接着空間を用いた物体間の代数的位相幾何学モデル

贄田智行† 國井利泰‡
法政大学情報科学学部ディジタルメディア学科

1. はじめに

現在では物体の運動は幾何学的なレベルにおける処理しか行っておらず，空間の開，閉，同値関係を定義していない．そして，空間の開，閉，同値関係を定義しないことによって，物体の境界の定義が、位置情報に依存し、そのために物体の重なり合い，突き抜けなどの計算量が物体の境界数の指数関数になり、計算量の爆発問題が起こってしまう．また，物体間の関係を定義するのに，Unified Modeling Language (UML)[1]があるが，あくまでグラフレベルでの定義であるので、属性間の関係を形式的に定義することがモデルレベルでは組み込まれていない．したがって，これらに関する数学的根拠や証明がモデルレベルでは不可能である．本論文では，物体，物体間にホモトピー[3-4]，セル理論[2]を適用し，不変量に基づく抽象階層[5-6]を用いて衝突における物体間の関係を接着空間レベルで示し，セル空間レベルから幾何レベルでの処理においてその情報を用いて処理を行うことで，物体間の関係に基づく安定した処理を可能とする方法を提案する．また，今回は簡単のため，物体として剛体の球を例として取るとする．

2. ホモトピーレベル

ホモトピーレベルでは，あるトポロジー空間からあるトポロジー空間への変化を，連続関数と閉区間 $I = [1, 0]$によりあらわす．本論文では，2 つの球が衝突を行うある一定時間期間を閉区間とみなし，その区間内において剛体球の衝突前，衝突時，衝突後をトポロジー空間として考え，衝突における状況，物体間の関係の流れを捉える．

3. 接着空間レベル

接着空間レベルでは，物体間で共有する部分において同値関係を適用し，別の物体との関係付けを行っていく．

球を 2 つの独立したトポロジー空間 X, Y とすると，接着空間は２つの球の衝突における２物体の関係と状況を連続な接着関数 f：

$f : Y_0 \rightarrow X \mid Y_0 \subseteq Y$

を用いて表すことができる．２つの球がだんだん近づいてきて衝突し，その後接着したひとつの物体となるという状況は接着空間レベルでは，

衝突前 ： $Y \sqcup X$
衝突時 ： $Y \sqcup_f X$
衝突後 ： $Y \cup X$

とあらわされる．また，衝突時には２つの球において同値関係：

$x \sim f(y) \mid x \in X, \forall y \in Y_0, Y_0 \subseteq Y$

が成立し，接着空間 Y_fは,

$$Y_f = Y \sqcup_f X = Y \sqcup X \ /\!\sim$$
$$= X \sqcup Y / (x \sim f(y) \mid \exists x \in X, \forall y \in Y_0)$$

とあらわされる．衝突における両物体の関係の変化は等化関数 g,

$g : Y \sqcup X \rightarrow Y_f = Y \sqcup_f X$

によってあらわすことができる．

4. セル空間レベル

セル空間レベルでは，接着空間レベルにおいて定義されたトポロジー空間に帰納的な次元を物体の自由度として加えていく．

球は３次元の閉セル空間で定義できる．それぞれの球は $X = B_x^3$，$Y = B_Y^3$ となる．剛体は，力を加えても形状は変わらないので球において衝突して接触するところは点，0 次元となる．したがって，X, Y における衝突点 $f(Y_0)$，Y_0は,

$$f(Y_0) = f(B_Y^0) \subseteq X = B_X^3$$
$$Y_0 = B_Y^0 \subseteq Y = B_Y^3$$

Algebraic Topological Modeling of Physical Objects in Adjunction Spaces
† Tomoyuki Nieda
Department of Digital Media, Undergraduate Schools of Computer and Information Science, Hosei University.
‡ Tosiyasu L. Kunii
Department of Digital Media, Graduate Schools of Computer and Information Science, Hosei University.

