単純型付き項書換え系における停止性の自動証明

青 戸 等 人[†] 山 田 俊 行[††]

単純型付き項書換え系は，山田（RTA’01，2001）によって提案された，高階関数を利用できる項書換え系である．通常の高階項書換え系と異なり，この項書換え系は束縛変数を組み込んでいない．本論文では，単純型付き項書換え系の停止性証明法を提案する．まず，項書換え系の変換法を導入し，単純型付き項書換え系の停止性が，変換により得られる第 1 階項書換え系の停止性から導かれることを示す．次に，変換で得られた第 1 階項書換え系の停止性証明を容易にするラベリングを提案する．山田（RTA’01，2001）が与えた意味論的な停止性証明法とは対照的に，本論文で提案する停止性証明法は構文論的なため，停止性証明の自動化が容易である．

Proving Termination of Simply Typed Term Rewriting Systems Automatically

Takahito Aoto[†] and Toshiyuki Yamada[††]

Simply typed term rewriting proposed by Yamada (RTA’01, 2001) is a framework of term rewriting allowing higher-order functions. In contrast to the usual higher-order term rewriting frameworks, simply typed term rewriting dispenses with bound variables. In this paper, we present a method to prove termination of simply typed term rewriting systems. We first give a transformation on term rewriting systems and show that termination of simply typed term rewriting systems is induced from that of the first-order term rewriting systems obtained by this transformation. We next introduce a labelling technique which facilitates termination proof of the first-order term rewriting systems obtained by our transformation. Contrary to the semantic method proposed by Yamada (RTA’01, 2001), our technique is based on a syntactic approach; and thus one can easily automate termination proof of simply typed term rewriting systems.

1. はじめに

項書換え系は，規則に従った式変形を計算原理とする計算モデルである．パターンマッチを用いる式変形は，関数型プログラミングや定理自動証明などに密接に関係しており，項書換え系の研究は，それらに理論的基礎を与える役割を担う．

項書換え系の各種の枠組みの中では，最も基本的な第 1 階項書換え系の研究が比較的進んでいる．しかし，第 1 階項では，関数型プログラミング言語で一般的な高階関数や定理証明系で利用される束縛変数を直接には表現できない．そのため，これらの対象を表現できるように，第 1 階項書換え系を拡張した高階項書換え系の枠組み[5),7),11)]が提案・研究されている．高階項書換え系は，第 1 階項書換え系にはない以下の 2 つの特徴を持つ．

高階関数の利用　次の高階項書換え系は，関数型プログラミングにおいてよく知られる，リストの各要素に関数を適用する関数 map を定義している．

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathsf{map}\ (F, [\,]) & \to & [\,] \\ \mathsf{map}\ (F, x : xs) & \to & F\,(x) : \mathsf{map}\ (F, xs) \end{array}\right.$$

変数 F が 2 番目の書換え規則の右辺で関数として使われているため，この項書換え系は第 1 階項書換え系にはなっていない．第 1 階項書換え系では，このように関数を引数とする高階関数は扱えない．

束縛変数の利用　論理式の変形を行う次の高階項書換え系において，λ は項変数 x を束縛する機能を持つ．

$$\left\{ \forall(\lambda x.(P \wedge Q(x))) \quad \to \quad P \wedge \forall(\lambda x.Q(x)) \right.$$

このような，束縛変数を扱う仕組みは，第 1 階項書換え系にはない．

† 群馬大学工学部情報工学科
Department of Computer Science, Faculty of Engineering, Gunma University
†† 三重大学工学部情報工学科
Department of Information Engineering, Faculty of Engineering, Mie University

これら 2 つの特徴を兼ね備え，高い表現力を持つ高階項書換え系の理論的考察を進めることは，応用技術の可能性を広げるうえで重要である．一方，第 1 階項書換え系に比べて，高階項書換え系は取扱いが困難になるうえ，理論的にも簡明さを保てないことが多い．

単純型付き項書換え系は，山田[14] によって提案された高階項書換え系である．この体系は，高階項書換え系の 2 つの特徴のうち，高階関数の利用に焦点を絞っているため，表現力は劣るものの，簡明で取扱いが容易である．単純型付き項書換え系の性質を解明すれば，高階関数の利用という側面から，一般の高階項書換え系についての理解が深まると期待できる．単純型付き項書換え系について，山田は論文 14) において，直交系の合流性について並行移動補題を用いた見通し良い証明を示すとともに，意味論的な手法による停止性証明法を与えた．

本論文では，単純型付き項書換え系の新たな停止性証明法を提案する．具体的には，項書換え系の変換法を導入し，単純型付き項書換え系の停止性が，変換により得られる第 1 階項書換え系の停止性から導かれることを示す．この結果，これまでの研究で提案されている経路順序[3),6)] や依存対[1)] などの第 1 階項書換え系の停止性証明法を活用して，単純型付き項書換え系の停止性が証明できるようになる．また，変換で得られた第 1 階項書換え系の停止性証明を容易にするラベリングを提案する．このラベリングは，意味ラベリング[15)] の一種になっている．論文 14) における意味論的な停止性証明法とは対照的に，本論文で提案する停止性証明法は構文論的なため，停止性証明の自動化が容易である．

次章以降の構成は次のとおりである．2 章で，単純型付き項書換え系についての基本的な定義を紹介する．3 章で，単純型付き項書換え系から第 1 階項書換え系への基本変換を定義し，これを単純型付き項書換え系の停止性証明に応用する．4 章では，第 1 階項書換え系に対する首位ラベリングを定義し，基本変換と首位ラベリングを併用した単純型付き項書換え系の停止性証明法の有効性を，具体例を通じて確認する．最後に，5 章で関連研究との比較を行う．

2. 準　　備

本章では単純型付き項書換え系についての基本的な定義を行う．項書換え系一般については文献 2)，4)，8) などの解説を参照していただきたい．

単純型（simple type）の集合 ST を帰納的に定義する．(1) $\mathrm{o} \in \mathrm{ST}$ (o は唯一の基本型)；(2) $n \geq 1$, $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathrm{ST} \Longrightarrow \tau_1 \times \cdots \times \tau_n \to \tau_0 \in \mathrm{ST}$．単純型 τ を持つ定数集合と変数集合を C^τ と V^τ で表す．各 V^τ は可算無限集合とする．また，各変数や各定数が唯一の型を持つように，各 C^τ，V^τ は互いに排反とする．定数と変数の全体集合を，$C = \bigcup_{\tau \in \mathrm{ST}} C^\tau$，$V = \bigcup_{\tau \in \mathrm{ST}} V^\tau$ で定義する．次に，C，V 上の単純型 τ の単純型付き項（simply typed term）の集合 $\mathrm{T_{ST}}(C,V)^\tau$ を帰納的に定義する．(1) $C^\tau \cup V^\tau \subseteq \mathrm{T_{ST}}(C,V)^\tau$；(2) $s \in \mathrm{T_{ST}}(C,V)^{\tau_1 \times \cdots \times \tau_n \to \tau}$，$\forall i \in \{1,\ldots,n\}\ t_i \in \mathrm{T_{ST}}(C,V)^{\tau_i} \Longrightarrow (s\, t_1 \cdots t_n) \in \mathrm{T_{ST}}(C,V)^\tau$．単純型付き項 s が型 τ を持つとは $s \in \mathrm{T_{ST}}(C,V)^\tau$ であることをいい，型を明示する場合 s^τ と書く．定義より，各項は唯一の型を持つ．混乱をきたさない場合，単純型付き項の最外の括弧は省略する．

単純型付き項の頭部記号（head symbol）を再帰的に定義する．(1) $\mathrm{head}(t) = t$ $(t \in C \cup V)$；(2) $\mathrm{head}((s\, t_1 \cdots t_n)) = \mathrm{head}(s)$．単純型付き項 t に現れる変数の集合を $\mathrm{V}(t)$ と書く．

代入とは，写像 $\sigma : V \to \mathrm{T_{ST}}(C,V)$ のうち，次の条件を満たすものをいう．(1) $\mathrm{Dom}(\sigma) = \{x \mid \sigma(x) \neq x\}$ が有限；(2) 各 $x \in \mathrm{Dom}(\sigma)$ について x と $\sigma(x)$ が同じ型を持つ．代入 σ の定義域を $\mathrm{T_{ST}}(C,V)$ へと広げた準同型拡張も σ で表す．

単純型付き項の対 $\langle l, r \rangle$ で以下の条件を満たすものを単純型付き書換え規則という．(1) l と r は同じ型を持つ；(2) $\mathrm{head}(l) \in C$；(3) $\mathrm{V}(r) \subseteq \mathrm{V}(l)$．単純型付き書換え規則 $\langle l, r \rangle$ は，$l \to r$ と書くことが多い．

C を定数集合，R を単純型付き書換え規則集合とするとき，対 $\langle C, R \rangle$ を単純型付き項書換え系（simply typed term rewriting system）と呼ぶ．

単純型付き項書換え系 $\mathcal{R} = \langle C, R \rangle$ 上の簡約関係 $\to_\mathcal{R}$ とは，次の 2 つの条件を満たす最小の関係である．(1) $l \to r \in R \Longrightarrow \forall\sigma\ \sigma(l) \to_\mathcal{R} \sigma(r)$；(2) $s \to_\mathcal{R} t \Longrightarrow \forall s_0, \ldots, s_n\ (s_0 \cdots s \cdots s_n) \to_\mathcal{R} (s_0 \cdots t \cdots s_n)$．

$\mathcal{R}$ が停止性を持つとは，簡約関係 $\to_\mathcal{R}$ による項の無限列 $s_0 \to_\mathcal{R} s_1 \to_\mathcal{R} \cdots$ が存在しないことである．

例 1（単純型付き項書換え） C を定数 $\mathsf{0}^\mathrm{o}$，$\mathsf{s}^{\mathrm{o}\to\mathrm{o}}$，$[\,]^\mathrm{o}$，$:^{\mathrm{o}\times\mathrm{o}\to\mathrm{o}}$，$\mathsf{map}^{(\mathrm{o}\to\mathrm{o})\times\mathrm{o}\to\mathrm{o}}$，$\circ^{(\mathrm{o}\to\mathrm{o})\times(\mathrm{o}\to\mathrm{o})\to(\mathrm{o}\to\mathrm{o})}$，$\mathsf{twice}^{(\mathrm{o}\to\mathrm{o})\to(\mathrm{o}\to\mathrm{o})}$ からなる集合とし，R を集合

