# 単項的 TRS における単一化問題について

三橋 一郎† 大山口 通夫†
太田 義勝† 山田 俊行†

項書換えシステム（TRS）における単一化問題とは，与えられた TRS $R$ と 2 つの項 $M$，$N$ について，$R$ における書き換えの合同関係を法として $M$ と $N$ が単一化可能であるか否かを判定する問題である．単一化問題は，TRS の部分クラスである右定項 TRS のクラスに限定しても決定不能である．他方，その部分クラスである合流性を満たす右定項 TRS のクラスにおいては決定可能である，という結果が大山口ら（2001）によって得られている．本論文では，大山口らの単一化アルゴリズムを拡張し，右定項規則の他に縮退規則を許しても単一化問題が決定可能であることを示す．

# On the Unification Problem for Confluent Monadic Term Rewriting Systems

Ichiro Mitsuhashi,† Michio Oyamaguchi,† Yoshikatsu Ohta† and Toshiyuki Yamada†

The unification problem for term rewriting systems (TRSs) is the problem of deciding, for a TRS $R$ and two terms $M$ and $N$, whether $M$ and $N$ are unifiable modulo the congruence generated by $R$. The unification problem is undecidable even if we restrict ourselves to the class of right-ground TRSs, which is a subclass of TRSs. On the other hand, it has been shown to be decidable for the class of confluent right-ground TRSs by Oyamaguchi and Ohta (2001). In this paper, we extend their algorithm and show that the unification problem is decidable for the class of confluent TRSs consisting of not only right-ground rules but also collapsing rules.

## 1. はじめに

項書換えシステム（TRS）は方向づけされた等式の集合と定義される．方向づけされた等式は書換え規則と呼ばれ，一方向への等式変形のみが許されることを意味する．TRS は等式の集合に対して推論を行ったり，項を簡単化したりするための計算モデルである．

TRS における単一化問題とは，与えられた TRS $R$ と 2 つの項 $M$，$N$ について，$R$ における書換えの合同関係を法として $M$ と $N$ が単一化可能であるか否かを判定する問題である．TRS における単一化問題は一般に決定不能であり，また右定項 TRS のクラス[11)]，合流性および停止性を満たす TRS のクラス[3)] に限定しても決定不能である．ここで，TRS が右定項であるとは，すべての規則の右辺が定項（すなわち，変数を含まない項）のときである．他方，TRS のいくつかの部分クラスにおいて単一化問題が決定可能であることが知られており[1),2),6),7),10)]，最近，大山口ら[13)] は合流性を満たす右定項 TRS のクラスにおいて単一化問題が決定可能であることを示した．

本論文では，まず，合流性および停止性を満たす単項的線形 TRS のクラスにおける単一化問題が決定不能であることを示す．ここで，TRS が単項的であるとは，すべての規則の右辺の高さが 1 以下のときであり，線形であるとは，すべての規則の左辺と右辺が線形である（すなわち，同じ変数は 2 回以上出現しない）ときである．次に，本論文では文献 13) の結果を拡張して，合流性を満たす単純 TRS（すなわち，右定項規則と縮退規則からなる☆TRS）における単一化問題が決定可能であることを示す．ここで，縮退規則とは右辺が変数である規則のことである．なお，合流性および停止性を満たす右定項規則または縮退規則からなる TRS のクラスにおいてはその単一化問題が決定可能であることが文献 6) で示されており，本論文の結果は停止性の条件を必要としないという意味でそ

† 三重大学工学部
Faculty of Engineering, Mie University

☆ どちらかを含んでいなくてもよい．

の拡張にもなっている．

## 2. 準　　備

本論文では，以下に定義する用語，記法以外については文献 3) と同じものを用いる．空列を $\varepsilon$ と表記する．集合 $A$ において，$\mathcal{P}(A)$ を $A$ のべき集合，$|A|$ を $A$ の要素数とする．$\mathcal{N}$ を非負整数の集合とする．$X$ を変数の集合，$F$ を項数関数 $\mathbf{a}: F \to \mathcal{N}$ によって等級づけされる関数記号の有限集合，$F_n = \{f \in F \mid \mathbf{a}(f) = n\}$，$T$ を $X$ と $F$ から構成される項の集合とする．項には，それぞれ相異なる自然数を対応させ，与えられた項に対して対応する自然数を返す関数を $\mathbf{g}: T \to \mathcal{N}$ とする．$x$，$y$，$z$ を変数，$L$，$M$，$N$ を項として用いる．変数を含まない項を**定項**と呼ぶ．$G$ を定項の集合，$S = T \setminus (G \cup X)$ とする．$M$ の位置の集合を $\mathcal{O}(M)$ と表し，$u \leq v$ を $\exists w.uw = v$ と定義する．$M_{|u}$ を位置 $u$ における $M$ の部分項とし，$M$ から部分項 $M_{|u}$ を $N$ で置換して得られる項を $M[N]_u$ と表す．$u \not\leq v$ かつ $u \not\geq v$ のとき**排反**といい，$u|v$ と表す．互いに排反な位置 $u_1, \cdots, u_n$ と項 $L_1, \cdots, L_n$ について，$M$ から各部分項 $M_{|u_i}(1 \leq i \leq n)$ を $L_i$ で置換して得られる項を $M[L_1, \cdots, L_n]_{(u_1,\dots,u_n)}$ と表す．$M$ 中の変数 $x$ の位置の集合を $\mathcal{O}_x(M) = \{u \in \mathcal{O}(M) \mid M_{|u} = x\}$，$\mathcal{O}_X(M) = \bigcup_{x \in X} \mathcal{O}_x(M)$，$\mathcal{O}_F(M) = \mathcal{O}(M) \setminus \mathcal{O}_X(M)$ とする．$V(M)$ を $M$ 中に出現する変数の集合とする．$M$ のサイズ，すなわち，$M$ 中の記号の数を $|M|$ と表す．位置 $u$ について，$u$ の長さを $|u|$ と表す．$M$ の**高さ**を $H(M) = \max\{|u| \mid u \in \mathcal{O}(M)\}$ とする．たとえば，$H(f(x, g(y))) = \max\{|\varepsilon|, |1|, |2|, |21|\} = 2$．$M$ の最外記号を $\mathrm{root}(M)$ と表記する．$|M_{|u}| = 1$ であるとき，$M_{|u}$ を $M$ の**最内記号**，$u$ を**最内位置**と呼ぶ．$\mathcal{O}_{Leaf}(M) = \{u \in \mathcal{O}(M) \mid |M_{|u}| = 1\}$ とする．

位置の集合 $W, W'$ について， $W \geq W'$ を任意の $v \in W$ についてある $u \in W'$ が存在し $v \geq u$ が成立すると定義する．$M[N/x]$ を $M$ から $x$ のすべての出現を $N$ で置換して得られる項とする．

**代入**とは，関数 $\sigma: V \to T$ であり，$Dom(\sigma) = \{x \in X \mid \sigma(x) \neq x\}$ と定義される集合が有限なものである．**書換え規則**は $\alpha \notin X$ かつ $V(\alpha) \supseteq V(\beta)$ を満たす方向づけされた等式 $\alpha \to \beta$ と定義され，**TRS** は書換え規則の有限集合である．項 $M$，$N$ に対してある書換え規則 $\alpha \to \beta$ と位置 $u \in \mathcal{O}(M)$ と代入 $\theta$ が存在して，$M_{|u} = \alpha\theta$ かつ $N = M[\beta\theta]_u$ のとき，$M \overset{u}{\to} N$ と定義し，これを **1 回の書換え**という．$N \overset{u}{\to} M$ を $M \overset{u}{\leftarrow} N$ と表し，$\overset{u}{\leftrightarrow} = \overset{u}{\to} \cup \overset{u}{\leftarrow}$ とする．$\gamma: M_1 \overset{u_1}{\leftrightarrow} M_2 \leftrightarrow \cdots \overset{u_{n-1}}{\leftrightarrow} M_n$ を**書換え系列**とする．この系列を $\gamma: M_1 \leftrightarrow^* M_n$ と略記し，$\mathcal{R}(\gamma) = \{u_1, \cdots, u_{n-1}\}$ は $\gamma$ の簡約位置の集合とする．最外位置 $\varepsilon$ が $\gamma$ の簡約位置でないとき，$\gamma$ を $\varepsilon$ **不変**と呼ぶ．$\mathcal{R}(\gamma) \geq W$ のとき，$\gamma: M_1 \overset{\geq W}{\leftrightarrow^*} M_n$ と書く．位置の集合 $U$ 中で位置 $u$ が**極小**であるとは，すべての $v \in U$ において $v \not< u$ が成立するときである．$\min(U)$ を $U$ の極小位置の集合とする．

**定義 1**[13)] 項 $M$ と $N$ の対を $M \approx N$ と表記する．$M \simeq N$ を，$M \approx N$ または $N \approx M$ を表すのに用いる．$\gamma: M\theta \leftrightarrow^* N\theta$ である代入 $\theta$ と書換え系列 $\gamma$ が存在するならば $M \approx N$ は TRS $R$ における書換えの合同関係を法として単一化可能（あるいは単に $R$ **単一化可能**）である．このような $\theta$ と $\gamma$ をそれぞれ，$M \approx N$ の $R$ **単一化子**，**証明**と呼ぶ．また，$\Gamma \subseteq T \times T$ について，$\theta$ が $\Gamma$ の $R$ 単一化子であるとは，$\theta$ が $\Gamma$ のすべての項対 $M_i \approx N_i$ の $R$ 単一化子であるときである．$\Gamma$ の $R$ 単一化子が存在するとき，$\Gamma$ は $R$ 単一化可能であるという．$R$ 単一化可能性の特別な場合として，$M\theta = N\theta$ である代入 $\theta$ が存在するならば $M \approx N$ は $\emptyset$ 単一化可能である，すなわち，$\emptyset$ 単一化可能性は通常の単一化可能性と同じである．

**定義 2**[13)] 代入 $\theta$ と $\theta'$ が**無矛盾**であるとは，任意の $x \in Dom(\theta) \cap Dom(\theta')$ について $x\theta = x\theta'$ が成立するときである．

**定義 3** 規則 $\alpha \to \beta$ について $\beta \in G$ ならば**右定項規則**，$\beta \in X$ ならば**縮退規則**と呼ぶ．任意の規則 $\alpha \to \beta \in R$ と $x \in X$ について $|\mathcal{O}_x(\beta)| \leq 1$ ならば TRS $R$ を**右線形**，$|\mathcal{O}_x(\alpha)| \leq 1$ かつ $|\mathcal{O}_x(\beta)| \leq 1$ ならば**線形**であるという．任意の規則 $\alpha \to \beta \in R$ について $H(\beta) \leq 1$ ならば TRS $R$ は**単項的**であるという．$R$ 中のすべての規則が右定項規則もしくは縮退規則ならば TRS $R$ は**単純**であるという．

