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{N_a}\}$ とする．また，各企業 p は 1 以上の整数である定員 $Q(p)$ を持つ．マッチング M とは，志願者 $a \in A$ と企業 $p \in P$ の間の多対 1 の対応関係を示すペア (a, p) からなる集合である．企業 $p \in P$ の優先度リスト $ROL(p)$ は A の部分集合である．優先度リスト $ROL(p)$ に含まれる 2 人の志願者 a_1, a_2 の間には，常に $a_1 < a_2$ か $a_1 > a_2$ のどちらかが成り立たなければならない．ここでの順序は，企業 p が a_1 を a_2 より好む場合に $a_1 < a_2$ と置くことにする．同様に，志願者 $a \in A$ の優先度リスト $ROL(a)$ は P の部分集合であり，$ROL(a)$ に含まれる 2 つの企業 p_1, p_2 の間には，常に $p_1 < p_2$ か $p_1 > p_2$ のどちらかが成り立たなければならず，志願者 a が p_1 を p_2 より好む場合に $p_1 < p_2$ と置くことにする．

志願者 a が企業 p の優先度リストに含まれる，つまり $a \in ROL(p)$ の時，a は p にアクセプタブルであると言い，$p \in ROL(a)$ の時，p は a にアクセプタブルであると言うことにする．また，マッチングに対して，次のように安定性を定義することができる．

定義 1 マッチング M において，M に含まれる志願者と企業のペアがすべて互いにアクセプタブルであり，かつ，ブロッキングペアが存在しない場合に，M は安定であるという．ここで，ブロッキングペアとは，志願者と企業のペア (a, p) で以下の条件をすべて満たすものである．

1. a と p は互いにアクセプタブルであり，$(a, p) \notin M$ である

2. a は M において企業とマッチングしていないか，a がマッチングしている企業を p' とすると $p < p'$ が成り立つ

3. p が M においてマッチングしている志願者数は定員 $Q(p)$ より少ないか，p がマッチングしている志願者の少なくとも *1* 人 a' において $a < a'$ が成り立つ

安定なマッチングを生成するアルゴリズムとして，Gale-Shapley のアルゴリズム (以下 GS アルゴリズムと記す）がある [1]．GS アルゴリズムの 1 つの基本形を図 1 に示す．

```
GS_algorithm()
{
  仮マッチング = φ;
  STACK = φ;
  for each  p ∈ P    M(p) = 0;
  for each  a ∈ A {
    a.i = 0;
    push(a, STACK); /* a を STACK にプッシュ */
  }
  while  (STACK ≠ φ) {
    a = pop(STACK); /* a を STACK からポップ */
    while  (ROL(a) の要素が a.i 個より多い) {
      a.i = a.i + 1;
      p = ROL(a) の a.i 番目の要素;
      if  (a ∉ ROL(p)) continue;
      if  (M(p) < Q(p)){
        ペア (a, p) を仮マッチングに加える;
        M(p) = M(p) + 1;
      }
      else  {
        a1 = Max_order(p);
        if  (a1 < a) continue;
        ペア (a, p) を仮マッチングに加える;
        ペア (a1, p) を仮マッチングから除く;
        push(a1, STACK);
      }
      break;
    }
  }
}
```

図 1: GS アルゴリズム

図 1 において，$STACK$ は未処理志願者のスタックであり，$a.i$ は志願者 a が $ROL(a)$ で何番目の企業にプロポーズするかを示す指標であり，$M(p)$ は企業 p とマッチングしている志願者数であり，$Max\_order(p)$ は p に最大順位でマッチングしている志願者である．

GS アルゴリズムの処理は次のように行なわれる．あらかじめ仮マッチングを空集合にする．全志願者はスタックに入れられ，順番にまず優先度リストで順位の一番小さい企業に対してプロポーズする．志願者 a がプロポーズされた企業にアクセプタブルでなければ，a はその企業の次に $ROL(a)$ での順位が小さい企業にプロポーズをやり直す．a が企業 p にアクセプタブルである場合は以下の処理を行なう．p と仮マッチングしている志願者数が定員 $Q(p)$ より少ないなら，ペア (a, p) を仮マッチングに加える．p と仮マッチングしている志願者数が $Q(p)$ と等しいなら，$a1 = Max\_order(p)$

Generalized Two-sided Matching Algorithm Applicable to Grouping Constraint
† Jun TAKEDA
†† Yuki ITO
†† Taiji TSUCHIDA
† Haruhisa OKUDA
† Manabu HASHIMOTO
Advanced Technology R & D Center, Mitsubishi Electric Corporation (†)
Mitsubishi Electric Information Systems Corporation (††)

と置き，$a1$ と a との間で $ROL(p)$ における順序を比較する．もし，$a1 < a$ ならば，a は p の次に $ROL(a)$ での順位が小さい企業にプロポーズをやり直す．$a < a1$ の場合には，ペア (a, p) を仮マッチングに加え，ペア $(a1, p)$ を仮マッチングから除外し，$a1$ をスタックの先頭に戻す．上記の処理を，すべての志願者が，いずれかの企業と仮マッチングされるか，または，優先度リストに含まれる企業すべてから拒絶されて，スタックが空になるまで行なう．最終的に得られた仮マッチングをマッチング結果とする．

安定なマッチングは一般に複数存在する．GS アルゴリズムは，必ず 1 つの安定なマッチングを生成して終了することが知られている [2].