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathsf{map}\ F\ [\,] & \to & [\,] \\ \mathsf{map}\ F\ (x : xs) & \to & (F\ x) : (\mathsf{map}\ F\ xs) \\ (F \circ G)\ x & \to & F\ (G\ x) \\ \mathsf{twice}\ F & \to & F \circ F \end{array}\right.$$

とするとき，$\mathcal{R} = \langle C, R \rangle$ は単純型付き項書換え系で

記号 f	単純型 τ	項数 $\mathrm{ar}(f)$ $\mathrm{ar}(\tau)$
0	o	0
s	$\mathrm{o} \to \mathrm{o}$	1
:	$\mathrm{o} \times \mathrm{o} \to \mathrm{o}$	2
map	$(\mathrm{o} \to \mathrm{o}) \times \mathrm{o} \to \mathrm{o}$	$\langle 100 \rangle$
twice	$(\mathrm{o} \to \mathrm{o}) \to (\mathrm{o} \to \mathrm{o})$	$\langle 11 \rangle$
$\circ$	$(\mathrm{o} \to \mathrm{o}) \times (\mathrm{o} \to \mathrm{o}) \to (\mathrm{o} \to \mathrm{o})$	$\langle 111 \rangle$

図 1 単純型に対応する項数
Fig. 1 Arities corresponding to simple types.

ある．$\mathcal{R}$ 上の簡約の例を示す．

$$\begin{array}{ll} & \mathsf{map}\ (\mathsf{twice}\ \mathsf{s})\ (\mathsf{0} : [\,]) \\ \to_{\mathcal{R}} & \mathsf{map}\ (\mathsf{s} \circ \mathsf{s})\ (\mathsf{0} : [\,]) \\ \to_{\mathcal{R}} & ((\mathsf{s} \circ \mathsf{s})\ \mathsf{0}) : (\mathsf{map}\ (\mathsf{s} \circ \mathsf{s})\ [\,]) \\ \to_{\mathcal{R}} & (\mathsf{s}\ (\mathsf{s}\ \mathsf{0})) : (\mathsf{map}\ (\mathsf{s} \circ \mathsf{s})\ [\,]) \\ \to_{\mathcal{R}} & (\mathsf{s}\ (\mathsf{s}\ \mathsf{0})) : [\,] \end{array}$$

3. 第 1 階項書換え系への基本変換

本章では，単純型付き項書換え系から第 1 階項書換え系への基本変換を定義する．そして，この変換を用いた単純型付き項書換え系の停止性証明法を与える．

まず，単純型を項数の拡張ととらえる記法を導入する．

定義 2（項数） 項数（arity）の集合 Ar を帰納的に定義する．(1) $\mathbb{N} \subseteq \mathrm{Ar}$；(2) $n \geq 1, a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{Ar} \Longrightarrow \langle a_1 \cdots a_n\, a_0 \rangle \in \mathrm{Ar}$．次に，単純型や単純型付き項に項数を対応させる関数 ar を再帰的に定義する．

(1) $\mathrm{ar}(\mathrm{o}) = 0$

(2) $\mathrm{ar}(\tau_1 \times \cdots \times \tau_n \to \tau_0)$
$$= \begin{cases} n & (\tau_0 = \tau_1 = \cdots = \tau_n = \mathrm{o}) \\ \langle \mathrm{ar}(\tau_1) \cdots \mathrm{ar}(\tau_n)\, \mathrm{ar}(\tau_0) \rangle & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

(3) $\mathrm{ar}(t^\tau) = \mathrm{ar}(\tau)$

項数により単純型が簡潔に表現できる．単純型と項数との対応の例を，**図 1** に示す．以後，混乱をきたさない場合，項数の最外の括弧 $\langle\ \rangle$ は省略する．

定義 3（第 1 階項書換え系への基本変換） 単純型付きの項や項書換え系から第 1 階の項や項書換え系への基本変換 Θ を定義する．

(1) $\Theta(t) = t \quad (t \in C \cup V)$

(2) $\Theta((s\, t_1 \cdots t_n))$
$= @_{\mathrm{ar}(s)}(\Theta(s), \Theta(t_1), \ldots, \Theta(t_n))$

(3) $\Theta(\langle C, R \rangle) = \langle \Theta(C), \Theta(R) \rangle$，ただし

$$\Theta(C) = C \cup \{\, @_a \mid a \in \mathrm{Ar} \,\}$$
$$\Theta(R) = \{\, \Theta(l) \to \Theta(r) \mid l \to r \in R \,\}$$

例 4（第 1 階項書換え系への基本変換） $\mathcal{R}$ を例 1 の単純型付き項書換え系とする．このとき，第 1 階項書換え系 $\Theta(\mathcal{R})$ は次の書換え規則集合を持つ．

$$\begin{cases} @_{100}(\mathsf{map}, F, [\,]) \quad \to \quad [\,] \\ @_{100}(\mathsf{map}, F, @_2(\,:\,, x, xs)) \\ \quad \to \quad @_2(\,:\,, @_1(F, x), @_{100}(\mathsf{map}, F, xs)) \\ @_1(@_{111}(\circ, F, G), x) \quad \to \quad @_1(F, @_1(G, x)) \\ @_{11}(\mathsf{twice}, F) \quad \to \quad @_{111}(\circ, F, F) \end{cases}$$

定理 5（基本変換を用いた停止性証明） $\mathcal{R}$ を単純型付き項書換え系とする．このとき，$\Theta(\mathcal{R})$ が停止性を持つならば $\mathcal{R}$ は停止性を持つ．

（証明）
単純型付き項書換え系上の簡約が，基本変換で得られる第 1 階項書換え系上で模倣できること，つまり，$s \to_{\mathcal{R}} t \Longrightarrow \Theta(s) \to_{\Theta(\mathcal{R})} \Theta(t)$ を示せばよい． □

基本変換を使った単純型付き項書換え系の停止性証明の例を以下に示す．

例 6（基本変換を用いた停止性証明 I） 例 4 の第 1 階項書換え系の停止性は，次の条件を満たす関数記号集合上の優位順序（precedence） $>$ に基づく辞書式経路順序[6)]（lexicographic path order）を用いて証明できる．$@_{100} > @_2$，$@_{100} > @_1$，$@_{11} > @_{111}$，$\mathsf{twice} > \circ$．したがって，定理 5 により，例 1 の単純型付き項書換え系は停止性を持つ．

例 7（基本変換を用いた停止性証明 II） 以下は，条件を満たす部分リストを計算する関数 filter を単純型付き項書換え系で記述したものである．$\mathcal{R} = \langle C, R \rangle$，$C$ を $\mathsf{0}^{\mathrm{o}}$，$\mathsf{s}^{\mathrm{o}\to\mathrm{o}}$，$\mathsf{true}^{\mathrm{o}}$，$\mathsf{false}^{\mathrm{o}}$，$[\,]^{\mathrm{o}}$，$:^{\mathrm{o}\times\mathrm{o}\to\mathrm{o}}$，$\mathsf{nonzero}^{\mathrm{o}\to\mathrm{o}}$，$\mathsf{if}^{\mathrm{o}\times\mathrm{o}\times\mathrm{o}\to\mathrm{o}}$，$\mathsf{filter}^{(\mathrm{o}\to\mathrm{o})\times\mathrm{o}\to\mathrm{o}}$ からなる集合とし，R を次の書換え規則集合とする．

$$\begin{cases} \mathsf{nonzero}\ 0 & \to\ \ \mathsf{false} \\ \mathsf{nonzero}\ (\mathsf{s}\ x) & \to\ \ \mathsf{true} \\ \mathsf{if\ true}\ x\ y & \to\ \ x \\ \mathsf{if\ false}\ x\ y & \to\ \ y \\ \mathsf{filter}\ F\ [\,] & \to\ \ [\,] \\ \mathsf{filter}\ F\ (x : xs) & \\ \ \to\ \mathsf{if}\ (F\ x)\ (x : (\mathsf{filter}\ F\ xs))\ (\mathsf{filter}\ F\ xs) & \end{cases}$$

基本変換で得られる第 1 階項書換え系 $\Theta(\mathcal{R})$ の書換え規則集合は

$$\begin{cases} @_1(\mathsf{nonzero}, 0) & \to\ \ \mathsf{false} \\ @_1(\mathsf{nonzero}, @_1(\mathsf{s}, x)) & \to\ \ \mathsf{true} \\ @_3(\mathsf{if}, \mathsf{true}, x, y) & \to\ \ x \\ @_3(\mathsf{if}, \mathsf{false}, x, y) & \to\ \ y \\ @_{100}(\mathsf{filter}, F, [\,]) & \to\ \ [\,] \\ @_{100}(\mathsf{filter}, F, @_2(\,:\,, x, xs)) & \\ \quad \to\ \ @_3(\mathsf{if}, @_1(F, x), & \\ \qquad\quad @_2(\,:\,, x, @_{100}(\mathsf{filter}, F, xs)), & \\ \qquad\quad @_{100}(\mathsf{filter}, F, xs)) & \end{cases}$$

となる．$\Theta(\mathcal{R})$ の停止性は，次の条件を満たす優位順序に基づく辞書式経路順序により証明できる．nonzero $>$ false，nonzero $>$ true，$@_{100} > @_3$，filter $>$ if，$@_{100} > @_1$，$@_{100} > @_2$．

定理 5 を使って単純型付き項書換え系の停止性を示す場合，辞書式経路順序などの単純化順序[12] に限らず，1 階項書換え系のどのような停止性証明法も利用できる．