単純 TRS の例を示す．$R_1 = \{and(x, x) \to x,$
$and(not(x), x) \to f, eq(x, x) \to t,$
$eq(not(x), x) \to f, t \to not(f), f \to not(t)\}$．$R_1$ は合流性を満たす[4),5)]．以後，例を示すときの TRS はこの $R_1$ を用いる．

## 3. 単項的 TRS における $R$ 単一化問題の決定不能性

**定理 4** 合流性および停止性を満たす，単項的線形 TRS における単一化問題は決定不能である．

**証明** 決定不能問題であることが知られている，ポストの対応問題（PCP）に還元可能であることを示

す．PCP $P=\{\langle u_i,v_i\rangle\in\Sigma^*\times\Sigma^*\mid 1\le i\le k\}$ とする．対応する TRS $R_P$ を次の方法で構成する：$F_1=\Sigma\cup\{1,\cdots,k\}$，$F_3=\{f\}$ として，$R_P=\{f(i(x),\ u_i(y),v_i(z))\to f(x,y,z)\mid 1\le i\le k\}$．ここで，$su(x)=s(u(x))$，ただし $s\in\Sigma,u\in\Sigma^+$ とする．$R_P$ は線形かつ単項的である．また，線形かつ重なりがないことより，合流性を満たし，書換えごとにサイズが真に減少することより，$R_P$ の停止性を容易に示せる．$\$\in F_0$ とする．$R_P$ において，ある $i(1\le i\le k)$ が存在して，$f(i(x),y,y)\approx f(\$,\$,\$)$ が単一化可能であることと，PCP $P$ が解を持つことの同値性を容易に示せる（この証明の詳細については付録の A.1 を参照）．よって，合流性および停止性を満たす単項的線形 TRS における単一化問題は決定不能である． □

## 4. $R$ 単一化アルゴリズムのための準備

### 4.1 標準化，単項化，定数間ショートカット

以下では，合流性を満たす単純 TRS における単一化問題について考察する．この TRS を，より扱いやすい等価な TRS に変換するために，次に述べる標準化，単項化，定数間ショートカットの追加の 3 つの前処理を行う．

**定義 5**[13] 任意の規則 $\alpha\to\beta\in R$ について $|\alpha|=1$ または $|\beta|=1$ ならば TRS $R$ は**標準的**であるという．

$R=\{\alpha_1\to\beta_1,\cdots,\alpha_n\to\beta_n\}$ を単純 TRS とする．対応する標準 TRS $R'$ を次の方法で構成する．$c_1,\cdots,c_n$ を $R$ 中に現れない新しい相異なる定数とし，$R'=\{\alpha_i\to c_i,c_i\to\beta_i\mid\beta_i\in G,1\le i\le n\}\cup\{\alpha_i\to\beta_i\mid\beta_i\in X,1\le i\le n\}$．たとえば，$f(x)\to f(g(c))$ を，新しい 2 つの規則 $f(x)\to c_1,c_1\to f(g(c))$ で置き換える．

$R$ と $R'$ について，次の補題が成立する．

**補題 6**

(i) $R$ が合流性を満たすことと $R'$ が合流性を満たすことは同値である．

(ii) $c_1,\cdots,c_n$ を含まない任意の項 $M$，$N$ について，$M\approx N$ が $R$ 単一化可能であることと $M\approx N$ が $R'$ 単一化可能であることは同値である．

**証明** 文献 12) における，縮退規則が存在しない場合の証明と同様． □

$R_k$ を単純標準 TRS とする．$R_k$ 中に右辺の高さが 1 を超える規則が存在するとき，その高さが 1 減少している TRS $R_{k+1}$ を次の方法で構成する．$c_{11},\cdots,c_{mn}$ を $R_k$ 中に現れない新しい相異なる定数とする．ここで，$m=\max\{\mathbf{a}(f)\mid f\in F\},n=|R_k|$．$R_{k+1}=\{\alpha_j\to f_j(c_{1j},\cdots,c_{ij}),c_{1j}\to M_{1j},\cdots,c_{ij}\to M_{ij}\mid\alpha_j\to\beta_j\in R_k,\beta_j=f_j(M_{1j},\cdots,M_{ij}),H(\beta_j)>1\}\cup\{\alpha_j\to\beta_j\in R_k\mid H(\beta_j)\le 1\}$．この操作を $\max\{H(\beta)\mid\alpha\to\beta\in R'\}-1$ 回繰り返すことで，単純標準 TRS $R'$ に対応する単項的 TRS $R''$ を構成する．たとえば，$c_1\to f(g(c))$ を，新しい規則 $c_1\to f(c_2)$，$c_2\to g(c)$ で置き換える．

$R_k$ と $R_{k+1}$ について，次の補題が成立する．

**補題 7**

(i) $R_k$ が合流性を満たすことと $R_{k+1}$ が合流性を満たすことは同値である．

(ii) $c_{11},\cdots,c_{mn}$ を含まない任意の項 $M$，$N$ について，$M\approx N$ が $R_k$ 単一化可能であることと $M\approx N$ が $R_{k+1}$ 単一化可能であることは同値である．

**証明** 付録 A.2 を参照． □

$R''$ を単項化された単純標準 TRS とする．$R''$ に，合流可能な定数間のショートカットを追加する．このような TRS $R'''$ は次の方法で構成する．$R'''=R''\cup\{c\to d\mid c,d\in F_0,c\downarrow_{R''}d\}$．

単項的右線形 TRS において，任意の項 $M$，$N$ について $M\downarrow N$ であるか否かは決定可能なので[9),14)]，$c\downarrow_{R_n}d$ であるか否かは決定可能である．

$R''$ と $R'''$ について，次の補題が成立する．

**補題 8**

(i) $R''$ が合流性を満たすことと $R'''$ が合流性を満たすことは同値である．

(ii) 任意の項 $M$，$N$ について，$M\approx N$ が $R''$ 単一化可能であることと $M\approx N$ が $R'''$ 単一化可能であることは同値である．

これらの補題より，一般性を失うことなく，合流性を満たす単純 TRS $R$ は標準化，単項化され，定数間ショートカットが追加されていることを仮定できる．

**定義 9** 項 $M$ について，$\mathcal{L}(M)=\{M'\mid M'\downarrow M\}$，$\mathcal{L}_{Bound}(M)=\{M'\in\mathcal{L}(M)\mid H(M')\le H(M),V(M')\subseteq V(M)\}$ とする．

関数記号の集合が有限であることから，任意の $M$ について，$\mathcal{L}_{Bound}(M)$ は有限である．また，$M'\in\mathcal{L}(M)$ であるか否かが決定可能であることから[9),14)]，$\mathcal{L}_{Bound}(M)$ は計算可能である．

**定義 10** 右定項規則による簡約を $\to_{\mathrm{cf}}$ と書く☆．

**補題 11** $M$，$N$ を任意の項とする．

(i) 任意の $\gamma:M\to^*_{\mathrm{cf}}N,u\in\mathcal{O}(N)$ について，

☆ 略称 cf は “collapsing free”（非縮退）に由来している．

$v < u$ である $v \in \mathcal{R}(\gamma)$ が存在するならば，ある定数 $c$ が存在し $c \to^*_{\mathrm{cf}} N_{|u}$ が成立する．

(ii) $M \to^* N$ ならば，ある $M' \in \mathcal{L}_{Bound}(M)$ が存在して $M' \to^*_{\mathrm{cf}} N$ が成立する．

**証明** (i) TRS が標準的，単項的であるという仮定より，ある $L'$，$v' < u$，右定項規則 $d \to f(c_1, \cdots, c_n)$ が存在して，次の 2 つの条件 (a)，(b) が成立する．(a) $M \to^*_{\mathrm{cf}} L'[d]_{v'} \to_{\mathrm{cf}} L'[f(c_1, \cdots, c_n)]_{v'}$，(b) ある $i(1 \leq i \leq n)$ において，$u = v'i$ かつ $c_i \to^*_{\mathrm{cf}} N_{|u}$．ここで，$d, c_1, \cdots, c_n$ は定数．条件 (b) より，$c_i$ を $c$ とすることで補題が成立する．

(ii) **命題** "$M \to^*_{\mathrm{cf}} L[\alpha\sigma]_p \to L[\beta\sigma]_p$ かつ $\alpha \to \beta$ が縮退規則ならば，ある $M' \in \mathcal{L}_{Bound}(M)$ が存在して $M' \to^*_{\mathrm{cf}} L[\beta\sigma]_p$ が成立する" を示せば，$M \to^* N$ 中の縮退簡約の数に関する帰納法で容易に証明できる．$\gamma\colon M \to^*_{\mathrm{cf}} L[\alpha\sigma]_p$，$u \in \mathcal{O}_\beta(\alpha)$ とする．

(A) $p = \varepsilon$ の場合．(a) $v < u$ である $v \in \mathcal{R}(\gamma)$ が存在するとき，(i) より，ある定数 $c$ が存在して $c \to^*_{\mathrm{cf}} \alpha\sigma_{|u}$ を満たす．ここで，$\alpha\sigma_{|u} = \beta\sigma$ より，$c \to^*_{\mathrm{cf}} \beta\sigma$．したがって，$c \downarrow M$ が成立する．よって，この $c$ を $M'$ とすることで命題が成立する．(b) $v < u$ である $v \in \mathcal{R}(\gamma)$ が存在しないとき，$M_{|u} \to^*_{\mathrm{cf}} \alpha\sigma_{|u} = \beta\sigma$．したがって，$M \downarrow M_{|u}$ が成立する．よって，この $M_{|u}$ を $M'$ とすることで命題が成立する．

(B) $p \neq \varepsilon$ の場合．(a) $v < p$ である $v \in \mathcal{R}(\gamma)$ が存在するとき，(i) より，ある定数 $c$ が存在して $c \to^*_{\mathrm{cf}} \alpha\sigma$ を満たすので，$c \to^*_{\mathrm{cf}} \alpha\sigma \xrightarrow{\varepsilon} \beta\sigma$ が成立する．したがって，(A) よりある定数 $c'$ が存在して $c' \to^*_{\mathrm{cf}} \beta\sigma$ が成立する．合流する定数間にはショートカットがあるという仮定より，$c \to c'$．よって，$M$ を $M'$ とすることで命題が成立する．(b) $v < p$ である $v \in \mathcal{R}(\gamma)$ が存在しないとき，$M_{|p} \to^*_{\mathrm{cf}} \alpha\sigma \xrightarrow{\varepsilon} \beta\sigma$．(A) より，ある $M'' \in \mathcal{L}_{Bound}(M_{|p})$ が存在して $M'' \to^*_{\mathrm{cf}} \beta\sigma$ が成立する．よって，$M[M'']_p$ を $M'$ とすることで命題が成立する． □