3　グループに対するマッチング問題

双方向マッチング問題に，グループの拘束条件を導入する．

定義 2 *グループとは，志願者の 1 人以上の組であり，同一グループを構成する志願者は，マッチングされる場合は全員が同一の企業にマッチングされるものとする．ここで，グループは企業に対する優先度リストを持つものとする．*

グループ g を構成する志願者数をグループのサイズと呼び $s(g)$ で表すことにする．前述した志願者の集合 A と企業の集合 P の間のマッチングは，グループの集合 G と P の間のマッチングですべてのグループのサイズが 1 の場合とみなすことができる．

企業の優先度リストとして，志願者個人でなくグループに対して一意的な順序をつけたものを考える．例えば，もともと志願者個人に対する優先度リストを持っている場合には、グループを構成する志願者の中で順位最大のものの順位をグループに対する順位とすればよい．G と P の間のマッチングの安定性については，定義 1 において志願者 a をグループ a と置き換えるだけでは，サイズが 2 以上のグループに対してはブロッキングペアの定義が適切ではないので，グループ a と企業 p がブロッキングペアになるための 3 番目の条件を次のように変更することにする．

3'. p が M においてマッチングしている志願者数は $Q(p) - s(a)$ 以下か，または，p がマッチングしているグループ $g_1, g_2, \ldots, g_l$ が存在し，$a < g_1, g_2, \ldots, g_l$ が成り立ち，$s(a) \le s(g_1) + s(g_2) + \cdots + s(g_l)$ である．

このように安定性の定義を一般化しても，サイズが 2 以上のグループが存在する場合には，安定なマッチングは必ずしも存在しないことがわかる．例えば次のようなマッチング問題では，安定なマッチングが存在しないことは，すべてのマッチングを列挙すればわかる．グループの集合が $G = \{a_1, a_2, a_3, a_4, c\}$ で，サイズは c のみが 2 でその他は 1 とする．企業の集合が $P = \{p_1, p_2\}$，定員は $Q(p_1) = Q(p_2) = 2$ とする．優先度リストは $ROL(a_1) = \{p_2, p_1\}$, $ROL(a_2) = \{p_1, p_2\}$, $ROL(a_3) = \{p_1\}$, $ROL(a_4) = \{p_2\}$, $ROL(c) = \{p_1\}$, $ROL(p_1) = \{a_1, c, a_2, a_3\}$, $ROL(p_2) = \{a_2, a_4, a_1\}$ とし，左側の要素ほど順位が小さいものとする．

グループのマッチング問題でも安定なマッチングを保証するため，マッチング問題の一般化を行なう．企業 $p \in P$ にマッチングしているグループを優先度リスト $ROL(p)$ で順位の小さいものから並べたものを，$b_1^p, b_2^p, \ldots, b_M^p$ とおく．このとき，b_i^p のマッチング順位を $j(b_i^p) = 1 + \sum_{k=1}^{i-1} s(b_k^p)$ と定義する．また，グループに対するマッチングにおいては，企業 p とマッチングするグループのマッチング順位は，定員 $Q(p)$ 以下でなければならないと定義する．このとき，図 2 に示すサイズを考慮した GS アルゴリズム (以下 SGS アルゴリズムと記す) は常に安定なマッチングを生成する．図 2 において，$SM(p)$ は企業 p とマッチングしている志願者個人の数であり，$Q(p) + s(b_M^p) - 1$ 以下になる．

```
SGS_algorithm()
{
  仮マッチング = φ;
  STACK = φ;
  for each  p ∈ P    SM(p) = 0;
  for each  b ∈ G {
    b.i = 0;
    push(b, STACK);
  }
  while  (STACK ≠ φ) {
    b = pop(STACK);
    while  (ROL(b) の要素が b.i 個より多い) {
      b.i = b.i + 1;
      p = ROL(b) の b.i 番目の要素;
      if  (b ∉ ROL(p)) continue;
      ペア (b, p) を仮マッチングに加える;
      SM(p) = SM(p) + s(b);
      if  (SM(p) ≤ Q(p)) break;
      b1 = Max_order(p);
      while  (SM(p) − s(b1) ≥ Q(p)) {
        ペア (b1, p) を仮マッチングから除く;
        SM(p) = SM(p) − s(b1);
        push(b1, STACK);
        b1 = Max_order(p);
      }
      break;
    }
  }
}
```

図 2: SGS アルゴリズム

定理 1 *SGS アルゴリズムは必ず安定なマッチングを生成して終了する．*

証明はグループの数に関する帰納法を用いればよい．スタックの最初の n 個のグループ $g_1, g_2, \ldots, g_n$ の部分問題に対して安定なマッチングが得られたとし，$n+1$ 個目のグループ g_{n+1} が企業 p にプロポーズした時，ペア (g_{n+1}, p) がブロッキングペアなら仮マッチングに取り込み，高々有限個のグループを仮マッチングから除外する．除外されたグループがブロッキングペアを構成すれば仮マッチングに取り込み，高々有限個のグループを仮マッチングから除外する処理を続けることになる．しかし，グループは一度拒絶された企業とブロッキングペアを構成することはなく，順位がより大きい企業にプロポーズし直すことになる．グループの集合や優先度リストは有限集合なので，ブロッキングペアを解消するための，グループの仮マッチングへの取り込みと除外の処理は必ず有限時間で終了する．したがって，グループ数が $n+1$ の部分問題に対して安定なマッチングが得られることになる．

4　むすび

我々は，多対 1 の双方向マッチング問題をグループの拘束条件がある場合に一般化し，グループのサイズを考慮することにより，安定なマッチングを生成するアルゴリズムを導出した．

参考文献

[1] D. Gale and L. S. Shapley, “College Admissions and the Stability of Marriage,” American Mathematical Monthly, 69, 9–15, 1962.

[2] A. E. Roth and M. A. O. Sotomayor, “Two-Sided Matching,” Cambridge University Press, 1990.