例 8（基本変換を用いた停止性証明 III） 単純型付き項書換え系 $\mathcal{R}$ が定数集合 $\{\ 0^{\mathrm{o}},\ 1^{\mathrm{o}},\ \mathsf{f}^{\mathrm{o}\times\mathrm{o}\times\mathrm{o}\to\mathrm{o}}\ \}$ と書換え規則集合 $\{\ \mathsf{f}\ 0\ 1\ x\ \to\ \mathsf{f}\ x\ x\ x\ \}$ からなるとき，$\Theta(\mathcal{R})$ は単純停止性を持たない．よって，辞書式経路順序などの単純化順序ではその停止性を示せない．しかし，項の構造に関する帰納法などにより $\Theta(\mathcal{R})$ の停止性を示せ，$\mathcal{R}$ の停止性が導かれる．

定理 5 の逆は一般には成立しない．つまり，$\mathcal{R}$ が停止性を持ち，$\Theta(\mathcal{R})$ は停止性を持たない例がある．

例 9 C を 0^{o}, 1^{o}, $\mathsf{f}^{\mathrm{o}\times\mathrm{o}\times\mathrm{o}\to\mathrm{o}}$, $\mathsf{g}^{(\mathrm{o}\to\mathrm{o})\times(\mathrm{o}\to\mathrm{o})\to(\mathrm{o}\to\mathrm{o})}$ からなる定数集合とし，R を次の書換え規則集合とする．

$$\begin{cases} \mathsf{f}\ 0\ 1\ x & \to\ \ \mathsf{f}\ x\ x\ x \\ \mathsf{g}\ F\ G & \to\ \ F \\ \mathsf{g}\ F\ G & \to\ \ G \end{cases}$$

$\mathcal{R} = \langle C, R\rangle$ が停止性を持つことは，意味論的手法[14] で証明することができる．一方，$\Theta(\mathcal{R})$ の書換え規則集合は

$$\begin{cases} @_3(\mathsf{f}, 0, 1, x) & \to\ \ @_3(\mathsf{f}, x, x, x) \\ @_{111}(\mathsf{g}, F, G) & \to\ \ F \\ @_{111}(\mathsf{g}, F, G) & \to\ \ G \end{cases}$$

となり，$\Theta(\mathcal{R})$ は停止性を持たない．なぜなら，$s = @_{111}(\mathsf{g}, 0, 1)$ としたとき，$@_3(\mathsf{f}, 0, 1, s) \to_{\Theta(\mathcal{R})} @_3(\mathsf{f}, s, s, s) \to_{\Theta(\mathcal{R})} @_3(\mathsf{f}, 0, s, s) \to_{\Theta(\mathcal{R})} @_3(\mathsf{f}, 0, 1, s) \to_{\Theta(\mathcal{R})} \cdots$ という無限簡約列が存在するからである．

4. 首位ラベリングを用いた停止性証明

単純型付き項書換え系の停止性証明法として，基本変換で得られる第 1 階項書換え系に辞書式経路順序を適用する場合，比較的簡単な単純型付き項書換え系で停止性証明が失敗してしまう例がある．

例 10 自然数を 2 倍する関数 double を記述した，定数集合 $\{\ 0^{\mathrm{o}}, \mathsf{s}^{\mathrm{o}\to\mathrm{o}}, +^{\mathrm{o}\times\mathrm{o}\to\mathrm{o}}, \mathsf{double}^{\mathrm{o}\to\mathrm{o}}\ \}$ と次の書換え規則集合からなる単純型付き項書換え系 $\mathcal{R}$ について考える．

$$\begin{cases} +\ 0\ y & \to\ \ y \\ +\ (\mathsf{s}\ x)\ y & \to\ \ \mathsf{s}\ (+\ x\ y) \\ \mathsf{double}\ x & \to\ \ +\ x\ x \end{cases}$$

$\Theta(\mathcal{R})$ の書換え規則集合は

$$\begin{cases} @_2(+, 0, y) & \to\ \ y \\ @_2(+, @_1(\mathsf{s}, x), y) & \to\ \ @_1(\mathsf{s}, @_2(+, x, y)) \\ @_1(\mathsf{double}, x) & \to\ \ @_2(+, x, x) \end{cases}$$

となる．この第 1 階項書換え系は辞書式経路順序では順序付けできない．

一方，関数 double を第 1 階項書換え系で直接記述すると

$$\begin{cases} +\,(0, y) & \to\ \ y \\ +\,(\mathsf{s}\,(x), y) & \to\ \ \mathsf{s}\,(+\,(x, y)) \\ \mathsf{double}\ (x) & \to\ \ +\,(x, x) \end{cases}$$

となり，double $>$ $+$ $>$ s という優位順序に基づく辞書式経路順序で停止性が示せる．一方，$\Theta(\mathcal{R})$ で同様の順序付けを試みると，$@_1 > @_2 > @_1$ となり，$>$ が整礎順序にならない．

しかし，$\Theta(\mathcal{R})$ の書換え規則の左辺を注意深く見ると，$@_1(\mathsf{s}, \ldots)$ の形の項には最外位置で書換え規則を適用できないことが分かる．したがって，書換え規則が適用される可能性のある @ 記号と書換え規則を適用できない @ 記号とを区別すれば，$@'_1 > @_2 > @''_1$ のように順序付けが可能になると推測される．

以上の着想に基づき，本章では，基本変換で得られた第 1 階項書換え系の停止性証明法として，首位ラベリングと呼ぶ第 1 階項書換え系の変換を導入する．首位ラベリングは意味ラベリング[15]（semantic labelling）の一種になっている．本章の証明法を使えば，より広

いクラスの単純型付き項書換え系について，停止性の証明が容易になる．

定義 11（首位記号） 第 1 階項 t の首位記号（primary symbol）$\mathrm{pri}(t)$ と，第 1 階項書換え系 $\mathcal{R} = \langle \Sigma, R \rangle$ の首位記号集合 $\mathrm{Pri}(\mathcal{R})$ を定義する．

(1) $\mathrm{pri}(t) = t \quad (t \in \Sigma_0 \cup V)$☆

(2) $\mathrm{pri}(f(t_1, \ldots, t_n)) = \mathrm{pri}(t_1)$

(3) $\mathrm{Pri}(\mathcal{R}) = \{ \mathrm{pri}(l) \in \Sigma \mid l \to r \in R \}$

例 12（首位記号） 関数記号集合 $\Sigma = \{ [\,], :, \mathsf{map}, @_1, @_2, @_{100} \}$ と以下の書換え規則集合 R からなる第 1 階項書換え系 $\mathcal{R}$ を考える．

$$\begin{cases} @_{100}(\mathsf{map}, F, [\,]) \quad \to \quad [\,] \\ @_{100}(\mathsf{map}, F, @_2(:, x, xs)) \\ \quad \to \quad @_2(:, @_1(F, x), @_{100}(\mathsf{map}, F, xs)) \end{cases}$$

このとき，$\mathrm{Pri}(\mathcal{R}) = \{\mathsf{map}\}$．

首位ラベリングでは，項の首位記号が書換え系の首位記号であることを表す p（primary）と，そうでないことを表す n（non-primary）の 2 つのラベルを使う．

定義 13（項の首位ラベリング） $\langle \Sigma, R \rangle$ を第 1 階項書換え系とする．首位ラベル付き関数記号集合 $\mathrm{Lab}(\Sigma)$ と，変数へのラベル割当て $\alpha : V \to \{\mathrm{p}, \mathrm{n}\}$ に対する項の首位ラベリング関数 $\mathrm{lab}_\alpha : \mathrm{T}(\Sigma, V) \to \mathrm{T}(\mathrm{Lab}(\Sigma), V)$ を定義する．

(1) $\mathrm{Lab}(\Sigma) = \Sigma_0 \cup \{ f_\ell \mid f \in \Sigma \backslash \Sigma_0,\ \ell \in \{\mathrm{p}, \mathrm{n}\} \}$

(2) $\mathrm{lab}_\alpha(t) = t \quad (t \in \Sigma_0 \cup V)$

(3) $\mathrm{lab}_\alpha(f(t_1, \ldots, t_n))$
$\quad = f_\ell\,(\mathrm{lab}_\alpha(t_1), \ldots, \mathrm{lab}_\alpha(t_n))$

ここで，関数記号 f に対する首位ラベル ℓ は

$$\ell = \begin{cases} \alpha(\mathrm{pri}(t_1)) & (\mathrm{pri}(t_1) \in V) \\ \mathrm{p} & (\mathrm{pri}(t_1) \in \mathrm{Pri}(\mathcal{R})) \\ \mathrm{n} & (\mathrm{pri}(t_1) \in \Sigma \setminus \mathrm{Pri}(\mathcal{R})) \end{cases}$$

と定める．

例 14（項の首位ラベリング） $\langle \Sigma, R \rangle$ を例 12 の第 1 階項書換え系とする．このとき，$\mathrm{Lab}(\Sigma) = \{ [\,], :, \mathsf{map}, @_{1\mathrm{p}}, @_{1\mathrm{n}}, @_{2\mathrm{p}}, @_{2\mathrm{n}}, @_{100\mathrm{p}}, @_{100\mathrm{n}} \}$ となる．また，任意のラベル割当て α について $\mathrm{lab}_\alpha(@_2(\mathsf{map}, F, [\,])) = @_{2\mathrm{p}}(\mathsf{map}, F, [\,])$ が成立する．ラベル割当て α が $\alpha(F) = \mathrm{n}$ を満たすときには $\mathrm{lab}_\alpha(@_1(F, x)) = @_{1\mathrm{n}}(F, x)$ となる．

定義 15（項書換え系の首位ラベリング） 第 1 階項書換え系 $\mathcal{R} = \langle \Sigma, R \rangle$ の首位ラベリング LabDec を

$$\mathrm{LabDec}(\mathcal{R}) = \langle \mathrm{Lab}(\Sigma),\ \mathrm{Lab}(R) \cup \mathrm{Dec}(R) \rangle$$

と定義する．ここで，

$$\begin{aligned} &\mathrm{Lab}(R) \\ &= \{ \mathrm{lab}_\alpha(l) \to \mathrm{lab}_\alpha(r) \\ &\qquad \mid l \to r \in R,\ \alpha : V \to \{\mathrm{p}, \mathrm{n}\} \} \\ &\mathrm{Dec}(R) \\ &= \{ f_{\mathrm{p}}(x_1, \ldots, x_n) \to f_{\mathrm{n}}(x_1, \ldots, x_n) \\ &\qquad \mid f \in \Sigma_n,\ n \geq 1,\ f \text{ は } R \text{ に現れる} \} \end{aligned}$$