以下の例では，2 章の TRS $R_1$ を用いる．

**例 12** $and(t,t)(= M) \to^*_{\mathrm{cf}} and(not(f), not(f)) \to^*_{\mathrm{cf}} and(not(not(t)), not(not(t))) \to not(not(t))$ のとき，$t$ を $M'$ とすると $t \in \mathcal{L}_{Bound}(and(t,t))$ かつ $t \to_{\mathrm{cf}} not(f) \to_{\mathrm{cf}} not(not(t))$ より，補題 11 の (ii) が成立する．

補題 11 より，次の系が得られる．

**系 13** 任意の $c \to^* M$ について，$c \to^*_{\mathrm{cf}} M$．

**定義 14** $M \to^* N$ について，$M' \to^*_{\mathrm{cf}} N$ を満たす $M' \in \mathcal{L}_{Bound}(M)$ を，$M$ の**補助項**と呼ぶ．

この補助項は，5 章で述べる $R$ 単一化アルゴリズムにおいて書換え系列を推測する際，縮退簡約を回避するために用いる．

### 4.2 最 小 項

**定義 15** 項 $M$ について $H_m$ $(M)$ を多重集合 $\{H(M_{|u}) \mid u \in \mathcal{O}(M)\}_m$ として定義する．たとえば，$H_m(f(x, g(y))) = \{0, 0, 1, 2\}_m$．多重集合を $\{\cdots\}_m$，多重集合の和集合を $\sqcup$ と表記する．$\ll$ を通常の $\mathcal{N}$ 上の関係 $<$ の多重集合への拡張，$\lll$ を $\ll \cup =$ とする．$\#(M) = (H_m(M), \mathbf{g}(M))$ とする．$\mathbf{g}$ は項に対応づけられた自然数を返す関数である．任意の項 $M$，$N$ について $\#(M)$ と $\#(N)$ を比較するために，辞書式順序 $<_{lex}$ を用いる．ここで，$<_{lex}$ は全順序関係である．項 $M_0$ が $\mathcal{L}(M)$ 中で**最小**であるとは，$M_0 \in \mathcal{L}(M)$ かつ $\#(M_0) = \min\{\#(M') \mid M' \in \mathcal{L}(M)\}$ が成立するときである．このとき，合流性より $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M_0)$ が成立するため，$M_0$ は $\mathcal{L}(M_0)$ 中で最小である．以後，項 $M_0$ を単に最小というときは，この意味で用いる．

文献 13) では極小 "$\mathcal{L}_{min}(M) = \{N \in \mathcal{L}(M) \mid \forall N' \in \mathcal{L}(M).\ H_m(N) \lll H_m(N')\}$" の概念が用いられていたが，本論文では，アルゴリズムの妥当性（後述）の証明を簡単化するため，最小の概念を導入する．

次の補題が成立する．

**補題 16** $M$ を最小，$\gamma\colon M \to^* N$ とすると，$\mathcal{R}(\gamma) \geq \mathcal{O}_{Leaf}(M)$（すなわち，$M$ の最内記号のみが $\gamma$ 中で書き換わる）．

**証明** $M$ の高さに関する帰納法で証明する．$H(M) = 0$ のとき，明らかに成立．$H(M) > 0$ のとき，$M \to^* N$ が $\varepsilon$ 不変であることを示せばよい．$M \to^* \alpha\sigma \to \beta\sigma$ と逆に仮定する．ここで，$\gamma' : M \to^* \alpha\sigma$ は $\varepsilon$ 不変とする．$\beta \in G$ のとき，TRS が標準であるという仮定および $\gamma'$ が $\varepsilon$ 不変であることから，$H(\beta) = 0$．よって，$M$ の最小性に矛盾する．$\beta \in X$ のとき，$u \in \mathcal{O}_\beta(\alpha)$ とする．明らかに $u \neq \varepsilon$．(i) $v < u$ である $v \in \mathcal{R}(\gamma)$ が存在するとき，帰納法の仮定より，ある $v' \in \mathcal{O}_{Leaf}(M)$ が存在して $v' \leq v$ かつ $M_{|v'} \to^* \alpha\sigma_{|v'}$ が成立する．系 13 より，$M_{|v'} \to^*_{\mathrm{cf}} \alpha\sigma_{|v'}$．補題 11 の (i) より，ある定数 $c$ が存在して $c \to^*_{\mathrm{cf}} \alpha\sigma_{|u}$ が成立するので，$\alpha\sigma_{|u} = \beta\sigma$ より，$M$ の最小性に矛盾する．(ii) $v < u$ である $v \in \mathcal{R}(\gamma)$ が存在しないとき，$M \downarrow M_{|u}$ が成立する．$u \neq \varepsilon$ より，$M$ の最小性に矛盾する． □

**例 17** $t$ および $and(t,x)$ が最小であるのは，定義より明らかである．$\mathcal{O}_{Leaf}(and(t,x)) = \{1, 2\}$ であり，$and(t,x) \xrightarrow{1} and(not(f), x) \xrightarrow{11} and(not(not(t)), x)$

$\stackrel{111}{\to}\cdots$ のように，$and(t,x)$ からの簡約はすべて 1 以上の位置で行われる．

**補題 18**

(i) $M_0$ を最小項とすると，任意の $M \in \mathcal{L}(M_0)$ について，$V(M_0) \subseteq V(M)$．

(ii) 任意の項 $M$ について，$\mathcal{L}(M)$ 中の最小項は計算可能である．

**証明** (i) 定義より，ある項 $L$ が存在して $M \to^* L$ かつ $M_0 \to^* L$ が成立する．明らかに $V(L) \subseteq V(M)$．補題 16 より，$M_0$ からの簡約では最内記号しか書き換わらないため，$V(M_0) = V(L)$．よって，$V(M_0) \subseteq V(M)$．

(ii) $M_0$ を $\mathcal{L}(M)$ 中の最小項とすると，定義より，$H_m(M_0) \le H_m(M)$．(i) より，$V(M_0) \subseteq V(M)$．よって，$M_0 \in \mathcal{L}_{Bound}(M)$．$\mathcal{L}_{Bound}(M)$ が有限かつ計算可能であることより，$M_0$ は計算可能． □

### 4.3 局所最小単一化子と型つき項対

**定義 19** $\Gamma \subseteq T \times T$ とする．**代入 $\theta$ が $\Gamma$ の局所最小 $R$ 単一化子**であるとは，$\theta$ が $\Gamma$ の $R$ 単一化子であり，かつ任意の $x \in Dom(\theta)$ について $x\theta$ が最小となるときである．

本論文では，項対 $M \approx N$ を入力としてとり，$M \approx N$ が $R$ 単一化可能であるとき，かつそのときに限り $M \approx N$ の局所最小単一化子 $\theta$ を生成する単一化アルゴリズムを与える．アルゴリズムを記述するうえで，$\rhd_U$ 型，vf 型と呼ぶ型つきの項対が必要となる．

**定義 20**[13] $E_0 = \{M \approx N, M \rhd_U N, M \approx_{\mathrm{vf}} N$, **fail** $\mid \mathcal{O}_X(N) \subseteq U \subseteq \mathcal{O}(N), U$ は排反位置の集合$\}$．ここで，**fail** は特殊記号であり，**fail** の $R$ 単一化子は存在しないことを仮定する．$\Gamma \subseteq E_0$ について，$\Gamma[L/x] = \{M[L/x] \approx N[L/x] \mid M \approx N \in \Gamma\} \cup \{M[L/x] \rhd_U N[L/x] \mid M \rhd_U N \in \Gamma\} \cup \{M[L/x] \approx_{\mathrm{vf}} N[L/x] \mid M \approx_{\mathrm{vf}} N \in \Gamma\} \cup \{\mathbf{fail} \mid \mathbf{fail} \in \Gamma\}$ とする．

これらの型つきの対の $R$ 単一化子は，それぞれの追加条件を満たす必要がある．

**定義 21**[13] 代入 $\theta$ が $M \approx N$ の（局所最小）$R$ 単一化子であり，かつある項 $L$ について書換え系列 $\gamma\colon M\theta \to^* L \stackrel{\ge U}{\leftrightarrow^*} N\theta$ が存在するならば **$\theta$ は $M \rhd_U N$ の（局所最小）$R$ 単一化子**である．ただし，$U = \emptyset$ のとき $\gamma\colon M\theta \to^* N\theta (= L)$ である．

代入 $\theta$ が $M \approx N$ の（局所最小）$R$ 単一化子であり，かつある系列 $\gamma\colon M\theta \leftrightarrow^* N\theta$ が存在して $\mathcal{O}_X(N)$ が $\gamma$ 中で境界をなす，すなわち，任意の $u \in \mathcal{R}(\gamma)$ と $v \in \mathcal{O}_X(N)$ について $u|v$ または $v \le u$ が成立するならば，**$\theta$ は $M \approx_{\mathrm{vf}} N$ の $R$ 単一化子**である．

$U = \{\varepsilon\}$ ならば，定義より $\theta$ が $M \rhd_{\{\varepsilon\}} N$ の（局所最小）単一化子であることと $\theta$ が $M \approx N$ の（局所最小）単一化子であることは同値である．よって，$M \rhd_{\{\varepsilon\}} N$ は $M \approx N$ に置き換えることにして，$E_0$ から除外する．

**例 22**

（1） $and(f, not(not(t))) \rhd_{\{1,21\}} and(y, not(y))$ は，$y\theta = f$ を満たす代入 $\theta$ が $R_1$ 単一化子であることより $R_1$ 単一化可能である：$and(f, not(not(t))) \stackrel{21}{\leftarrow} and(f, not(f))$

（2） $and(t, not(t)) \approx_{\mathrm{vf}} and(not(f), y)$ は，$y\theta = f$ を満たす代入 $\theta$ が $R_1$ 単一化子であることより $R_1$ 単一化可能である：$and(t, not(t)) \stackrel{1}{\to} and(not(f), not(t)) \stackrel{2}{\leftarrow} and(not(f), f)$

型づけされた対を型なしの対に変換する関数 core を定義する．

**定義 23**[13] $\Gamma \subseteq E_0$ について，$\mathrm{core}(\Gamma) = \{M \approx N \mid M \approx N \in \Gamma$，$M \rhd_U N \in \Gamma$ または $M \approx_{\mathrm{vf}} N \in \Gamma\} \cup \{\mathbf{fail} \mid \mathbf{fail} \in \Gamma\}$．

