遺伝的プログラミングによる超越関数を含む微分方程式系の推定*

杉本 直也† 伊庭 斉志†
東京大学工学部電気工学科 ‡§ 東京大学大学院新領域創成科学研究科‡

1 はじめに

工学, 経済, 自然科学, 社会科学など，さまざまな分野において多くのシステムは複雑で，その振舞いは非線形である．このようなシステムを解析するためには，観測されたデータに矛盾することなくシステムを適切に記述できる数理モデルが必要とされる．

数理モデルを作成するためには，対象とするシステム内の各要素間関係の詳細が分かっていなくてはならない．しかし，システム内部が未知であるような場合にモデルを作成することは容易ではなく，特定の領域に関する詳細な知識はもちろん，豊かな発想力や緻密な観測, 経験など，人間の知能を多く要する．したがって，これまでの手法では主に線形のシステムなど非常に限られた範囲の問題しか扱うことができなかった．

進化的計算手法を用いることで，従来は困難であった非線形システムのモデリングをコンピュータによって行うことが可能となる．

本研究ではシステムを微分方程式系でモデル化し，その式を遺伝的プログラミングによって推定する．

伊庭らは，GP と最小二乗法を組み合わせることによって，時系列データから多項式の微分方程式系を推定するシステムを開発した [3]．本研究ではこれに超越関数を導入し，さらに複雑な微分方程式系をも推定可能なシステムの構築を試みる．

2 従来の手法

通常の GP では，モデル式中の係数・定数といったパラメータはランダムに生成されてしまうため，必ずしも正しく最適化されるとはいえない．しかし一方でこれらのパラメータはモデルの振舞い (時系列) に対して大きな影響を及ぼす．

[3] では，GP では式の構造 (項) のみを進化させ, 各項の係数は与えられた時系列データから最小二乗法によって求めるという手法が提案されている．この手法では，微分方程式系を多項式によってモデル化している．

この手法は，通常の GP やパラメータを GA によって決定する手法 [1][2] よりも優れていることが確認されている．

3 三角関数の導入

3.1 三角関数を含む微分方程式系

従来の手法により，多項式による微分方程式の推定は高い精度で行うことができる．しかし実社会には，多項式による微分方程式では簡潔に記述することができないシステムも存在する．例として，交流電源を持つ RC 回路，RL 回路，RLC 回路等がある．本研究では，このようなシステムの微分方程式系を推定することを試みる．

3.2 個体の定義

GP 個体は探索の対象となる変数 X_i に対応する連立微分方程式中の 1 本の式の右辺 $f_i(X_1, \ldots, X_n, t)$ とし，式の構造 (項) を表す木構造と，各項に対応する係数を保持するテーブルとからなる．関数ノードとして

$F = \{+, -, \times\}$

を，終端ノードとしては

$T = \{X_1, X_2, \cdots, X_n, t, \sin \omega t, \cos \omega t, 1\}$

を用いる．ただし，ω は与えられた定数である．木構造を構成するために通常用いられる定数はこれには含まれず，式中の各項の係数は最小二乗法により決定される．

3.3 適合度の定義

探索の目的は，目標とする時系列データに近い振舞いをする微分方程式系を求めることである．GP 個体の適合度は，与えられた時系列データとの最小二乗誤差の和

---

* Inference of differential epuation models including transcendental function by genetic programming

† Naoya Sugimoto, Hitoshi Iba
‡ University of Tokyo, 7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113-8656, Japan
§ E-mail : sugimoto@miv.t.u-tokyo.ac.jp

と，方程式中の項数に比例するペナルティからなっており，式 (1) により算出する．

$$fitness = \sum_{k=0}^{T-1} (x'_i(t_0 + k\Delta t) - x_i(t_0 + k\Delta t))^2 + am \quad (1)$$

$$\left(\begin{array}{lll} t_0 & : & \text{開始時刻} \\ \Delta t & : & \text{時間刻みの幅} \\ n & : & \text{系の要素 (変数) の数} \\ T & : & \text{与えられた時系列のデータポイントの数} \end{array} \right)$$

ここで $x_i(t_0 + k\Delta t)$ は与えられた時系列データであり，$x'_i(t_0 + k\Delta t)$ は GP 個体が表す時系列データである．式 (1) の第 2 項は個体が表す式の項数に対するペナルティを表しており，m は式中の項数，a はペナルティの係数である．