ただし，$x_1, \ldots, x_n$ は相異なる変数とする．

例 16（項書換え系の首位ラベリング） 第 1 階項書換え系として例 12 の $\langle \Sigma, R \rangle$ を考える．$\mathrm{Lab}(R)$ は

$$\begin{cases} @_{100\mathrm{p}}(\mathsf{map}, F, [\,]) \quad \to \quad [\,] \\ @_{100\mathrm{p}}(\mathsf{map}, F, @_{2\mathrm{n}}(:, x, xs)) \\ \quad \to \quad @_{2\mathrm{n}}(:, @_{1\mathrm{p}}(F, x), @_{100\mathrm{p}}(\mathsf{map}, F, xs)) \\ @_{100\mathrm{p}}(\mathsf{map}, F, @_{2\mathrm{n}}(:, x, xs)) \\ \quad \to \quad @_{2\mathrm{n}}(:, @_{1\mathrm{n}}(F, x), @_{100\mathrm{p}}(\mathsf{map}, F, xs)) \end{cases}$$

となり，$\mathrm{Dec}(R)$ は

$$\begin{cases} @_{1\mathrm{p}}(F, x) & \to \quad @_{1\mathrm{n}}(F, x) \\ @_{2\mathrm{p}}(H, x, y) & \to \quad @_{2\mathrm{n}}(H, x, y) \\ @_{100\mathrm{p}}(G, F, x) & \to \quad @_{100\mathrm{n}}(G, F, x) \end{cases}$$

となる．

定理 17（首位ラベリングによる停止性証明） $\mathcal{R} = \langle \Sigma, R \rangle$ を第 1 階項書換え系とし，書換え規則の各左辺 l が $\mathrm{pri}(l) \in \Sigma$ を満たすものとする．このとき，$\mathrm{LabDec}(\mathcal{R})$ が停止性を持つならば $\mathcal{R}$ は停止性を持つ．

(証明)

準モデルのもとでの意味ラベリング☆☆ を用いる．

まず，$\mathrm{p} > \mathrm{n}$ なる整礎半順序集合 $\mathcal{M} = \langle \{\mathrm{p}, \mathrm{n}\}, \geq \rangle$ 上に演算を定義する．$c \in \Sigma_0$ に対しては

$$c_{\mathcal{M}} = \begin{cases} \mathrm{p} & (c \in \mathrm{Pri}(\mathcal{R})) \\ \mathrm{n} & (c \notin \mathrm{Pri}(\mathcal{R})) \end{cases}$$

とし，$f \in \Sigma \setminus \Sigma_0$ に対しては $f_{\mathcal{M}}$ を第 1 要素への射影とする．演算の定義より $\mathcal{M}$ は弱単調な Σ 代数となる．

次に，$\mathcal{M}$ が $\mathcal{R}$ の準モデルであることを証明するために，任意の書換え規則 $l \to r \in R$ と，任意の割当て $\alpha : V \to \{\mathrm{p}, \mathrm{n}\}$ に対して，$\alpha(l) \geq \alpha(r)$ を示す．これは，条件 $\mathrm{pri}(l) \in \Sigma$ より $\mathrm{pri}(l) \in \mathrm{Pri}(\mathcal{R})$ が成立し，$\alpha(l) = \mathrm{p}$ となることから導かれる．

最後に，$f \in \Sigma_n$ $(n \geq 1)$ に対するラベル集合 S_f

☆ $\Sigma_n = \{ f \in \Sigma \mid f \text{ の項数は } n \}$

☆☆ 論文 15) 定理 8

を整礎半順序集合 $\mathcal{M}$ とし，ラベリング関数 π_f を，第 1 要素への射影と定める．π_f は弱単調関数である．このとき，意味ラベリングで得られる第 1 階項書換え系が $\mathrm{LabDec}(\mathcal{R})$ と一致する．□

系 18 （首位ラベリングを用いた停止性証明 I） $\mathcal{R} = \langle C, R\rangle$ を単純型付き項書換え系とする．このとき，$\mathrm{LabDec}(\Theta(\mathcal{R}))$ が停止性を持つならば $\mathcal{R}$ は停止性を持つ．

（証明）

定理 5 と定理 17 を用いる．単純型付き書換え規則の定義より，$\mathcal{R}$ の書換え規則の各左辺 l について $\mathrm{head}(l) \in C$ が成り立つ．したがって，$\Theta(\mathcal{R})$ は定理 17 の条件を満たす．□

読者は，$\mathrm{Dec}(\Theta(R))$ の必要性に疑問を持つかもしれない．$\mathrm{Dec}(\Theta(R))$ を考慮しない場合には $\mathcal{R}$ の停止性が保証されないことを，次の例で示す．

例 19 （$\mathrm{Dec}(\Theta(R))$ の必要性） 定数集合 $\{\ \mathsf{s}^{o\to o}, \mathsf{f}^{o\to o}, \mathsf{g}^{o\to o}\ \}$ と次の書換え規則集合 R からなる単純型付き項書換え系 $\mathcal{R}$ を考える．

$$\begin{cases} \mathsf{f}\ (\mathsf{s}\ x) & \to & \mathsf{f}\ (\mathsf{g}\ x) \\ \mathsf{g} & \to & \mathsf{s} \end{cases}$$

$\mathrm{Lab}(\Theta(R))$ は

$$\begin{cases} @_{1\mathrm{p}}(\mathsf{f}, @_{1\mathrm{n}}(\mathsf{s}, x)) & \to & @_{1\mathrm{p}}(\mathsf{f}, @_{1\mathrm{p}}(\mathsf{g}, x)) \\ \mathsf{g} & \to & \mathsf{s} \end{cases}$$

となり，以下の優位順序に基づく辞書式経路順序で停止性が証明できる．$@_{1\mathrm{n}} > @_{1\mathrm{p}}$, $@_{1\mathrm{n}} > \mathsf{g}$, $\mathsf{g} > \mathsf{s}$. しかし，$\mathcal{R}$ は停止性を持たない．無限簡約列

$$\mathsf{f}\ (\mathsf{s}\ x) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{f}\ (\mathsf{g}\ x) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{f}\ (\mathsf{s}\ x) \to_{\mathcal{R}} \cdots$$

が存在するからである．系 18 において辞書式経路順序を利用するには，優位順序に $@_{1\mathrm{p}} > @_{1\mathrm{n}}$ が必要なことに注意していただきたい．

対象となる単純型付き項書換え系を限定すれば，$\mathrm{Dec}(\Theta(R))$ を考慮せずに停止性を保証できる．

定義 20 （Dec なしの首位ラベリング） 第 1 階項書き換え系 $\mathcal{R} = \langle \Sigma, R\rangle$ に対して，Dec を考慮しない首位ラベリングを $\mathrm{Lab}(\mathcal{R}) = \langle \mathrm{Lab}(\Sigma), \mathrm{Lab}(R)\rangle$ と定め，$\mathrm{Head}(\mathcal{R}) = \{\ \mathrm{head}(l) \mid l \to r \in R\ \}$ と定義する．

定理 21 （首位ラベリングを用いた停止性証明 II） $\mathcal{R} = \langle C, R\rangle$ を単純型付き項書換え系とし，基本型でない書換え規則の右辺 r は $\mathrm{head}(r) \in \mathrm{Head}(\mathcal{R})$ を満たすものとする．このとき，$\mathrm{Lab}(\Theta(\mathcal{R}))$ が停止性を持つならば $\mathcal{R}$ は停止性を持つ．

（証明）

まず，論文 15) の補題 6 を変更して，任意の基本型でない項 s, t と任意の割当て $\alpha : V \to \{\mathrm{p}, \mathrm{n}\}$ について $s \to_{\mathcal{R}} t \Longrightarrow \alpha(\Theta(s)) = \alpha(\Theta(t))$ を示す．これは，上記の条件と各単純型付き項 $(t_0\, t_1 \cdots t_n)$ について，t_0 が基本型でないことから容易に導かれる．

次に，論文 15) の補題 7 を Decr による簡約を使わないように変更する．これは変更した補題 6 および，首位ラベリングのラベリング関数においては第 1 引数しかラベルの決定に用いないことから示される．

最後に，変更した補題 7 を用いて，$\mathcal{R}$ による単純型付き項の無限簡約列があるとき，$\mathrm{Lab}(\Theta(\mathcal{R}))$ による第 1 階項の無限簡約列があることをいえばよい．□

例 22 （首位ラベリングを用いた停止性証明 I） 例 10 の単純型付き項書換え系 $\mathcal{R}$ の書換え規則はすべて基本型である．したがって，定理 21 より，$\mathcal{R}$ の停止性は第 1 階項書換え系 $\mathrm{Lab}(\Theta(\mathcal{R}))$ の停止性から導かれる．$\mathrm{Lab}(\Theta(\mathcal{R}))$ の書換え規則は

$$\begin{cases} @_{2\mathrm{p}}(+, \mathsf{0}, y) & \to & y \\ @_{2\mathrm{p}}(+, @_{1\mathrm{n}}(\mathsf{s}, x), y) & & \\ & \to & @_{1\mathrm{n}}(\mathsf{s}, @_{2\mathrm{p}}(+, x, y)) \\ @_{1\mathrm{p}}(\mathsf{double}, x) & \to & @_{2\mathrm{p}}(+, x, x) \end{cases}$$

であり，以下の条件を満たす優位順序に基づく辞書式経路順序で，停止性が証明できる．$@_{1\mathrm{p}} > @_{2\mathrm{p}} > @_{1\mathrm{n}}$, $\mathsf{double} > +$.