## 5. 単純 TRS における $R$ 単一化アルゴリズム

この章では，合流性を満たす単純 TRS における $R$ 単一化アルゴリズム $\Phi$ を与える．文献 13) の単一化アルゴリズムは，合流性を満たす右定項 TRS に対して定義されているものなので，入力 TRS の中に縮退規則が含まれる場合，停止性と妥当性が保証されなくなる．本アルゴリズムは，文献 13) のアルゴリズムの拡張であり，縮退規則を許しても停止性と妥当性を保証するものである．本アルゴリズムはいくつかの変換規則より構成される．各変換規則は項対の有限集合 $\Gamma \subseteq E_0$ を受け取り，ある $\tilde{\Gamma} \subseteq E_0$ を生成する．これを $\Gamma \Rightarrow_\Phi \tilde{\Gamma}$ と表記する．この変換規則を非決定的に適用する：$\Gamma \Rightarrow_\Phi \Gamma_1, \Gamma \Rightarrow_\Phi \Gamma_2, \cdots, \Gamma \Rightarrow_\Phi \Gamma_k$，ここで $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_k \subseteq E_0$．このとき，$\Phi$ を関数として見なし $\Phi(\Gamma) = \{\Gamma_1, \cdots, \Gamma_k\}$ と書く．$\Rightarrow_\Phi^*$ を $\Rightarrow_\Phi$ の反射推移閉包とする．本アルゴリズムは $\Gamma_0 = \{M_0 \approx N_0\}$ から開始し変換規則を繰り返し適用する．

本アルゴリズムは 3 つの段階からなる．第 1 段階は $\Gamma$ 中のある項対について，その項間で適用される書換え規則を推測し，$\Gamma$ を異なる $\tilde{\Gamma}$ に変換することを繰り返し行う．最終的に，第 1 段階は $\Gamma$ を vf 型の対の集合 $\Gamma_1$ に変換し，これが次の第 2 段階の入力となる．第 2 段階は通常の $\emptyset$ 単一化アルゴリズムと同様で，vf 型の対の集合 $\Gamma$ が後述する解形式であれば停止する．最終段階は解形式中の $\Gamma$ の $\emptyset$ 単一化可能

性，すなわち，$\Gamma$ の非循環性を調べるのみである．

$\Phi(\Gamma)=\{\Gamma_1,\cdots,\Gamma_k\}$ とすると，変換 $\Phi$ は，$\theta$ が $\Gamma$ の局所最小 $R$ 単一化子ならば，ある $i\ (1\le i\le k)$ と代入 $\theta'$ が存在して，$\theta'$ は $\theta$ と無矛盾であり，かつ $\Gamma_i$ の局所最小 $R$ 単一化子である，という条件を満たす．さらに，$\mathrm{core}(\Gamma_i)$ が $R$ 単一化可能である $i\ (1\le i\le k)$ が存在するならば，$\mathrm{core}(\Gamma)$ が $R$ 単一化可能であるという条件を満たす．この性質を使うことで，$\Gamma_0$ が $R$ 単一化可能であるとき，かつそのときに限り $\Gamma$ が $\emptyset$ 単一化可能である系列 $\Gamma_0\Rightarrow^*_\Phi\Gamma$ の存在を示す．

### 5.1 第 1 段 階

$R$ 単一化アルゴリズムの第 1 段階の変換 $\Phi_1$ は項対の有限部分集合 $\Gamma\subseteq E_0$ を入力としてとり，変換 $\Gamma\Rightarrow_{\Phi_1}\Gamma_1,\cdots,\Gamma\Rightarrow_{\Phi_1}\Gamma_k$ を非決定的に行う．ここで $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_k\subseteq E_0$，$k\in\mathcal{N}$，すなわち，$\Phi_1$ は有限分枝である．アルゴリズムの正当性を保証するためにすべての可能性を考慮する．

初期状態 $\Gamma=\{M_0\approx N_0\}$ から開始し，$\Gamma$ が $\emptyset$ になるか，**fail** または少なくとも 1 つの vf 型の項対を含むまで，変換 $\Phi_1$ を繰り返し適用する．この条件を第 1 段階の**停止条件**と呼び，以下に定義する．

$$\Gamma\cap\{\mathbf{fail}, M\approx_{\mathrm{vf}}N\mid M,N\in T\}\neq\emptyset\ \text{または}\ \Gamma=\emptyset$$

$\Gamma$ がこの条件を満たすならば，$\Gamma$ は次の段階の入力となる．

第 1 段階で使われる変形を表記するために必要な補助関数を，次に定義する．

$$\begin{aligned}&\mathrm{decompose}(M,N,U)\\ &=\{M_{|i}\rhd_{U/i}N_{|i}\mid 1\le i\le k, i\notin U\}\\ &\quad\cup\{M_{|i}\approx N_{|i}\mid 1\le i\le k, i\in U\}\end{aligned}$$

ここで $k=\mathbf{a}(\mathrm{root}(M))$，$U/i=\{u\mid iu\in U\}$（特に $\emptyset/i=\emptyset$ である）．

第 1 段階では，非決定的に，転換を適用，または $\Gamma\setminus X\times X$ 中の要素 $p$ を選び，下記の分類に従って変換（TT，TL$_\to$，GG，VG，VT）の 1 つを適用する．転換および変換は文献 13) の変換（付録 A.3 参照）を基礎としている．転換を適用することで得られる項対は，第 1 段階の停止条件を満たす．変換を適用する場合は，$p=M\approx N$ のとき，$M$，$N$ をそれぞれ 3 通りに分類し，適用する変換を次のとおりに与える．

| | | $N$: $S$ | $G$ | $X$ |
|---|---|---|---|---|
| | $S$ | TT | TT | VT |
| $M$ | $G$ | TT | GG | VG |
| | $X$ | VT | VG | – |

表の分類に従い，$M\approx N\in S\times(S\cup G)\cup G\times S$ のとき，$M\approx N$ は TT 条件を満たすという．VT，GG，VG 条件についても同様の意味で用いる．$p=M\rhd_U N$ のとき，適用する変換は次のとおり．

| | | $N$: $S$ | $G$ |
|---|---|---|---|
| | $S$ | TL$_\to$ | TL$_\to$ |
| $M$ | $G$ | TL$_\to$ | GG ($U=\emptyset$ のとき)<br>TL$_\to$ ($U\neq\emptyset$ のとき) |
| | $X$ | VT | VG |

可能な変換が存在しなければ，$\Gamma\Rightarrow_{\Phi_1}\{\mathbf{fail}\}$．

$\Gamma'=\Gamma\setminus\{p\}$ とする．以下の変換の説明において，$\theta$ は $p$ の局所最小単一化子であることを仮定している．

以下では，本論文において変更を必要とする変換についてのみ述べる．

#### 5.1.1 TT 変 換

TT 変換の 1 と 2 については，文献 13) と同じである（付録 A.3 参照）．よって，TT 変換の 3 について述べる．すなわち，$M\in G$ の場合である．この変換では，ある項 $L$ について $\gamma\colon M\to^* L\leftarrow^* N\theta$ を推測する．ここで，補題 11 より，補助項 $M'\in\mathcal{L}_{Bound}(M)$ が存在して $M'\to^*_{\mathrm{cf}}L\leftarrow^* N\theta$ が成立する．

$M'\in\mathcal{L}_{Bound}(M)$ を非決定的に 1 つ選び☆

3.a. $\mathrm{root}(M')=\mathrm{root}(N)$ のとき，$M'\approx N$ に対して TT 変換の 1 を 1 回行う．
ここでは，$M'\downarrow N\theta$ が $\varepsilon$ 不変であることを推測している．

3.b. $M'\to^+\beta$ かつ $\beta\in G$ を満たす規則 $\alpha\to\beta\in R$ を選び
$$\Gamma'\cup\{p\}\Rightarrow_{\Phi_1}\Gamma'\cup\{\beta\approx N\}$$
さらに $N\approx\beta$ に対して TT 変換の 1 か 2 を 1 回行う．$M'\to^+\beta$ であるか否かは決定可能である[9),14)]．
ここでは，$\gamma'\colon M'\to^*\alpha\sigma\to\beta\downarrow N\theta$ 中で $\alpha\sigma\to\beta$ が最右 $\varepsilon$ 簡約であることを推測している．

**例 24** $and(t,t)$ の補助項 $t$ と，規則 $t\to not(f)$ を選ぶと，
$$\{and(t,t)\approx not(y)\}\Rightarrow_{\Phi_1}\{not(f)\approx not(y)\}$$
その後 $not(y)\approx not(f)$ に対して TT 変換の 1 を適用することで，$\{y\approx f\}$ を得る．

#### 5.1.2 TL$_\to$ 変換

TL$_\to$ 変換の 1 と 2 については文献 13) と同じであ

☆ 以後，単に選ぶというときは，非決定的に 1 つ選ぶことを意味する．

る（付録 A.3 参照）．$\mathrm{TL}_{\rightarrow}$ 変換の 3，すなわち $M \in G$ の場合は 5.1.1 項の 3 と同様のものに変更する（すなわち，補助項を用いて，縮退簡約の規則を回避する方法に変更する）．

#### 5.1.3 VG 変換

1. $p = x \simeq M$ が VG 条件を満たすとき，
$$\Gamma' \cup \{p\} \Rightarrow_{\Phi_1} \Gamma'[M_0/x]$$
ここで，$M_0$ は $\mathcal{L}(M)$ 中の最小項．
2. $p = x \rhd_U M$ が VG 条件を満たすとき，
$$\Gamma' \cup \{p\} \Rightarrow_{\Phi_1} \Gamma'[M_0/x] \cup \{M_0 \rhd_U M\}$$
ここで，$M_0$ は $\mathcal{L}(M)$ 中の最小項．

**例 25** $p = y \approx and(t,t)$ を選ぶと，$M_0 = t$，
$$\{y \approx and(t,t), eq(y, not(y)) \approx f\} \Rightarrow_{\Phi_1}$$
$$\{eq(t, not(t)) \approx f\}$$