与えられた時系列データにより近く，かつ項数のより少ない個体ほど良い適合度が与えられる．

3.4 実験結果

3.4.1 1 変数による微分方程式

式 (2) のパラメータ $(a, b, \omega_1, \theta_1, c, \omega_2, \theta_2, d)$ に様々な値を代入し，そこから作られる時系列データを基に実験を行った．ただし，ω_1, ω_2 は $0, 1, 2, 3$ のいずれかとした．

$$\dot{X} = aX + b\sin(\omega_1 t + \theta_1) + c\cos(\omega_2 t + \theta_2) + d \quad (2)$$

GP パラメータには次の値を用いた．

個体数	:	3000
世代	:	20
交叉率	:	0.8
突然変異率	:	0.2

終端記号の ω を 1 とした．それぞれの場合において，加法定理によって展開された形で推定され，10^{-3} の位まで正確にパラメータを推定することができた．

3.4.2 2 変数による微分方程式系

1 変数の場合と同様に，式 (3) のパラメータ $(a, b, c, d, \omega_1, \theta_1, e, \omega_2, \theta_2, f)$ に様々な値を代入して時系列データを作成し，実験を行った．ただし，ω_1, ω_2 は $0, 1, 2$ のいずれかとした．GP パラメータは 1 変数の場合と同様である。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{X}_1 = & aX_2 \\ \dot{X}_2 = & bX_1 + cX_2 + d\sin(\omega_1 t + \theta_1) + e\cos(\omega_2 t + \theta_2) + f \end{array} \right. \quad (3)$$

終端記号の ω を 1 とした．それぞれの場合において，加法定理によって展開された形で推定され，10^{-3} の位まで正確にパラメータを推定することができた．例として，

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{X}_1 = & X_2 \\ \dot{X}_2 = & -2X_1 - X_2 + 5\sin(2t) \end{array} \right. \quad (4)$$

としたときの適合度の推移を図 1 に示す．このとき，

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{X}_1 = & 1.0000X_2 \\ \dot{X}_2 = & -1.9999X_1 - 1.0001X_2 + 9.9997\sin(t)\cos(t) \end{array} \right. \quad (5)$$

という式を獲得した．

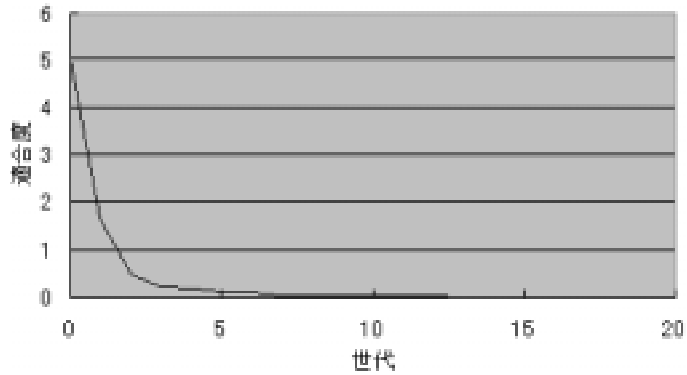

図 1: 適合度の推移

4 考察

係数を最小二乗法で求めることにより，探索空間を式の構造のみに減らすため収束が早く，パラメータを正確に決定できる．実験を行った範囲内では，三角関数を導入してもこの利点を活かすことができた．

RC 回路,RL 回路は 1 変数，RLC 回路は 2 変数の微分方程式系に対応しており，実験の結果から交流電源の周波数が既知であるときには素子の値を 10^{-3} まで推定することができる．

5 おわりに

今回の実験では周波数を既知の値としたが，実際には既知であるとは限らない．今後は超越関数の引数部分にある係数も時系列データから推定し，さらに複雑なシステムの解析を行う予定である．

参考文献

[1] Kang L. Chen Y. Cao, H. and J. Yu. Evolutionary modeling of systems of ordinary differential equations with genetic programming. In *Genetic Programming and Evolvable Machines*, Vol. 1, pp. 309–337, Oct. 2000.

[2] Kang L. Michalewicz Z. Cao, H. and Y. Chen. A two-level evolutionary algorithm for modeling system of ordinary differential equations. In *Genetic Programming 1998: Proceedings of the Third Annual Conference*, pp. 17–22, 1998.

[3] H. Iba and E. Sakamoto. Inference of differential equation models by genetic programming. In *Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO)*, pp. 788–795, 2002.