例 23 （首位ラベリングを用いた停止性証明 II） カリー化関数 curry を利用した，定数集合 $\{\ \mathsf{0}^{o}, \mathsf{s}^{o\to o}, +^{o\times o\to o}, \mathsf{curry}^{(o\times o\to o)\to(o\to(o\to o))}, \mathsf{add}^{o\to(o\to o)}\ \}$ と次の書換え規則集合からなる単純型付き項書換え系 $\mathcal{R}$ を考える．

$$\begin{cases} +\ \mathsf{0}\ y & \to & y \\ +\ (\mathsf{s}\ x)\ y & \to & \mathsf{s}\ (+\ x\ y) \\ ((\mathsf{curry}\ F)\ x)\ y & \to & F\ x\ y \\ \mathsf{add} & \to & \mathsf{curry}\ + \end{cases}$$

$\mathsf{curry} \in \mathrm{Head}(\mathcal{R})$ より $\mathcal{R}$ は定理 21 の条件を満たす．したがって，その停止性は以下の書換え規則集合を持つ $\mathrm{Lab}(\Theta(\mathcal{R}))$ の停止性から導かれる．

$$\begin{cases} @_{2\mathrm{p}}(+, \mathsf{0}, y) & \to & y \\ @_{2\mathrm{p}}(+, @_{1\mathrm{n}}(\mathsf{s}, x), y) & & \\ & \to & @_{1\mathrm{n}}(\mathsf{s}, @_{2\mathrm{p}}(+, x, y)) \\ @_{1\mathrm{p}}(@_{01\mathrm{p}}(@_{2\langle 01\rangle\mathrm{p}}(\mathsf{curry}, F), x), y) & & \\ & \to & @_{2\mathrm{p}}(F, x, y) \\ @_{1\mathrm{p}}(@_{01\mathrm{p}}(@_{2\langle 01\rangle\mathrm{p}}(\mathsf{curry}, F), x), y) & & \\ & \to & @_{2\mathrm{n}}(F, x, y) \\ \mathsf{add} & \to & @_{2\langle 01\rangle\mathrm{p}}(\mathsf{curry}, +) \end{cases}$$

$\mathrm{Lab}(\Theta(\mathcal{R}))$ の停止性は，以下の条件を満たす優位順序に基づく辞書式経路順序で証明できる．$@_{1\mathrm{p}} > @_{2\mathrm{p}} > @_{1\mathrm{n}}$，$@_{1\mathrm{p}} > @_{2\mathrm{n}}$，$\mathsf{add} > @_{2\langle 01\rangle\mathrm{p}}$，$\mathsf{add} > \mathsf{curry}$，$\mathsf{add} > +$.

例 24 （首位ラベリングを用いた停止性証明 III） リストの畳込み関数 fold を利用した，定数集合 $\{\ 0^{\mathrm{o}},\ \mathsf{s}^{\mathrm{o}\to\mathrm{o}},\ [\,]^{\mathrm{o}},\ :^{\mathrm{o}\times\mathrm{o}\to\mathrm{o}},\ +^{\mathrm{o}\times\mathrm{o}\to\mathrm{o}},\ *^{\mathrm{o}\times\mathrm{o}\to\mathrm{o}},\ \mathsf{fold}^{(\mathrm{o}\times\mathrm{o}\to\mathrm{o})\times\mathrm{o}\to(\mathrm{o}\to\mathrm{o})},\ \mathsf{sum}^{\mathrm{o}\to\mathrm{o}},\ \mathsf{prod}^{\mathrm{o}\to\mathrm{o}}\ \}$ と次の書換え規則集合からなる単純型付き項書換え系 $\mathcal{R}$ について考える．

$$\left\{\begin{array}{lcl}
+\ 0\ y & \to & y\\
+\ (\mathsf{s}\ x)\ y & \to & \mathsf{s}\ (+\ x\ y)\\
*\ 0\ y & \to & 0\\
\ (\mathsf{s}\ x)\ y & \to & +\ y\ (\ x\ y)\\
(\mathsf{fold}\ F\ x)\ [\,] & \to & x\\
(\mathsf{fold}\ F\ x)\ (y : ys) & & \\
 & \to & F\ y\ ((\mathsf{fold}\ F\ x)\ ys)\\
\mathsf{sum} & \to & \mathsf{fold}\ +\ 0\\
\mathsf{prod} & \to & \mathsf{fold}\ *\ (\mathsf{s}\ 0)
\end{array}\right.$$

$\mathsf{fold} \in \mathrm{Head}(\mathcal{R})$ であるから，定理 21 より，$\mathcal{R}$ の停止性は $\mathrm{Lab}(\Theta(\mathcal{R}))$ の停止性から導かれる．$\mathrm{Lab}(\Theta(\mathcal{R}))$ は次ページの**図 2** に示す書換え規則集合を持ち，次の条件を満たす優位順序に基づく辞書式経路順序で停止性を証明できる．$@_{1\mathrm{p}} > @_{2\mathrm{p}} > @_{1\mathrm{n}}$，$@_{1\mathrm{p}} > @_{2\mathrm{n}}$，$\mathsf{sum} > @_{201\mathrm{p}}$ $\mathsf{sum} > \mathsf{fold}$，$\mathsf{sum} > +$，$\mathsf{sum} > 0$，$\mathsf{prod} > @_{201\mathrm{p}}$，$\mathsf{prod} > \mathsf{fold}$，$\mathsf{prod} > * > +$，$\mathsf{prod} > @_{1\mathrm{n}}$，$\mathsf{prod} > \mathsf{s}$，$\mathsf{prod} > 0$.

例 25 （首位ラベリングを用いた停止性証明 IV） 自然数上の再帰関数を作る関数 rec と階乗関数 fact を記述した，定数集合 $\{\ 0^{\mathrm{o}}, \mathsf{s}^{\mathrm{o}\to\mathrm{o}}, +^{\mathrm{o}\times\mathrm{o}\to\mathrm{o}}, *^{\mathrm{o}\times\mathrm{o}\to\mathrm{o}}, \mathsf{rec}^{(\mathrm{o}\times\mathrm{o}\to\mathrm{o})\times\mathrm{o}\to(\mathrm{o}\to\mathrm{o})}, \mathsf{fact}^{\mathrm{o}\to\mathrm{o}}\ \}$ と次の書換え規則集合からなる単純型付き項書換え系 $\mathcal{R}$ を考える．

$$\left\{\begin{array}{lcl}
+\ 0\ y & \to & y\\
+\ (\mathsf{s}\ x)\ y & \to & s\ (+\ x\ y)\\
*\ 0\ y & \to & 0\\
\ (\mathsf{s}\ x)\ y & \to & +\ y\ (\ x\ y)\\
(\mathsf{rec}\ F\ x)\ 0 & \to & x\\
(\mathsf{rec}\ F\ x)\ (\mathsf{s}\ y) & \to & F\ (\mathsf{s}\ y)\ ((\mathsf{rec}\ F\ x)\ y)\\
\mathsf{fact} & \to & \mathsf{rec}\ *\ (\mathsf{s}\ 0)
\end{array}\right.$$

$\mathsf{rec} \in \mathrm{Head}(\mathcal{R})$ であるから，定理 21 より，$\mathcal{R}$ の停止性は $\mathrm{Lab}(\Theta(\mathcal{R}))$ の停止性から導かれる．$\mathrm{Lab}(\Theta(\mathcal{R}))$ は次ページの**図 3** に示す書換え規則集合を持ち，次の条件を満たす優位順序に基づく辞書式経路順序で停止性を証明できる．$@_{1\mathrm{p}} > @_{2\mathrm{p}} > @_{1\mathrm{n}}$，$@_{1\mathrm{p}} > @_{2\mathrm{n}}$，$\mathsf{fact} > @_{201\mathrm{p}}$，$\mathsf{fact} > \mathsf{rec}$，$\mathsf{fact} > * > +$，$\mathsf{fact} > @_{1\mathrm{n}}$，$\mathsf{fact} > \mathsf{s}$，$\mathsf{fact} > 0$.

例 26 （首位ラベリングを用いた停止性証明 V） リストを昇順と降順に整列する 2 つの関数 ascendingSort と descendingSort を記述した，定数集合 $\{\ 0^{\mathrm{o}},\ \mathsf{s}^{\mathrm{o}\to\mathrm{o}},\ [\,]^{\mathrm{o}},\ :^{\mathrm{o}\times\mathrm{o}\to\mathrm{o}},\ \mathsf{max}^{\mathrm{o}\times\mathrm{o}\to\mathrm{o}},\ \mathsf{min}^{\mathrm{o}\times\mathrm{o}\to\mathrm{o}},\ \mathsf{ins}^{\mathrm{o}\times\mathrm{o}\times(\mathrm{o}\times\mathrm{o}\to\mathrm{o})\times(\mathrm{o}\times\mathrm{o}\to\mathrm{o})\to\mathrm{o}},\ \mathsf{sort}^{\mathrm{o}\times(\mathrm{o}\times\mathrm{o}\to\mathrm{o})\times(\mathrm{o}\times\mathrm{o}\to\mathrm{o})\to\mathrm{o}},\ \mathsf{ascendingSort}^{\mathrm{o}\to\mathrm{o}},\ \mathsf{descendingSort}^{\mathrm{o}\to\mathrm{o}}\ \}$ と以下の書換え規則集合からなる単純型付き項書換え系 $\mathcal{R}$ について考える．

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\mathsf{max}\ 0\ y & \to & y\\
\mathsf{max}\ x\ 0 & \to & x\\
\mathsf{max}\ (\mathsf{s}\ x)\ (\mathsf{s}\ y) & \to & \mathsf{s}\ (\mathsf{max}\ x\ y)\\
\mathsf{min}\ 0\ y & \to & 0\\
\mathsf{min}\ x\ 0 & \to & 0\\
\mathsf{min}\ (\mathsf{s}\ x)\ (\mathsf{s}\ y) & \to & \mathsf{s}\ (\mathsf{min}\ x\ y)\\
\mathsf{ins}\ [\,]\ y\ F\ G & \to & y : [\,]\\
\mathsf{ins}\ (x : xs)\ y\ F\ G & & \\
\quad \to\ (F\ x\ y) : (\mathsf{ins}\ xs\ (G\ x\ y)\ F\ G) & & \\
\mathsf{sort}\ [\,]\ F\ G & \to & [\,]\\
\mathsf{sort}\ (x : xs)\ F\ G & & \\
\quad \to\ \mathsf{ins}\ (\mathsf{sort}\ xs\ F\ G)\ x\ F\ G & & \\
\mathsf{ascendingSort}\ xs & \to & \mathsf{sort}\ xs\ \mathsf{min}\ \mathsf{max}\\
\mathsf{descendingSort}\ xs & \to & \mathsf{sort}\ xs\ \mathsf{max}\ \mathsf{min}
\end{array}\right.$$

書換え規則はすべて基本型なので，定理 21 より，$\mathcal{R}$ の停止性は第 1 階項書換え系 $\mathrm{Lab}(\Theta(\mathcal{R}))$ の停止性から導かれる．$\mathrm{Lab}(\Theta(\mathcal{R}))$ は**図 4** に示す書換え規則集合を持ち，次の条件を満たす優位順序に基づく辞書式経路順序で停止性を証明できる．$@_{1\mathrm{p}} > @_{0220\mathrm{p}} > @_{00220\mathrm{p}} > @_{2\mathrm{p}} > @_{1\mathrm{n}}$，$@_{00220\mathrm{p}} > @_{2\mathrm{n}}$，$\mathsf{ascendingSort} > \mathsf{sort} > \mathsf{ins} > :$，$\mathsf{ascendingSort} > \mathsf{min}$，$\mathsf{ascendingSort} > \mathsf{max}$，$\mathsf{descendingSort} > \mathsf{sort}$，$\mathsf{descendingSort} > \mathsf{max}$，$\mathsf{descendingSort} > \mathsf{min}$.