#### 5.1.4 VT 変換

1. $p = x \simeq M$ が VT 条件を満たすとき，次の 2 つの場合からいずれかを選ぶ．ここでは，合流系列 $\gamma{:}\, x\theta \downarrow M\theta$ が存在することを推測する．$M_{|v} \in S$ である位置 $v \in \mathcal{O}(M)$ を選び，次の 1.a または 1.b の変換を行う．
   1.a. $c \in F_0$ を選び，
   $$\Gamma' \cup \{p\} \Rightarrow_{\Phi_1}$$
   $$\Gamma' \cup \{x \approx M[c]_v, c \approx M_{|v}\}$$
   $v = \varepsilon$ ならば，さらに $x \approx c$ に対して VG 変換（付録 A.3 参照）を適用する．この変換では，系列 $\gamma{:}\, x\theta \leftrightarrow^* M\theta$ に対して $v \in \min(\mathcal{R}(\gamma))$ を推測している．$\theta$ が $p$ の局所最小単一化子であるという仮定より $x\theta$ は最小項であり，補題 16 より $x\theta$ からの簡約では最内記号しか書き換わらないため，その最内記号 $x\theta_{|v} = c$ を推測している．
   1.b. $\mathrm{root}(M_{|v}) = \mathrm{root}(\alpha)$ を満たす規則 $\alpha \to \beta \in R$ を選び，
   $$\Gamma' \cup \{p\} \Rightarrow_{\Phi_1}$$
   $$\Gamma' \cup \mathrm{decompose}(M_{|v}, \alpha, \mathcal{O}_X(\alpha)) \cup \{M[\beta]_v \approx x\}$$
   この変換では，代入 $\sigma$ と $v \in \min(\mathcal{R}(\gamma))$ について系列 $x\theta \leftrightarrow^* M\theta[\beta\sigma]_v \overset{v}{\leftarrow} M\theta[\alpha\sigma]_v \leftarrow^* M\theta$ を推測する．
   この変換では，系列 $\gamma{:}\, x\theta \leftrightarrow^* M\theta$ に対して，$v \in \min(\mathcal{R}(\gamma))$ かつ $u \leq v$ である $u \in U$ が存在しないことを推測している．$\theta$ が $p$ の局所最小単一化子であるという仮定より $x\theta$ は最小項であり，補題 16 より $x\theta$ からは最内記号しか書き換わらないため，その最内記号 $x\theta_{|v} = c$ を推測している．
2. $p = x \rhd_U M$ が VT 条件を満たすとき，$M_{|v} \in S$ を満たす位置 $v \in \mathcal{O}(M)$ と，$c \in F_0$ を選び，
$$\Gamma' \cup \{p\} \Rightarrow_{\Phi_1}$$
$$\Gamma' \cup \{x \rhd_{U'} M[c]_v, c \rhd_{U/v} M_{|v}\}$$
ここで $U' = \{u \in U \mid u|v\}$，そして $v = \varepsilon$ ならば，$x \rhd_{\emptyset} c$ に対して VG 変換を適用する．

**例 26** $v = \varepsilon$ と定数 $t$ を選び VT 変換の 1.a を適用すると，
$$\{x \approx not(y)\} \Rightarrow_{\Phi_1} \{x \approx t, t \approx not(y)\}$$
その後，$x \approx t$ に対して VG 変換を適用する．
$v = \varepsilon$ と規則 $and(x,x) \to x$ を選び VT 変換の 1.b を適用すると，
$$\{and(y,t) \approx y\} \Rightarrow_{\Phi_1}$$
$$\mathrm{decompose}(and(y,t), and(x',x'), \{1,2\})$$
$$\cup \{x' \approx y\}$$
$$= \{y \approx x', t \approx x', x' \approx y\}$$

### 5.2 第 2 段階

第 2 段階における変換 $\Phi_2$ を次に定義する．$\Phi_2(\Gamma) \ni \tilde{\Gamma}$ ならば $\Gamma \Rightarrow_{\Phi_2} \tilde{\Gamma}$ と表記する．

第 1 段階の転換（付録 A.3 参照）で生成された $\Gamma$ から開始する．したがって，$\Gamma \subseteq \{x \approx_{\mathrm{vf}} L \mid L \in T \setminus G\}$ が成立する．そして，現在の $\Gamma$ が以下に定義する第 2 段階の**停止条件**を満たすまで，変換 $\Phi_2$ を繰り返し適用する．第 2 段階では，$\Gamma$ 中の任意の項対 $M \approx_{\mathrm{vf}} N$ について $M \in G \cup X$ を満たす．アルゴリズムの正当性を保証するためにすべての可能性を考慮する．$\Gamma$ が**停止条件**を満たすならば，最終段階で $\Gamma$ の $\emptyset$ 単一化可能性を調べる．

**定義 27** $\Gamma$ 中の任意の $x \approx_{\mathrm{vf}} P$ と $x \approx_{\mathrm{vf}} Q$ について，$P = Q$ かつ $P \notin X$ が成立するならば $\Gamma$ は**解形式**である．たとえば，$\{x \approx_{\mathrm{vf}} and(y',t), y \approx_{\mathrm{vf}} not(x')\}$ は解形式である．

第 2 段階の**停止条件**は $\Gamma$ が次の 2 つの条件のいずれかを満たすことである．

（1） 任意の $P \approx_{\mathrm{vf}} Q \in \Gamma$ について，$P \in X$ が成立し，$\Gamma$ が解形式である．

（2） $\Gamma = \{\mathbf{fail}\}$.

（$\Gamma = \emptyset$ は条件 (1) を満たす）．

第 2 段階の変換を表記するための尺度を定義する．

**定義 28** 項 $M$ について

$$\#_0(M) = \begin{cases} \{(|\mathcal{O}_X(M)|, H_m(M))\}_m \\ (V(M) \neq \emptyset \text{ のとき}) \\ \emptyset \\ (V(M) = \emptyset \text{ のとき}) \end{cases}$$

たとえば，$\#_0(and(x, not(x))) = \{(2, \{0,0,1,2\}_m)\}_m$．

$(i, J_m), (i', J'_m)$ に対しては，辞書式順序 $>$ を用いる．ここで，$i$，$i' \in \mathcal{N}$，$J_m$，$J'_m$ は $\mathcal{N}$ の多重部分集合．$\gg$ を $>$ の多重集合への拡張とする．

この尺度は 6 章で $\Gamma \subseteq E_0$ について $\mathrm{size}(\Gamma)$ を定義するためにも用いられる．文献 13) では $H_m$ ではなく $H$ が用いられていたが，VT 変換において縮退簡約を推測する際に $\mathrm{size}(\Gamma)$ が小さくなることを示せないので，$H_m$ を用いた尺度 $\#_0$ を新たに導入した．

**定義 29**[13)] 項 $P, Q \notin X$ について，非変数部分の整合性を調べるための述語 $\mathrm{common}(P, Q)$ を以下に定義する．$U = \min(\mathcal{O}_X(P) \cup \mathcal{O}_X(Q))$，$V = \min\{v \in \mathcal{O}_F(P) \cup \mathcal{O}_F(Q) \mid \forall u \in U.\, u|v\}$ とする．すべての $v \in V$ について $P_{|v}$ と $Q_{|v}$ は定項である．$\mathcal{O}(P) \cap \mathcal{O}(Q) \supseteq U \cup V$ かつすべての $v \in V$ について $P_{|v} \downarrow Q_{|v}$ かつ $P[c, \cdots, c]_{(v_1, \cdots, v_n)} = Q[c, \cdots, c]_{(v_1, \cdots, v_n)}$ ならば $\mathrm{common}(P, Q)$ は真，そうでなければ偽である．ここで，$c \in F_0$，$V \cup U = \{v_1, \cdots, v_n\}$．$P \downarrow Q$ であるか否かは決定可能である[9),14)]．たとえば，$P = f(M, x, M')$，$Q = f(N, N', y)$ とする．ここで，$M$，$N \in G$．この例では，$U = \{2, 3\}$，$V = \{1\}$．$P[c, c, c]_{(1,2,3)} = f(c, c, c) = Q[c, c, c]_{(1,2,3)}$ より，$M \downarrow N$ ならば，$\mathrm{common}(P, Q)$ は真．

第 2 段階では，最初に $\Gamma$ 中の要素 $p$ を非決定的に選び，その中の項の種類に対応した $\Gamma$ への変換（分解，VV，GT，VG，GG）を適用する．可能な変換が存在しなければ，$\Gamma \Rightarrow_{\Phi_2} \{\mathbf{fail}\}$．$\Gamma' = \Gamma \setminus \{p\}$ とする．

これらの変換は文献 13) の変換（付録 A.3 参照）を基礎としており，以下では，本論文において妥当性の証明を簡単化するために変更，追加した変換のみを述べる．

#### 5.2.1 分 解

$p = x \approx_{\mathrm{vf}} P (P \in S)$ であり，$P \neq Q$（ただし，$Q \in S$）かつ $\mathrm{common}(P, Q)$ が真になる項対 $q = x \approx_{\mathrm{vf}} Q \in \Gamma$ が存在するならば，

$$\begin{aligned}&\Gamma'' \cup \{p, q\} \Rightarrow_{\Phi_2}\\ &\Gamma'' \cup \{q\}\\ &\quad \cup \{P_{|u} \approx_{\mathrm{vf}} Q_{|u} \mid u \in U, P_{|u} \in X\}\\ &\quad \cup \{Q_{|u} \approx_{\mathrm{vf}} P_{|u} \mid u \in U, P_{|u} \notin X\}\end{aligned}$$

ここで $\Gamma'' = \Gamma' \setminus \{q\}$，$U = \min(\mathcal{O}_X(P) \cup \mathcal{O}_X(Q))$．ここでは，$\#_0(P) \underline{\gg} \#_0(Q)$ を仮定している☆．

**例 30** $\Gamma = \{p, q\}, p = x \approx_{\mathrm{vf}} and(not(x'), t), q = x \approx_{\mathrm{vf}} and(y, not(f))$ とする．$\mathrm{common}(and(not(x'), t), and(y, not(f)))$ かつ $\#_0(and(not(x'), t)) = \#_0(and(y, not(f))) = \{(1, \{0,0,1,2\}_m)\}_m$ より，次の分解を行える．

$$\{p, q\} \Rightarrow_{\Phi_2} \{q, y \approx_{\mathrm{vf}} not(x')\}$$

#### 5.2.2 VV 変 換

$p = x \approx_{\mathrm{vf}} y$ ならば，

(1) $\mathbf{g}(x) \leq \mathbf{g}(y)$ のとき，
$$\Gamma' \cup \{p\} \Rightarrow_{\Phi_2} \Gamma'[x/y]$$

(2) $\mathbf{g}(x) > \mathbf{g}(y)$ のとき，
$$\Gamma' \cup \{p\} \Rightarrow_{\Phi_2} \Gamma'[y/x]$$

