総頂点間経路長を最小にする完全K分木の深さ同一頂点の代表隣接化

澤田　清[†]
流通科学大学 情報学部 経営情報学科[†]

1．まえがき

企業などの組織の階層構造（ピラミッド組織）は，構成主体（個人や部，課など）を頂点に，上下の主体間関係を辺に対応させると，根付き木であると考えることができる．このとき，各頂点間の経路は組織内の主体間の関係をたどる情報伝達経路に対応している．また，根付き木に対して追加的な隣接化を行う（辺を追加する）ことは，上下の主体間関係以外の追加的関係の形成に相当する [1].

筆者らは，すでに，高さ H の完全 2 分木の，同じ深さの 2 頂点間および同じ深さの全頂点間に追加的隣接化を行った場合に，全頂点間の最短経路の長さの総和（以後，総頂点間経路長と呼ぶ）を最小にする隣接深さを求めた [2]．本研究では，より一般化した完全 K 分木に対して，ある深さの 1 つの頂点と，同じ深さの他のすべての頂点との間に追加的隣接化を行う場合に，総頂点間経路長を最小にする隣接の深さを求めることを考える．これは，完全 K 分木型の構造を持つ組織内で，ある階層の代表者と同じ階層の他の全メンバーとの間で追加的な関係形成を行う場合に，どの層で関係を結べば組織全体の情報伝達が最も効率的になるかという問題に対応している．

2．総頂点間短縮経路長の定式化

ここでは，前述したように，高さ $H(H=1,2,\cdots)$ の完全 K 分木 $(K=2,3,\cdots)$ の，深さ $N(N=1,2,\cdots,H)$ の 1 つの頂点と，同じ深さの他の全頂点を隣接化する．ただし，完全 K 分木は，すべての葉が同じ深さをもち，すべての内部頂点の次数が K であるような K 分木を指す．また，深さは，根からその頂点までの経路の長さを表す．

このとき，総頂点間経路長が最小となる N を求めることを考える．ここでは，追加的な隣接化を行うことにより，隣接化前と比べて総頂点間経路長がどれだけ短縮されたかを定式化する．以後，これを総頂点間短縮経路長と呼び，$S_H(N)$ と表すこととすると，

$$\begin{aligned}
S_H(N) \;=\; & \Big\{M(H-N)\Big\}^2(K^N-1)+\Big\{M(H-N)\Big\}^2(K-1)K^N\sum_{i=1}^{N-1} iK^i \\
& + M(H-N)\Big\{M(N-1)-N\Big\} + M(H-N)(K-1)\sum_{i=1}^{N-1} iK^i \\
& + M(H-N)(K-1)K^N\sum_{i=1}^{N-2} 2i(N-i-1)K^i + (K-1)\sum_{i=1}^{N-2} i(N-i-1)K^i \\
& + K^N(K-1)\sum_{i=1}^{N-3}\sum_{j=1}^{i} j(i-j+1)K^j
\end{aligned} \tag{1}$$

Additional Adjacencies between One Node and the Other Nodes with the Same Depth in a Complete K-ary Tree Minimizing Total Path Length

[†]Kiyoshi Sawada, Department of Information and Management Science, Faculty of Information Science, University of Marketing and Distribution Sciences

と定式化される．ただし，$\sum_{i=1}^{0}\cdot=0$，$\sum_{i=1}^{-1}\cdot=0$，$\sum_{i=1}^{-2}\cdot=0$ と定義する．ここで，$M(h)(h=0,1,2,\cdots)$ は高さ h の完全 K 分木の頂点数を表す．

式 (1) に，$M(h)=\dfrac{K^{h+1}-1}{K-1}$ を代入して整理すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}S_H(N) &= \frac{1}{2(K-1)^3}\Bigg[\Big\{-2K^{-2N+3}+2K^{-2N+2}+4K^{-N+3}-2K^{-N+2}+(2N-2)K^3-2NK^2\Big\}K^{2H}\\&\quad+\Big\{-4K^{N+2}+(-2N+2)K^{-N+3}+4NK^{-N+2}+(-2N-2)K^{-N+1}+(6N-2)K^3\\&\quad+(-8N+4)K^2+(2N+2)K\Big\}K^H+(N^2-N)K^{N+3}+(-2N^2+2N-2)K^{N+2}\\&\quad+(N^2-N+2)K^{N+1}+2NK^3+(-2N+2)K^2+(-2N-2)K+2N\Bigg]\,. \qquad (2)\end{aligned}$$

以下では，式 (2) の $S_H(N)$ を最大にする N を求める．

３．最適隣接深さ

$S_H(N)$ の N に関する差分を $\Delta S_H(N)\equiv S_H(N+1)-S_H(N)$ とおき，$\Delta S_H(N)$ の K^H を実数 x とおくと，次の２次関数 $T_N(x)$ が得られる．

$$\begin{aligned}T_N(x) &= \frac{1}{2(K-1)^3}\Bigg[\Big\{2K^{-2N+3}-2K^{-2N+2}-2K^{-2N+1}+2K^{-2N}-4K^{-N+3}+6K^{-N+2}-2K^{-N+1}\\&\quad+2K^3-2K^2\Big\}x^2+\Big\{-4K^{N+3}+4K^{N+2}+(2N-2)K^{-N+3}-6NK^{-N+2}+(6N+6)K^{-N+1}\\&\quad+(-2N-4)K^{-N}+6K^3-8K^2+2K\Big\}x+(N^2+N)K^{N+4}+(-3N^2-N-2)K^{N+3}\\&\quad+(3N^2-N+4)K^{N+2}+(-N^2+N-2)K^{N+1}+2K^3-2K^2-2K+2\Bigg]\,. \qquad (3)\end{aligned}$$

このとき，$T_N(x)$ の x^2 の係数が正，すなわち $T_N(x)$ は下に凸であり，

$$T_N(K^{N+1}) > 0\,, \qquad (4)$$

$$T'_N(K^{N+1}) > 0 \qquad (5)$$

であることから，$x\geq K^{N+1}$ のとき $T_N(x)>0$ となることがわかる．したがって，$H\geq N+1$，すなわち，すべての $H(H=2,3,\cdots)$，$N(N=1,2,\cdots,H-1)$ に対して，$\Delta S_H(N)>0$ が成り立つ．

以上より，完全 K 分木 $(K=2,3,\cdots)$ の総頂点間短縮経路長を最大にする隣接深さは，$N^*=H$ となる．

参考文献

[1] 宇野 斉, “組織内コミュニケーション・パスの追加効果について”, 組織科学, Vol.27, No.2, pp.73–86, 1993.

[2] 澤田 清, 宇野 斉, “完全２分木型組織構造への関係追加モデル”, 日本応用数理学会論文誌, Vol.10, No.4, pp.335–346, 2000.