5. 関連研究

5.1 作用型項書換え系

高階関数を第 1 階項書換え系で扱うための仕組みとして，作用型（applicative）項書換え系が知られている[13]．例 1 に対応する作用型項書換え系を示す．

$$\left\{\begin{array}{lcl}
@(@(\mathsf{map}, F), [\,]) & \to & [\,]\\
@(@(\mathsf{map}, F), @(@(:, x), xs)) & & \\
\quad \to @(@(:, @(F, x)), @(@(\mathsf{map}, F), xs)) & & \\
@(@(@(\circ, F), G), x) & \to & @(F, @(G, x))\\
@(\mathsf{twice}, F) & \to & @(@(\circ, F), F)
\end{array}\right.$$

$$
\begin{cases}
@_{\mathrm{2p}}(+, \mathsf{0}, y) & \to \quad y \\
@_{\mathrm{2p}}(+, @_{\mathrm{1n}}(\mathsf{s}, x), y) & \to \quad @_{\mathrm{1n}}(\mathsf{s}, @_{\mathrm{2p}}(+, x, y)) \\
@_{\mathrm{2p}}(*, \mathsf{0}, y) & \to \quad \mathsf{0} \\
@_{\mathrm{2p}}(*, @_{\mathrm{1n}}(\mathsf{s}, x), y) & \to \quad @_{\mathrm{2p}}(+, y, @_{\mathrm{2p}}(*, x, y)) \\
@_{\mathrm{1p}}(@_{\mathrm{201p}}(\mathsf{fold}, F, x), [\,]) & \to \quad x \\
@_{\mathrm{1p}}(@_{\mathrm{201p}}(\mathsf{fold}, F, x), @_{\mathrm{2n}}(:, y, ys)) & \to \quad @_{\mathrm{2p}}(F, y, @_{\mathrm{1p}}(@_{\mathrm{201p}}(\mathsf{fold}, F, x), ys)) \\
@_{\mathrm{1p}}(@_{\mathrm{201p}}(\mathsf{fold}, F, x), @_{\mathrm{2n}}(:, y, ys)) & \to \quad @_{\mathrm{2n}}(F, y, @_{\mathrm{1n}}(@_{\mathrm{201p}}(\mathsf{fold}, F, x), ys)) \\
\mathsf{sum} & \to \quad @_{\mathrm{201p}}(\mathsf{fold}, +, \mathsf{0}) \\
\mathsf{prod} & \to \quad @_{\mathrm{201p}}(\mathsf{fold}, *, @_{\mathrm{1n}}(\mathsf{s}, \mathsf{0}))
\end{cases}
$$

図 2　例 24 の $\mathrm{Lab}(\Theta(\mathcal{R}))$
Fig. 2　$\mathrm{Lab}(\Theta(\mathcal{R}))$ in Example 24.

$$
\begin{cases}
@_{\mathrm{2p}}(+, \mathsf{0}, y) & \to \quad y \\
@_{\mathrm{2p}}(+, @_{\mathrm{1n}}(\mathsf{s}, x), y) & \to \quad @_{\mathrm{1n}}(\mathsf{s}, @_{\mathrm{2p}}(+, x, y)) \\
@_{\mathrm{2p}}(*, \mathsf{0}, y) & \to \quad \mathsf{0} \\
@_{\mathrm{2p}}(*, @_{\mathrm{1n}}(\mathsf{s}, x), y) & \to \quad @_{\mathrm{2p}}(+, y, @_{\mathrm{2p}}(*, x, y)) \\
@_{\mathrm{1p}}(@_{\mathrm{201p}}(\mathsf{rec}, F, x), \mathsf{0}) & \to \quad x \\
@_{\mathrm{1p}}(@_{\mathrm{201p}}(\mathsf{rec}, F, x), @_{\mathrm{1n}}(\mathsf{s}, y)) & \to \quad @_{\mathrm{2p}}(F, @_{\mathrm{1n}}(\mathsf{s}, y), @_{\mathrm{1p}}(@_{\mathrm{201p}}(\mathsf{rec}, F, x), y)) \\
@_{\mathrm{1p}}(@_{\mathrm{201p}}(\mathsf{rec}, F, x), @_{\mathrm{1n}}(\mathsf{s}, y)) & \to \quad @_{\mathrm{2n}}(F, @_{\mathrm{1n}}(\mathsf{s}, y), @_{\mathrm{1p}}(@_{\mathrm{201p}}(\mathsf{rec}, F, x), y)) \\
\mathsf{fact} & \to \quad @_{\mathrm{201p}}(\mathsf{rec}, *, @_{\mathrm{1n}}(\mathsf{s}, \mathsf{0}))
\end{cases}
$$

図 3　例 25 の $\mathrm{Lab}(\Theta(\mathcal{R}))$
Fig. 3　$\mathrm{Lab}(\Theta(\mathcal{R}))$ in Example 25.

$$
\begin{cases}
@_{\mathrm{2p}}(\mathsf{max}, \mathsf{0}, y) & \to \quad y \\
@_{\mathrm{2p}}(\mathsf{max}, x, \mathsf{0}) & \to \quad x \\
@_{\mathrm{2p}}(\mathsf{max}, @_{\mathrm{1n}}(\mathsf{s}, x), @_{\mathrm{1n}}(\mathsf{s}, y)) & \to \quad @_{\mathrm{1n}}(\mathsf{s}, @_{\mathrm{2p}}(\mathsf{max}, x, y)) \\
@_{\mathrm{2p}}(\mathsf{min}, \mathsf{0}, y) & \to \quad \mathsf{0} \\
@_{\mathrm{2p}}(\mathsf{min}, x, \mathsf{0}) & \to \quad \mathsf{0} \\
@_{\mathrm{2p}}(\mathsf{min}, @_{\mathrm{1n}}(\mathsf{s}, x), @_{\mathrm{1n}}(\mathsf{s}, y)) & \to \quad @_{\mathrm{1n}}(\mathsf{s}, @_{\mathrm{2p}}(\mathsf{min}, x, y)) \\
@_{\mathrm{00220p}}(\mathsf{ins}, [\,], y, F, G) & \to \quad @_{\mathrm{2n}}(:, y, [\,]) \\
@_{\mathrm{00220p}}(\mathsf{ins}, @_{\mathrm{2n}}(:, x, xs), y, F, G) & \to \quad @_{\mathrm{2n}}(:, @_{\mathrm{2p}}(F, x, y), @_{\mathrm{00220p}}(\mathsf{ins}, xs, @_{\mathrm{2p}}(G, x, y), F, G)) \\
@_{\mathrm{00220p}}(\mathsf{ins}, @_{\mathrm{2n}}(:, x, xs), y, F, G) & \to \quad @_{\mathrm{2n}}(:, @_{\mathrm{2p}}(F, x, y), @_{\mathrm{00220p}}(\mathsf{ins}, xs, @_{\mathrm{2n}}(G, x, y), F, G)) \\
@_{\mathrm{00220p}}(\mathsf{ins}, @_{\mathrm{2n}}(:, x, xs), y, F, G) & \to \quad @_{\mathrm{2n}}(:, @_{\mathrm{2n}}(F, x, y), @_{\mathrm{00220p}}(\mathsf{ins}, xs, @_{\mathrm{2p}}(G, x, y), F, G)) \\
@_{\mathrm{00220p}}(\mathsf{ins}, @_{\mathrm{2n}}(:, x, xs), y, F, G) & \to \quad @_{\mathrm{2n}}(:, @_{\mathrm{2n}}(F, x, y), @_{\mathrm{00220p}}(\mathsf{ins}, xs, @_{\mathrm{2n}}(G, x, y), F, G)) \\
@_{\mathrm{0220p}}(\mathsf{sort}, [\,], F, G) & \to \quad [\,] \\
@_{\mathrm{0220p}}(\mathsf{sort}, @_{\mathrm{2n}}(:, x, xs), F, G) & \to \quad @_{\mathrm{00220p}}(\mathsf{ins}, @_{\mathrm{0220p}}(\mathsf{sort}, xs, F, G), x, F, G) \\
@_{\mathrm{1p}}(\mathsf{ascendingSort}, xs) & \to \quad @_{\mathrm{0220p}}(\mathsf{sort}, xs, \mathsf{min}, \mathsf{max}) \\
@_{\mathrm{1p}}(\mathsf{descendingSort}, xs) & \to \quad @_{\mathrm{0220p}}(\mathsf{sort}, xs, \mathsf{max}, \mathsf{min})
\end{cases}
$$

図 4　例 26 の $\mathrm{Lab}(\Theta(\mathcal{R}))$
Fig. 4　$\mathrm{Lab}(\Theta(\mathcal{R}))$ in Example 26.