**例 31** $\Gamma = \{p, x \approx_{\mathrm{vf}} and(x', t), x' \approx_{\mathrm{vf}} not(y)\}$，$p = x \approx_{\mathrm{vf}} x'$ とする．$\mathbf{g}(x) < \mathbf{g}(x')$ とすると，次の変換を行える．

$$\begin{aligned}&\{p, x \approx_{\mathrm{vf}} and(x', t), x' \approx_{\mathrm{vf}} not(y)\} \Rightarrow_{\Phi_2}\\ &\{x \approx_{\mathrm{vf}} and(x', t), x \approx_{\mathrm{vf}} not(y)\}\end{aligned}$$

これは新規に導入した変換である．最小の概念を導入したことで，この変換が可能となった．

#### 5.2.3 VG 変 換

$p = x \approx_{\mathrm{vf}} P$ または $p = P \approx_{\mathrm{vf}} x (P \in G)$ ならば，

$$\Gamma' \cup \{p\} \Rightarrow_{\Phi_2} \Gamma'[P_0/x]$$

ここで，$P_0$ は $\mathcal{L}(P)$ 中の最小項．

これは第 1 段階の VG 変換と同様である．

### 5.3 最 終 段 階

$\Gamma$ を第 2 段階の出力とする．$\Gamma$ が $\emptyset$ 単一化可能ならば，本アルゴリズムは '$R$ 単一化可能' と答え，そうでなければ $\Gamma \Rightarrow_{\Phi} \{\mathbf{fail}\}$ となる．

$\emptyset$ 単一化可能性は通常の単一化可能性と同じなので，任意の単一化アルゴリズム[3),8)]が使える．$\Gamma$ が第 2 段階の**停止条件**の (1) を満たすならば，$\Gamma$ は解形式であり，したがって，$\Gamma$ が非循環的であるとき，かつそのときに限り $\Gamma$ は単一化可能である[8)]．循環性の定義を次に与える．

**定義 32** $X$ 上の関係 $\mapsto$ を以下に与える．ある $P \in S$ が存在して $x \approx_{\mathrm{vf}} P \in \Gamma$ かつ $y \in V(P)$ が成立するとき，$x \mapsto y$．$\mapsto^+$ を $\mapsto$ の推移閉包とすると，$x \mapsto^+ x$ である $x$ が存在するならば $\Gamma$ は**循環的**である．

**$\Phi$ の正当性条件：**

(1) $\Rightarrow^*_{\Phi_1} \cdot \Rightarrow^*_{\Phi_2}$ が停止性を満たし，かつ有限分枝であり，

(2) $\Gamma_0 = \{M_0 \approx N_0\}$ が $R$ 単一化可能であるとき，かつそのときに限り $\Gamma_0 \Rightarrow^*_{\Phi_1} \Gamma_1 \Rightarrow^*_{\Phi_2} \Gamma_f$ である $\Gamma_1$ と $\Gamma_f$ が存在して，$\Gamma_1$ が第 1 段階の**停止条件**を満たし，$\Gamma_f$ が第 2 段階の**停止条件**を満たし，$\Gamma_f$ が $\emptyset$ 単一化可能である（すなわち，非循環的かつ $\Gamma_f \neq \{\mathbf{fail}\}$）．

☆ $\#_0(Q) \gg \#_0(P)$ ならば，$q$ のかわりに $p$ を残す．

$\Phi$ が非決定的アルゴリズムであることから，$\Gamma_0$ からのすべての変換系列 $\Rightarrow^*_{\Phi_1} \cdot \Rightarrow^*_{\Phi_2}$ を全探索する必要があるが，上述の (1) と (2) より，有限時間内に $\Gamma_0$ が $R$ 単一化可能であるか否かを決定できることが保証される．

本アルゴリズムは，$\Gamma_0$ が $R$ 単一化可能であるとき，かつそのときに限り $\Gamma_0$ の局所最小 $R$ 単一化子を生成するアルゴリズムに簡単に変更することができる．なぜなら，解形式の情報および，VV，VG 変換を行うときに得られる情報から $R$ 単一化子を構成できるからである．

## 6. アルゴリズム Φ の正当性

この章では，アルゴリズム $\Phi$ の正当性を証明するために必要な補題を証明する．準備として，次の定義を与える．

**定義 33** $\Phi\colon \mathcal{P}(E_0) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(E_0))$ を変換とすると，$\Phi$ が妥当であるとは次の妥当性条件 (V1) と (V2) が成立することである．任意の $\Gamma \subseteq E_0$ について，$\Phi(\Gamma) = \{\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n\}$ とする．

(V1) $\theta$ が $\Gamma$ の局所最小 $R$ 単一化子ならば，ある $i$ $(1 \leq i \leq n)$ と代入 $\theta'$ が存在して，$\theta'$ は $\theta$ と無矛盾であり，かつ $\Gamma_i$ の局所最小 $R$ 単一化子である．

(V2) $i$ $(1 \leq i \leq n)$ が存在して $\mathrm{core}(\Gamma_i)$ が $R$ 単一化可能ならば，$\mathrm{core}(\Gamma)$ は $R$ 単一化可能である．

### 6.1 第 1 段階の正当性

第 1 段階の停止性を証明するために，$\mathrm{size}(\Gamma)$ を $(\#_1(\Gamma), \#_2(\Gamma), \#_3(\Gamma), \#_4(\Gamma))$ と定義する．ここで，

$$\#_1(\Gamma) = \sqcup_{P \approx Q \in \Gamma}(\#_0(P) \sqcup \#_0(Q)) \sqcup (\sqcup_{P \rhd_U Q \in \Gamma} \#_0(P))$$

$$\#_2(\Gamma) = \sqcup_{P \rhd_U Q \in \Gamma} \#_0(Q)$$

$$\#_3(\Gamma) = \sqcup_{P \rhd_U Q \in \Gamma} \{|u| \mid u \in U\}_m$$

$$\#_4(\Gamma) = |\Gamma|$$

任意の $\Gamma, \Gamma' \subseteq E_0$ について $\mathrm{size}(\Gamma)$ と $\mathrm{size}(\Gamma')$ を比較するために，辞書式順序 $>$ を用いる．

**補題 34** 第 1 段階は停止性を満たし有限分枝である．

**証明** 第 1 段階中のすべての変換 $\Phi_1(\Gamma) = \{\Gamma_1, \cdots, \Gamma_k\}$ に対して，すべての $1 \leq i \leq k$ について $\mathrm{size}(\Gamma) > \mathrm{size}(\Gamma_i)$ が成立することを，以下の表に従って証明できる．

| | $\#_1$ | $\#_2$ | $\#_3$ | $\#_4$ |
|---|---|---|---|---|
| TT | $\gg$ | | | |
| TL$_\to$ の 1 | $\underline{\gg}$ | $\underline{\gg}$ | $\gg$ | |
| TL$_\to$ の 2 | $\gg$ | | | |
| TL$_\to$ の 3 | $\underline{\gg}$ | $\underline{\gg}$ | $\gg$ | |
| GG | $=$ | $=$ | $=$ | $>$ |
| VG | $\gg$ | | | |
| VT の 1 | $\gg$ | | | |
| VT の 2 | $\underline{\gg}$ | $\gg$ | | |

証明法は文献 12) の補題 4.2 と同様なため，詳細は略す．

また，$\Gamma$ が有限集合ならば，$k$ は有限である．すなわち，第 1 段階は有限分枝である．したがって，補題成立．□

**補題 35**

(i) 第 1 段階の変換 $\Phi_1$ は妥当である．

(ii) $\Gamma \subseteq E_0$ が $R$ 単一化可能であり，かつ第 1 段階の**停止条件**を満たさないならば，$\Phi_1(\Gamma) \neq \emptyset$．

**証明** $\theta$ を $\Gamma$ の局所最小 $R$ 単一化子とする．文献 13) の変換はこの補題を満たすことより，変更した変換のみについてこの補題を証明すれば十分である．$p \in \Gamma$ とする．

**TT 変換**

$p = M \simeq N$ は TT 条件を満たしているとする，すなわち，$M$，$N \notin X$ を満たし，$M \notin G$ または $N \notin G$．$M \in G$ の場合のみ変更したので，この場合についてのみ考える．このとき，$N \in S$ である．

(V1) $\theta$ が $p$ の局所最小単一化子であり，$R$ が合流性を満たすことから，ある項 $L$ について系列 $\gamma\colon M \to^* L \leftarrow^* N\theta$ が存在する．補題 11 より，補助項 $M' \in \mathcal{L}_{Bound}(M)$ が存在して，系列 $\gamma'\colon M' \to^*_{\mathrm{cf}} L \leftarrow^* N\theta$ が成立する．$\varepsilon \notin \mathcal{R}(\gamma')$ の場合は文献 13) の TT 変換の 1 を適用できるので，$\varepsilon \in \mathcal{R}(\gamma')$ の場合について考える．部分系列 $\overline{\gamma}\colon L \leftarrow^* N\theta$ が $\varepsilon$ 簡約を持つ場合も，文献 13) の TT 変換の 2 が適用できるので，部分系列 $\gamma''\colon M' \to^* L$ が $\varepsilon$ 簡約を持つ場合について考える．$\alpha\sigma \to \beta (\beta \in G)$ を $\gamma''$ の最右の $\varepsilon$ 簡約とすると，$M' \to^+ \beta$ である．したがって，$\Phi_1$ は次の変換を行える．

$$\Gamma (= \Gamma' \cup \{p\}) \Rightarrow_{\Phi_1} \Gamma' \cup \{\beta \approx N\} (= \tilde{\Gamma})$$

明らかに，$\theta$ は $\tilde{\Gamma}$ の局所最小 $R$ 単一化子である．その後 $\Phi_1$ は $N \approx \beta$ を TT 変換の 1 または 2 で変換できる．どちらの場合も，(V1) は成立する．

(V2) TT 変換の 3 を

$$\Gamma (= \Gamma' \cup \{p\}) \Rightarrow_{\Phi_1} \Gamma' \cup \{\beta \approx N\} (= \tilde{\Gamma})$$

とすると，$\mathrm{core}(\tilde{\Gamma}) = \mathrm{core}(\Gamma') \cup \{\beta \approx N\}$ が $R$ 単一化可能ならば，明らかに $\mathrm{core}(\Gamma) = \mathrm{core}(\Gamma') \cup \{p\}$ は $R$ 単一化可能.

$\mathrm{TL}_{\rightarrow}$ 変換についても同様に証明できる.

**VG 変 換**

$p = x \simeq M$ は VG 条件を満たしているとする，すなわち，$M \in G$ を満たす.