とあらわされる．また，セル空間レベルにおける接着空間 Y_f は，

$$Y_f = Y \sqcup_f X = B_Y^3 \sqcup_f B_X^3 = B_Y^3 \sqcup_f B_X^3 / \sim$$
$$= x \sim f(y) \mid x \in B_X^3, \forall y \in B_Y^0, B_Y^0 \subseteq B_Y^3$$

となり，接着関数 f は，

$$f : B_Y^0 \to B_X^3 \mid B_Y^0 \subseteq B_Y^3$$

となる．同様に，等化関数 g は，

$$g : B_Y^3 \sqcup B_X^3 \to B_Y^3 \sqcup_f B_X^3$$

とあらわされる．また，各球の接着点 B_x^0， B_Y^0 は，

$$B_x^0 = \partial^3 B_X^3$$
$$B_Y^0 = \partial^3 B_Y^3$$

により，求められる．

5． 幾何レベル

幾何レベルでは，接着空間レベル，セル空間レベルを基にして処理を行う．接着レベル，セル空間レベルからの情報だけでなく，剛体を扱うため，それも考慮する必要がある．

5.1． 物理的計算処理

剛体を構成する質点はお互いに動かないので，回転しているときには遠心力とコリオリ力は考える必要はない．したがって，はね返り係数，並進運動と角運動等を考慮した物理的な計算処理を行う．また，角運動における姿勢において，有効桁数の誤差の問題を回避するためや，記憶容量，算術計算の少なさ，補間の関係上四元数を用いるとする．

5.2． その他の計算処理

すべての時間において物理計算を行う必要はない．したがって，計算効率も考えると，これらの物理計算処理は物体がお互いに影響をあたえられるとき，つまり，衝突，接着時にだけ行うようにする．衝突時以外の時は衝突検出処理を行う．もちろん，セル空間レベルで衝突時に共通する部分は点と示されているので見つかった接着点が見つかった時点でそれ以上検出処理を行う必要はない．

また，接着空間レベル，セル空間レベルで示した物体間の関係式は，衝突検出処理の結果によって変わってくる．衝突するまでは通常の衝突検出を行い，衝突時から異なる処理を行う．剛体球では衝突時にセル空間レベルにおいて剛体の衝突点を示してあるので，その点における相対速度 v_{rel} を基にして考える．もし， $v_{rel} = 0$ なら物体はその点において接しているということができる．物体の運動には回転して，違うところで接している場合もあれば，同じところで接していたり，衝突後は離れあったりする場合もあるため， $v_{rel} \neq 0$ の場合は衝突検出を行い，接触しているかどうかを確認する必要がある．

6． まとめと今後の課題

本論文では，物体，物体間にホモトピー，セル理論を適用し，不変量に基づく抽象階層を用いながら空間の開，閉，同値関係を定義することで，処理の安定化を図った．これらを定義する利点は，物体間の関係を示すことができるということである．このことにより，物体同士がすり抜けるといった非現実的な問題が起こることもなくなり，無駄な処理も省くことができる．今後は，これらにおけるシミュレーションを行い，理論は剛体以外にも適用可能であるので，球よりも複雑な物体や柔体にも拡張していく予定である．

参考文献

[1] Selic, B., “A Generic Framework for Modeling Resources with UML,” *IEEE Computer*, Vol.33 no.6, pp.64-69, Jun. 2000.

[2] T.L.Kunii,”A Cellular Web Model –For Information Management on the Web –“,September 14, 2001. Corrected and Revised: September 18-20, 2001

[3] Whitehead, J.H.C., *Combinatorial Homotopy I*, Bulletin of American Mathematical Society, vol.55, pp.213-245, 1949.

[4] T.L.Kunii, “Homotopy Modeling as World Modeling”, Proceedings of Computer Graphics International '99 (CGI99), (June 7-11, 1999, Canmore, Alberta, Canada) pp. 130-141, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, California, U. S. A.

[5]Tosiyasu L. Kunii, “Discovering Cyberworlds”, in Special Issue on Vision 2000, IEEE Computer Graphics and Applications, pp. 64-65, January/February 2000, IEEE Computer Society Press,　Los Alamitos, California, U.S.A.

[6] Tosiyasu L. Kunii, “Cyber Graphics”, Proceedings of the First International Symposium on Cyber Worlds (CW2002), November 6-8, 2002 Tokyo, Japan, pp. 3-7, November 2002, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, California, U.S.A.