このように，作用型項書換え系では，関数適用を表す 2 引数関数 @ を使って項を構成するため，項中に同一の @ 記号が多数現れる．経路順序や依存対などの停止性証明法は，関数記号の違いに着目して停止性を導くため，作用型項書換え系には適さない．実際，前ページに示した作用型項書換え系は，辞書式経路順序では順序付けできない．

5.2　λ 束縛を持たない高階項書換え系

Lifantsev ら[10] は直積型と含意型に型付けされた項を対象とする高階項書換え系に対して，辞書式経路順

序を提案している．

この体系において型集合 T は次のように定義される．(1) $B \subseteq \mathrm{T}$ (B は基本型の集合)；(2) $\tau, \rho \in \mathrm{T} \Longrightarrow (\tau \to \rho), (\tau \times \rho) \in \mathrm{T}$．型付けされた定数集合 $C = \bigcup_{\tau \in \mathrm{T}} C^\tau$ と，変数集合 $V = \bigcup_{\tau \in \mathrm{T}} V^\tau$ に基づき，項集合 $\mathrm{T}(C,V) = \bigcup_{\tau \in \mathrm{T}} \mathrm{T}(C,V)^\tau$ は，(1) $C^\tau \cup V^\tau \subseteq \mathrm{T}(C,V)^\tau$；(2) $s \in \mathrm{T}(C,V)^{\tau \to \rho}$，$t \in \mathrm{T}(C,V)^\tau \Longrightarrow (s\ t) \in \mathrm{T}(C,V)^\rho$；(3) $s \in \mathrm{T}(C,V)^\tau$，$t \in \mathrm{T}(C,V)^\rho \Longrightarrow (s,t) \in \mathrm{T}(C,V)^{\tau \times \rho}$ と定義される．

C 上の半順序 $\rhd$ に基づく辞書式経路順序 $>_{\mathrm{lpo}}$ の定義を示す．以下のいずれかが成立する場合に $s >_{\mathrm{lpo}} t$ とする．

(1) $s \notin V$, $t \in \mathrm{V}(s)$
(2) $s, t \in C$, $s \rhd t$
(3) $s \in C$, $t = (t_1\ t_2)$, $\forall i \in \{1,2\}\ s >_{\mathrm{lpo}} t_i$
(4) $s \in C$, $t = (t_1, t_2)$, $\forall i \in \{1,2\}\ s >_{\mathrm{lpo}} t_i$
(5) $s = (s_1, s_2)$, $t \in C$, $\exists i \in \{1,2\}\ s_i \geq_{\mathrm{lpo}} t$
(6) $s = (s_1, s_2)$, $t = (t_1\ t_2)$, $\exists i \in \{1,2\}\ s_i \geq_{\mathrm{lpo}} t$
(7) $s = (s_1, s_2), t = (t_1, t_2)$，かつ，次のいずれかを満たす (a) $\exists i \in \{1,2\}\ s_i \geq_{\mathrm{lpo}} t$; (b) $s_1 >_{\mathrm{lex}} t_1$, $\forall i \in \{1,2\}\ s >_{\mathrm{lpo}} t_i$; (c) $s_1 = t_1, s_2 >_{\mathrm{lex}} t_2$, $\forall i \in \{1,2\}\ s >_{\mathrm{lpo}} t_i$
(8) $s = (s_1\ s_2)$, $t \in C$, $\exists i \in \{1,2\}\ s_i \geq_{\mathrm{lpo}} t$
(9) $s = (s_1\ s_2)$, $t = (t_1, t_2)$, $\forall i \in \{1,2\}\ s >_{\mathrm{lpo}} t_i$
(10) $s = (s_1\ s_2)$, $t = (t_1\ t_2)$，かつ，次のいずれかを満たす (a) $s_1 >_{\mathrm{lpo}} t_1$, $s >_{\mathrm{lpo}} t_2$; (b) $s_1 = t_1$, $s_2 >_{\mathrm{lex}} t_2$, $s >_{\mathrm{lpo}} t_2$; (c) $s_2 \geq_{\mathrm{lpo}} t$

ここで $\geq_{\mathrm{lpo}}$ は $>_{\mathrm{lpo}}$ の反射閉包である．また，次の3条件のいずれかを満たすとき $s >_{\mathrm{lex}} t$ とする．

(1) $s >_{\mathrm{lpo}} t$ $(s \neq (s_1, s_2), t \neq (t_1, t_2)$ のとき)
(2) $s_1 >_{\mathrm{lex}} t$ $(s = (s_1, s_2), t \in V$ のとき)
(3) $s[1] >_{\mathrm{lex}} t[1]$ または $s[1] = t[1]$, $s[2] >_{\mathrm{lex}} t[2]$ (それ以外)

ここで，$u = (u_1, u_2)$ のとき $u[i] = u_i$，それ以外のとき $u[i] = u$ とする．

例 27 基本型の集合を $B = \{\mathsf{Nat}, \mathsf{List}\}$，定数集合 C を

$$\left\{\begin{array}{l} 0^{\mathsf{Nat}} \\ \mathsf{s}^{\mathsf{Nat}\to\mathsf{Nat}} \\ [\,]^{\mathsf{List}} \\ :^{\mathsf{Nat}\times\mathsf{List}\to\mathsf{List}} \\ \mathsf{map}^{(\mathsf{Nat}\to\mathsf{Nat})\times\mathsf{List}\to\mathsf{List}} \\ \circ^{(\mathsf{Nat}\to\mathsf{Nat})\times(\mathsf{Nat}\to\mathsf{Nat})\to\mathsf{Nat}\to\mathsf{Nat}} \\ \mathsf{twice}^{(\mathsf{Nat}\to\mathsf{Nat})\to\mathsf{Nat}\to\mathsf{Nat}} \end{array}\right.$$

とし，R を次の書換え規則集合とする．

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathsf{map}\ (F, [\,]) & \to & [\,] \\ \mathsf{map}\ (F, (:\ (x, xs))) & & \\ & \to & :\ ((F\ x), (\mathsf{map}\ (F, xs))) \\ (\circ\ (F, G))\ x & \to & F\ (G\ x) \\ \mathsf{twice}\ F & \to & \circ\ (F, F) \end{array}\right.$$

これは，例 1 の単純型付き項書換え系を，上記の体系における高階項書換え系で記述したものになっている．このとき，R の 2 番目の書換え規則に対して，辞書式経路順序 $>_{\mathrm{lpo}}$ による比較を行う．今，$\mathsf{map} \rhd :$ とすると

$$\mathsf{map}\ (F, (:\ (x, xs))) >_{\mathrm{lpo}} ((F\ x), (\mathsf{map}\ (F, xs)))$$

に帰着でき，このためには

$$\mathsf{map}\ (F, (:\ (x, xs))) >_{\mathrm{lpo}} F\ x$$

を満たす必要がある．この制約は $\mathsf{map} \not\geq_{\mathrm{lpo}} F$ より

$$(F, (:\ (x, xs))) \geq_{\mathrm{lpo}} F\ x$$

に帰着されるが，これが成立するためには，$F \geq_{\mathrm{lpo}} F\ x$ または $: (x, xs) \geq_{\mathrm{lpo}} F\ x$ が必要となる．しかし，これらはどちらも成立しないため，$>_{\mathrm{lpo}}$ による順序付けは失敗する．以上では，例 1 に対応する型付けを考えたが，関数記号 map の型を $(\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}) \to \mathsf{List} \to \mathsf{List}$ に変え，これに合わせて 2 つの map に関する書換え規則を変更すれば，$>_{\mathrm{lpo}}$ による順序付けが成功し停止性が導かれる．

5.3 高階変数付き項書換え系

Kusakari [9] は高階変数付き項書換え系（term rewriting system with higher-order variables）を提案し，依存対をその体系に拡張している．また，高階変数付き項書換え系の特殊な場合として，単純型付き高階変数付き項書換え系☆を定義し，これに対して再帰経路順序を提案している．

この体系において単純型の集合 T は次のように定義される．(1) $B \subseteq \mathrm{T}$ (B は基本型の集合)；(2) $\tau, \rho \in \mathrm{T} \Longrightarrow (\tau \to \rho) \in \mathrm{T}$．型付けされた関数記号集合 $\Sigma = \bigcup_{\tau \in \mathrm{T}} \Sigma^\tau$ と変数集合 $V = \bigcup_{\tau \in \mathrm{T}} V^\tau$ に基づき，項集合 $\mathrm{T}(\Sigma, V) = \bigcup_{\tau \in \mathrm{T}} \mathrm{T}(\Sigma, V)^\tau$ は $n \geq 0$, $a \in \Sigma^{\tau_1 \to (\cdots \to (\tau_n \to \tau) \cdots)} \cup V^{\tau_1 \to (\cdots \to (\tau_n \to \tau) \cdots)}$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}\ t_i \in \mathrm{T}(\Sigma, V)^{\tau_i} \Longrightarrow a(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{T}(\Sigma, V)^\tau$ と定義される．項 $a()$ は a と略記する．

Σ 上の擬順序 $\trianglerighteq$ が与えられたとき，2 項関係 $\sim = (\trianglerighteq \cap \trianglelefteq)$ を $\Sigma \cup V$ 上に次のように拡大する．$a \sim b \Longleftrightarrow a = b \in V$ または $a \sim b \in \Sigma$．次に，$\sim$ を $\mathrm{T}(\Sigma, V)$ 上

☆ 原論文では単純型付き項書換え系（simply-typed TRS）となっているが，本論文で扱っているものと同名で混乱するので，本論文ではこのように呼ぶ．

に次のように拡大する．$a(s_1 \ldots, s_n) \sim b(t_1, \ldots, t_m) \iff a \sim b,\, n = m,\, \forall i \in \{1, \ldots, n\}\ s_i \sim t_i$.