(V1) $\theta$ が $x \approx M$ の局所最小 $R$ 単一化子であることより，ある定項 $M_0$ が存在して，$x\theta = M_0$ かつ $M_0$ は $\mathcal{L}(M)$ の最小項. したがって，$\Phi_1$ は次の変換を行える.

$$\Gamma(= \Gamma' \cup \{p\}) \Rightarrow_{\Phi_1} \Gamma'[M_0/x](= \tilde{\Gamma})$$

任意の $P \approx Q \in \Gamma'$ について，系列 $P[M_0/x]\theta = P\theta \leftrightarrow^* Q\theta = Q[M_0/x]\theta$ が存在することから，$\theta$ は $P[M_0/x] \approx Q[M_0/x]$ の局所最小 $R$ 単一化子となる. 任意の $P \rhd_U Q \in \Gamma'$ について，系列 $P[M_0/x]\theta = P\theta \rightarrow^* \cdot \overset{\geq U}{\leftrightarrow^*} Q\theta = Q[M_0/x]\theta$ が存在することから，$\theta$ は $P[M_0/x] \rhd_U Q[M_0/x]$ の局所最小 $R$ 単一化子となる. よって，$\theta$ は $\tilde{\Gamma}$ の局所最小 $R$ 単一化子である.

(V2) VG 変換の 1 を

$$\Gamma(= \Gamma' \cup \{p\}) \Rightarrow_{\Phi_1} \Gamma'[M_0/x](= \tilde{\Gamma})$$

とすると，$\mathrm{core}(\tilde{\Gamma}) = \mathrm{core}(\Gamma'[M_0/x])$ が $R$ 単一化可能ならば，明らかに $\mathrm{core}(\Gamma) = \mathrm{core}(\Gamma') \cup \{p\}$ は $R$ 単一化可能.

$p = x \rhd_U M$ のとき，$\Phi_1$ は次の変換を行える.

$$\Gamma' \cup \{p\} \Rightarrow_{\Phi_1} \Gamma'[M_0/x] \cup \{M_0 \rhd_U M\}$$

これも同様に証明できる.

**VT 変 換**

$\Gamma \subseteq \{x \approx L, L \approx x, x \rhd_U L \mid L \in T \setminus G\}$ とする. すなわち，すべての項対が VT 条件を満たすとする.

(V1) $\theta$ が $\Gamma$ の局所最小 $R$ 単一化子であることから，$\Gamma$ 中の $x \simeq L, x \rhd_U L$ について $\gamma\colon x\theta \leftrightarrow^* L\theta$ が成立する. $\Gamma$ 中にある $p = x \simeq M$ または $p = x \rhd_U M$ が存在して，$\gamma\colon x\theta \leftrightarrow^* M\theta$，かつある $v \in \min(\mathcal{R}(\gamma))$ と $u \in \mathcal{O}_X(M)$ について $v < u$ が成立する場合について考える（そうでない場合は文献 13) の転換を行える）. よって，$M_{|v} \in S$，定義 16 より，$u \in U$ である.

$p = x \simeq M$ のとき，$x\theta$ からの簡約が存在する場合を考える（$M\theta$ からの簡約を考える場合は，文献 13) と同様）. $x\theta$ が最小であることより，補題 16 から，$x\theta$ の最内記号のみが書き換えられる. よって，ある定数 $c$ が存在して，$x\theta_{|v} = c$ かつ $x\theta_{|v} \leftrightarrow^* M\theta_{|v}$ が成立する. したがって，$\Phi_1$ は次の変換を行える.

$$\Gamma(= \Gamma' \cup \{p\}) \Rightarrow_{\Phi_1}$$
$$\Gamma' \cup \{x \approx M[c]_v, c \approx M_{|v}\}(= \tilde{\Gamma})$$

$\theta$ は $\tilde{\Gamma}$ の局所最小 $R$ 単一化子でもある.

(V2) 1.a の場合について述べる. VT 変換の 1.a を

$$\Gamma(= \Gamma' \cup \{p\}) \Rightarrow_{\Phi_1}$$
$$\Gamma' \cup \{x \approx M[c]_v, c \approx M_{|v}\}(= \tilde{\Gamma})$$

とすると，$\mathrm{core}(\tilde{\Gamma}) = \mathrm{core}(\Gamma') \cup \{x \approx M[c]_v, c \approx M_{|v}\}$ が $R$ 単一化可能ならば，明らかに $\mathrm{core}(\Gamma) = \mathrm{core}(\Gamma') \cup \{p\}$ は $R$ 単一化可能. 1.b の場合も同様に証明できる.

$p = x \rhd_U M$ のとき，$\Phi_1$ は次の変換を行える.

$$\Gamma(= \Gamma' \cup \{p\}) \Rightarrow_{\Phi_1}$$
$$\Gamma' \cup \{x \rhd_{U'} M[c]_v, c \rhd_{U/v} M_{|v}\}(= \tilde{\Gamma})$$

これも同様に証明できる. □

## 6.2 第 2 段階の正当性

$E_2 = \{M \approx_{\mathrm{vf}} N \mid M \in G \cup X\}$ とする. 第 1 段階の転換 $\Gamma \Rightarrow_{\Phi_1} \mathrm{conv}(\Gamma)$ について，$\mathrm{conv}(\Gamma) \subseteq E_2$ が成立し，第 2 段階のすべての変換 $\Gamma \Rightarrow_{\Phi_2} \tilde{\Gamma}$ について，$\Gamma \subseteq E_2$ ならば $\tilde{\Gamma} \subseteq E_2$ である.

**補題 36** 第 2 段階は停止性を満たし有限分枝である.

**証明** $\Gamma \subseteq E_2$ について，$\mathrm{size}(\Gamma)$ を $(\$_1(\Gamma), \$_2(\Gamma))$ と定義する. ここで

$$\$_1(\Gamma) = \sqcup_{P \approx_{\mathrm{vf}} Q \in \Gamma}(\#_0(P) \sqcup \#_0(Q))$$
$$\$_2(\Gamma) = |\Gamma|$$

任意の $\Gamma, \Gamma' \in E_2$ について $\mathrm{size}(\Gamma)$ と $\mathrm{size}(\Gamma')$ を比較するために辞書式順序 $>$ を用いる. 第 2 段階のすべての変換 $\Phi_2(\Gamma) = \{\Gamma_1, \cdots, \Gamma_k\}$ に対して，すべての $1 \leq i \leq k$ について $\mathrm{size}(\Gamma) > \mathrm{size}(\Gamma_i)$ が成立することを以下の表に従って証明する.

| | $\$_1$ | $\$_2$ |
|---|---|---|
| 分解 | $\gg$ | |
| VV | $\gg$ | |
| GT | $\gg$ | |
| VG | $\gg$ | |
| GG | $=$ | $>$ |

証明法は文献 12) と同様であるため，詳細は省略する.

また，$\Gamma$ が有限集合ならば，$k = |\Phi_2(\Gamma)|$ は有限である. したがって，補題が成立する. □

**補題 37**

(i) 第 2 段階の変換 $\Phi_2$ は妥当である.

(ii) $\Gamma \subseteq E_2$ が $R$ 単一化可能であり，かつ第 2 段階の**停止条件**を満たさないならば，$\Phi_2(\Gamma) \neq \emptyset$.

**証明** 文献 13) における同補題の証明と同様. VV 変換の妥当性は明らか. □

### 6.3 最終段階の正当性

**補題 38** $\Gamma$ が第 2 段階の**停止条件**を満たすことを仮定すると，$\Gamma$ の局所最小 $R$ 単一化子 $\theta$ が存在するならば $\Gamma$ は非循環的である．

**証明** $\theta$ を $\Gamma$ の局所最小 $R$ 単一化子とする．任意の $x \approx_{\mathrm{vf}} P \in \Gamma$ と $y \in V(P)$ について，$P \notin X$ ならば $H(x\theta) > H(y\theta)$ を示す．ある $u \neq \varepsilon$ について $y = P_{|u}$ とすると，$\theta$ が $x \approx_{\mathrm{vf}} P$ の $R$ 単一化子であることより，$x\theta_{|u} \leftrightarrow^* y\theta$ が成立する．$\theta$ の局所最小性より $H(x\theta_{|u}) \geq H(y\theta)$ が保証される．したがって，$H(x\theta) > H(y\theta)$．これより，任意の $x, y \in X$ について，$x \mapsto y$ ならば $H(x\theta) > H(y\theta)$ が成立する．ゆえに，$x \mapsto^+ x$ が成立することはありえない．よって，$\Gamma$ は非循環的である． □

**補題 39** $\Gamma$ が第 2 段階の**停止条件**を満たし，かつ $\Gamma$ の局所最小 $R$ 単一化子が存在するならば，$\Gamma$ は $\emptyset$ 単一化可能である．

**証明** 明らかに $\Gamma \neq \{\mathbf{fail}\}$ なので，$\Gamma$ は解形式．補題 38 より $\Gamma$ は非循環的なので，$\emptyset$ 単一化可能である． □

## 7. ま と め

6 章の補題より，次の定理が得られる．

**定理 40** 合流性を満たす単純 TRS における単一化問題は決定可能である．

**証明** 補題 34 と 36 より $\Phi$ の正当性条件の (1) が成立し，補題 35 と 37 より第 1，第 2 段階の変形 $\Phi_1$，$\Phi_2$ は妥当である．よって，$\Gamma_0 = \{M_0 \approx N_0\}$ が $R$ 単一化可能ならば，ある $\Gamma_1$ と $\Gamma_f$ が存在して，$\Gamma_0 \Rightarrow^*_{\Phi_1} \Gamma_1 \Rightarrow^*_{\Phi_2} \Gamma_f$ が成立し，$\Gamma_1$ と $\Gamma_f$ がそれぞれ第 1，第 2 段階の**停止条件**を満たし，$\Gamma_f$ の局所最小 $R$ 単一化子が存在する．したがって，補題 39 より $\Phi$ の正当性条件の (2) の必要条件部が成立する．また，$\Phi_1$ と $\Phi_2$ の変換の妥当性より十分条件部が保証される．したがって，$\Phi$ の正当性条件の (2) が成立する．よって，$\emptyset$ 単一化可能性の決定可能性より，定理が成立する． □