Σ 上の擬順序 $\trianglerighteq$ に基づく再帰経路順序 $>_{\mathrm{rpo}}$ の定義を示す．以下のいずれかが成立するとき $a(s_1, \ldots, s_m) >_{\mathrm{rpo}} b(t_1, \ldots, t_n)$ とする．

(1) $a \rhd b,\, \forall j \in \{1, \ldots, n\}\ a(s_1, \ldots, s_m) >_{\mathrm{rpo}} t_j$

(2) $a \sim b \in V \cup \Sigma$，かつ

$$\{s_1, \ldots, s_m\} >_{\mathrm{rpo}}^{\mathrm{mul}} \{t_1, \ldots, t_n\}$$

(3) $\exists i \in \{1, \ldots, m\}\ s_i \geq_{\mathrm{rpo}} t$

(4) $a \in \Sigma,\, b \in V,\, a$ は $\langle \Sigma, \trianglerighteq \rangle$ 上の最大元，かつ

$$\{s_1, \ldots, s_m\} \geq_{\mathrm{rpo}}^{\mathrm{mul}} \{b, t_1, \ldots, t_n\}$$

ただし，以上の定義で，項の等価性は $\sim$ で比較する．

例 28 基本型の集合を $B = \{\mathsf{Nat}, \mathsf{List}\}$，関数記号集合 Σ を

$$\begin{cases} \mathsf{0}^{\mathsf{Nat}} \\ \mathsf{s}^{\mathsf{Nat}\to\mathsf{Nat}} \\ [\,]^{\mathsf{List}} \\ :^{\mathsf{Nat}\to\mathsf{List}\to\mathsf{List}} \\ \mathsf{map}^{(\mathsf{Nat}\to\mathsf{Nat})\to\mathsf{List}\to\mathsf{List}} \\ \circ^{(\mathsf{Nat}\to\mathsf{Nat})\to(\mathsf{Nat}\to\mathsf{Nat})\to\mathsf{Nat}\to\mathsf{Nat}} \\ \mathsf{twice}^{(\mathsf{Nat}\to\mathsf{Nat})\to\mathsf{Nat}\to\mathsf{Nat}} \end{cases}$$

とし，R を次の書換え規則集合とする☆．

$$\begin{cases} \mathsf{map}\ (F, [\,]) & \to & [\,] \\ \mathsf{map}\ (F, x : xs) & \to & F\,(x) : \mathsf{map}\ (F, xs) \\ \circ\ (F, G, x) & \to & F\,(G\,(x)) \\ \mathsf{twice}\ (F, x) & \to & \circ\ (F, F, x) \end{cases}$$

これは，例 1 の単純型付き項書換え系を，単純型付き高階変数付き項書換え系で記述したものになっている．このとき，3 番目の書換え規則は，再帰経路順序 $>_{\mathrm{rpo}}$ で順序付けできない．順序付けが成功するために必要な

$$\{F, G, x\} \geq_{\mathrm{rpo}}^{\mathrm{mul}} \{F, G(x)\}$$

が成立しないからである．

6. まとめと今後の課題

本論文では，単純型付き項書換え系の停止性証明法を提案した．これまで単純型付き項書換え系に対する停止性証明法としては，自動化の困難な意味論的な手法しか知られていなかった．本論文で提案した手法は構文論的な手法であり，停止性証明の自動化が容易である．

また，高階関数を用いた典型的な関数型プログラムを単純型付き項書換え系で記述した例をとりあげ，提案手法がこれらの例の停止性証明に有効であることを示した．

さらに，これまでに知られている高階項書換えの枠組みのうち，束縛変数をなくし高階関数の取扱いに焦点を絞ったという点で関連が深い枠組みをとりあげ，これらの枠組みにおいて提案された経路順序との比較を通じて，提案手法の新規性を確認した．

しかし，次の例に示すように，提案手法を用いた停止性証明が困難な単純型付き項書換え系もある．

例 29 以下は，カリー化した加算演算子と乗算演算子を単純型付き項書換え系で記述したものである．$\mathcal{R} = \langle C, R \rangle$，$C$ を $\mathsf{0}^{\mathrm{o}}$，$\mathsf{s}^{\mathrm{o}\to\mathrm{o}}$，$+^{\mathrm{o}\to(\mathrm{o}\to\mathrm{o})}$，$*^{\mathrm{o}\to(\mathrm{o}\to\mathrm{o})}$ からなる集合とし，R を以下の書換え規則集合とする．

$$\begin{cases} (+\ \mathsf{0})\ y & \to & y \\ (+\ (\mathsf{s}\ x))\ y & \to & \mathsf{s}\ ((+\ x)\ y) \\ (*\ \mathsf{0})\ y & \to & \mathsf{0} \\ (*\ (\mathsf{s}\ x))\ y & \to & (+\ y)\ ((*\ x)\ y) \end{cases}$$

書換え規則はすべて基本型であるから，定理 21 より，$\mathcal{R}$ の停止性は $\mathrm{Lab}(\Theta(\mathcal{R}))$ の停止性から導かれる．$\mathrm{Lab}(\Theta(\mathcal{R}))$ は次に示す書換え規則集合を持つ．

$$\begin{cases} @_{1\mathrm{p}}(@_{01\mathrm{p}}(+, \mathsf{0}), y) \quad \to \quad y \\ @_{1\mathrm{p}}(@_{01\mathrm{p}}(+, @_{1\mathrm{n}}(\mathsf{s}, x)), y) \\ \quad \to \quad @_{1\mathrm{n}}(\mathsf{s}, @_{1\mathrm{p}}(@_{01\mathrm{p}}(+, x), y)) \\ @_{1\mathrm{p}}(@_{01\mathrm{p}}(*, \mathsf{0}), y) \quad \to \quad \mathsf{0} \\ @_{1\mathrm{p}}(@_{01\mathrm{p}}(*, @_{1\mathrm{n}}(\mathsf{s}, x)), y) \\ \quad \to \quad @_{1\mathrm{p}}(@_{01\mathrm{p}}(+, y), @_{1\mathrm{p}}(@_{01\mathrm{p}}(*, x), y)) \end{cases}$$

このとき，4 番目の書換え規則に対する順序付けに失敗するため，辞書式経路順序を使って $\mathrm{Lab}(\Theta(\mathcal{R}))$ の停止性を示すことはできない．

基本変換後に得られた第 1 階項書換え系に対する停止性証明法として，本論文では主に，辞書式経路順序による停止性証明法をとりあげ考察した．一方，依存対による停止性証明法を利用した場合については，より進んだ考察が必要と考えられるが，本論文ではとりあげなかった．これについては今後の研究課題としたい．

謝辞 有益なコメントをお寄せ下さった査読者に感謝の意を表す．なお，本研究は一部日本学術振興会科学研究費 14780187 の補助を受けて行われた．

☆ 単純型付き高階変数付き項書換え系では，書換え規則の型は基本型しか許されない．

参 考 文 献

1) Arts, T. and Giesl, J.: Termination of Term Rewriting Using Dependency Pairs, *Theoretical Computer Science*, Vol.236, pp.133–178 (2000).
2) Baader, F. and Nipkow, T.: *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press, Cambridge (1998).
3) Dershowitz, N.: Orderings for Term-Rewriting Systems, *Theoretical Computer Science*, Vol.17, pp.279–301 (1982).
4) Dershowitz, N. and Jouannaud, J.-P.: Rewrite Systems, *Handbook of Theoretical Computer Science*, van Leeuwen, J.(Ed.), Vol.B, pp.243–320, Elsevier Science Publishers (1990).
5) Jouannaud, J.-P. and Okada, M.: Executable Higher-Order Algebraic Specification Languages, *Proc. 6th IEEE Symposium on Logic in Computer Science* (*LICS'91*), pp.350–361 (1991).
6) Kamin, S. and Lévy, J.-J.: Two Generalizations of the Recursive Path Ordering, unpublished manuscript, University of Illinois (1980).
7) Klop, J.W.: Combinatory Reduction Systems, Ph.D. Thesis, Rijksuniversiteit, Utrecht (1980).
8) Klop, J.W.: Term Rewriting Systems, *Handbook of Logic in Computer Science*, Abramsky, S., Gabbay, D. and Maibaum, T.(Eds.), Vol.2, pp.1–116, Oxford University Press (1992).
9) Kusakari, K.: On Proving Termination of Term Rewriting Systems with Higher-Order Variables, *IPSJ Trans. Programming*, Vol.42, No.SIG 7(PRO 11), pp.35–45 (2001).
10) Lifantsev, M. and Bachmair, L.: An LPO-based Termination Ordering for Higher-Order Terms without λ-abstraction, *Proc. 11th International Conference Theorem Proving in Higher Order Logics* (*TPHOLs'98*), Lecture Notes in Computer Science, Vol.1479, pp.277–293, Springer-Verlag (1998).
11) Mayr, R. and Nipkow, T.: Higher-Order Rewrite Systems and their Confluence, *Theoretical Computer Science*, Vol.192, pp.3–29 (1998).
12) Middeldorp, A. and Zantema, H.: Simple Termination of Rewrite Systems, *Theoretical Computer Science*, Vol.175, No.1, pp.127–158 (1997).
13) Nakahara, K., Middeldorp, A. and Ida, T.: A Complete Narrowing Calculus for Higher-Order Functional Logic Programming, *Proc. 7th International Symposium on Programming Languages, Implementations, Logics and Programs* (*PLILP'95*), Lecture Notes in Computer Science, Vol.982, pp.97–114, Springer-Verlag (1995).
14) Yamada, T.: Confluence and Termination of Simply Typed Term Rewriting Systems, *Proc. 12th International Conference on Rewriting Techniques and Applications* (*RTA'01*), Lecture Notes in Computer Science, Vol.2051, pp.338–352, Springer-Verlag (2001).
15) Zantema, H.: Termination of Term Rewriting by Semantic Labelling, *Fundamenta Informaticae*, Vol.24, pp.89–105 (1995).

(平成 14 年 9 月 30 日受付)
(平成 14 年 11 月 4 日採録)

青戸 等人

昭和 44 年生．平成 9 年北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士後期課程修了．同年，北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科助手．平成 10 年より群馬大学工学部情報工学科助手．項書換え系，非古典論理に関する研究に従事．博士（情報科学）．

山田 俊行

昭和 47 年生．平成 11 年筑波大学大学院博士課程工学研究科修了．同年筑波大学電子・情報工学系助手．平成 14 年より三重大学工学部情報工学科助手．項書換え，等式推論，関数型プログラミングに関する研究に従事．博士（工学）．