**謝辞** 本研究は一部文部科学省科学研究費基盤研究（C）（2）12680344 の補助を受けて行われた．

## 参 考 文 献

1) Comon, H., Haberstrau, M. and Jouannaud, J.-P.: Syntacticness, Cycle-Syntacticness and Shallow Theories, *Information and Computation*, Vol.111, No.1, pp.154–191 (1994).
2) Dauchet, M. and Tison, S.: The Theory of Ground Rewriting Systems is Decidable, *Proc. 5th IEEE Symp. Logic in Computer Science*, pp.242–248 (1990).
3) Dershowitz, N. and Jouannaud, J.-P.: Rewrite Systems, *Handbook of Theoretical Computer Science*, Leeuwen, J. (Ed.), Vol.B, pp.243–320, Elsevier Science Publishers B.V. (1990).
4) Gomi, H., Oyamaguchi, M. and Ohta, Y.: On the Church-Rosser Property of Non-E-Overlapping and Strongly Depth-Preserving Term Rewriting Systems, *Trans. Information Processing Society of Japan*, Vol.37, No.12, pp.2147–2160 (1996).
5) Gomi, H., Oyamaguchi, M. and Ohta, Y.: On the Church-Rosser Property of Root-E-Overlapping and Strongly Depth-Preserving Term Rewriting Systems, *Trans. Information Processing Society of Japan*, Vol.39, No.4, pp.992–1005 (1998).
6) Hullot, J.-M.: Canonical Forms and Unification, *Proc. 5th Conf. on Automated Deduction*, LNCS 87, pp.318–334 (1980).
7) Jacquemard, F., Meyer, C. and Weidenbach, C.: Unification in Extensions of Shallow Equational Theories, *Proc. 9th Rewriting Techniques and Applications*, LNCS 1379, pp.76–90 (1998).
8) Martelli, A. and Rossi, G.: Efficient Unification with Infinite Terms in Logic Programming, *Proc. 5th Generation Computer Systems*, pp.202–209 (1984).
9) Nagaya, T. and Toyama, Y.: Decidability for Left-Linear Growing Term Rewriting Systems, *Proc. 10th Rewriting Techniques and Applications*, Narendran, P. and Rusinowitch, M. (Eds.), LNCS 1631, pp.256–270 (1999).
10) Nieuwenhuis, R.: Basic Paramodulation and Decidable Theories, *Proc. 11th IEEE Symp. Logic in Computer Science*, pp.473–482 (1996).
11) Oyamaguchi, M.: On the Word Problem for Right-Ground Term-Rewriting Systems, *Trans. IEICE*, Vol.E73, No.5, pp.718–723 (1990).
12) Oyamaguchi, M. and Ohta, Y.: The Unification Problem for Confluent Right-Ground Term Rewriting Systems. Information and Computation 掲載決定.
13) Oyamaguchi, M. and Ohta, Y.: The Unification Problem for Confluent Right-Ground Term Rewriting Systems, *Proc. 12th Rewriting Techniques and Applications*, Middeldorp, A. (Ed.), LNCS 2051, pp.246–260 (2001).
14) Salomaa, K.: Deterministic Tree Pushdown Automata and Monadic Tree Rewriting Systems, *Jornal of Computer and System Sciences*,

Vol.37, pp.367–394 (1988).

## 付 録

### A.1 定理 4 の証明

**補題 41** PCP $P = \{\langle u_i, v_i\rangle \mid 1 \le i \le k\}$ が解を持つ $\Leftrightarrow \exists i(1 \le i \le k).f(i(x), y, y) \approx f(\$, \$, \$)$ は $R_P$ 単一化可能.

**証明** $\Rightarrow$ : PCP $P$ の解を $u_{i_1}, \cdots, u_{i_l} = v_{i_1}, \cdots, v_{i_l}$ とする．ここで，$i_j \in \{1, \cdots, k\}, 1 \le j \le l$. $x\theta = i_2 \cdots i_l(\$), y\theta = u_{i_1} \cdots u_{i_l}(\$)$ とするとき，$f(i_1(x), y, y)\theta \to^* f(\$, \$, \$)$ が成立する．ゆえに，$f(i_1(x), y, y) \approx f(\$, \$, \$)$ は $R_P$ 単一化可能.

$\Leftarrow$ : $\exists i(1 \le i \le k).f(i(x), y, y) \approx f(\$, \$, \$)$ は $R_P$ 単一化可能とする．したがって，ある代入 $\theta$ が存在して $f(i(x), y, y)\theta \leftrightarrow^* f(\$, \$, \$)$. $f(\$, \$, \$)$ は正規形かつ $R_P$ は合流性を満たすことより，系列 $\gamma$ : $f(i(x), y, y)\theta \to^* f(\$, \$, \$)$ が存在する．よって，ある $j_1, \cdots, j_l \in \{1, \cdots, k\}$ が存在して $x\theta = j_1 \cdots j_l(\$)$ が成立する．なぜなら，これ以外の関数記号が出現する場合には，その記号は書換えで消去されないからである．このとき，上の系列 $\gamma$ が存在するためには，$R_P$ の定義より，$y\theta = u_i u_{j_1} \cdots u_{j_l}(\$)$ かつ $y\theta = v_i v_{j_1} \cdots v_{j_l}(\$)$ が成立する必要がある．ゆえに，PCP $P$ は解を持つ. □

### A.2 補題 7 の証明

補題 7 を証明するために，次の定義と補題を用いる.

**定義 42** $M[M_{11}/c_{11}, \cdots, M_{mn}/c_{mn}]$ を，$1 \le i \le m$，$1 \le j \le n$ について $M$ に出現するすべての $c_{ij}$ を $M_{ij}$ で置換して得られる項とする.

**補題 43** $\theta = [M_{11}/c_{11}, \cdots, M_{mn}/c_{mn}]$ とする．$M \to^*_{R_{k+1}} N$ ならば，$M\theta \to^*_{R_k} N\theta$.

**証明** $M \to_{R_{k+1}} N$ ならば，$M\theta \to_{R_k} N\theta$ または $M\theta = N\theta$ を示せばよい．$u$ を $M \to_{R_{k+1}} N$ の簡約位置とする．このとき，$M_{|u} = \alpha_j\sigma$ かつ $N_{|u} = \beta_j\sigma$ を満たす $\sigma$ と $\alpha_j \to \beta_j \in R_{k+1}$ が存在する．$\alpha_j \to \beta_j \in R_k$ ならば明らかに成立する．$\alpha_j \to \beta_j \notin R_k$ かつ $\beta_j = f_j(c_{1j} \cdots c_{ij})$ ならば $\alpha_j \in G$ かつ $\alpha_j \to \beta_j\theta \in R_k$ より $\alpha_j\sigma\theta(= \alpha_j) \to_{R_k} \beta_j\sigma\theta$ が成立する．$\alpha_j \to \beta_j \notin R_k$，$\alpha_j = c_{i'j}$ かつ $\beta_j = M_{i'j}(1 \le i' \le i)$ ならば，$\alpha_j\sigma\theta = \alpha_j\theta = \beta_j = \beta_j\sigma\theta$，すなわち $M_{|u}\theta = N_{|u}\theta$．したがって，補題が成立する. □

**証明 ［補題 7］** 補題 43 を用いて，文献 12) における標準化に関する補題の証明と同様に証明できる. □

### A.3 文献 13) の単一化アルゴリズム

**第 1 段 階**

**転 換**

$\Gamma \subseteq \{x \approx L, L \approx x, x \rhd_U L \mid L \in T \setminus G\}$ のとき，
$\Gamma \Rightarrow_{\Phi_1} \mathrm{conv}(\Gamma)$

$\mathrm{conv}(\Gamma) = \{x \approx_{\mathrm{vf}} L \mid x \approx L \in \Gamma$ または $L \approx x \in \Gamma$ または $x \rhd_U L \in \Gamma\}$.

**TT 変 換**

$p = M \simeq N$ が TT 条件を満たすとき，

1. $\mathrm{root}(M) = \mathrm{root}(N)$ のとき，
   $\Gamma' \cup \{p\} \Rightarrow_{\Phi_1} \Gamma' \cup \{M_{|i} \approx N_{|i} \mid 1 \le i \le k\}$
   $k = \mathbf{a}(\mathrm{root}(M))$.
2. $M \notin G$ のとき，$\mathrm{root}(M) = \mathrm{root}(\alpha)$ を満たす規則 $\alpha \to \beta \in R$ を選び
   $\Gamma' \cup \{p\} \Rightarrow_{\Phi_1}$
   $\Gamma' \cup \mathrm{decompose}(M, \alpha, \mathcal{O}_X(\alpha))$
   $\cup \{\beta \approx N\}$
3. $M \in G$ のとき，$M \to^+ \beta$ を満たす規則 $\alpha \to \beta \in R$ を選び
   $\Gamma' \cup \{p\} \Rightarrow_{\Phi_1} \Gamma' \cup \{\beta \approx N\}$
   さらに，$N \approx \beta$ に対して TT 変換の 1 か 2 を 1 回行う.

**TL$_\to$ 変換**

$p = M \rhd_U N$ が TL$_\to$ 条件を満たすとき，

1. $\mathrm{root}(M) = \mathrm{root}(N)$ のとき，
   $\Gamma' \cup \{p\} \Rightarrow_{\Phi_1} \Gamma' \cup \mathrm{decompose}(M, N, U)$
   さらに，$M \in G$ ならば，すべての $P \approx Q \in \mathrm{decompose}(M, N, U) \cap (G \times X)$ に対して後述する VG 変換を適用する.
2. $M \notin G$ のとき，$\mathrm{root}(M) = \mathrm{root}(\alpha)$ を満たす規則 $\alpha \to \beta \in R$ を選び
   $\Gamma' \cup \{p\} \Rightarrow_{\Phi_1}$
   $\Gamma' \cup \mathrm{decompose}(M, \alpha, \mathcal{O}_X(\alpha))$
   $\cup \{\beta \rhd_U N\}$
3. $M \in G$ のとき，$M \to^+ \beta$ を満たす規則 $\alpha \to \beta \in R$ を選び
   $\Gamma' \cup \{p\} \Rightarrow_{\Phi_1} \Gamma' \cup \{\beta \rhd_U N\}$
   さらに，$\beta \rhd_U N$ に対して TL$_\to$ 変換の 1 を 1 回行う.

**GG 変 換**

1. $p = M \approx N$ が GG 条件を満たし $M \downarrow N$ のとき，
   $\Gamma' \cup \{p\} \Rightarrow_{\Phi_1} \Gamma'$
2. $p = M \rhd_\emptyset N$ が GG 条件を満たし $M \to^* N$ のとき，
   $\Gamma' \cup \{p\} \Rightarrow_{\Phi_1} \Gamma'$

**VG 変 換**

1. $p = x \simeq M$ が VG 条件を満たすとき，
$M_0 \in \mathcal{L}_{min}(M)$ を選び，
$\Gamma' \cup \{p\} \Rightarrow_{\Phi_1} \Gamma'[M_0/x]$
2. $p = x \rhd_U M$ が VG 条件を満たすとき，
$M_0 \in \mathcal{L}_{min}(M)$ を選び，
$\Gamma' \cup \{p\} \Rightarrow_{\Phi_1} \Gamma'[M_0/x] \cup \{M_0 \rhd_U M\}$

**VT 変 換**

1. $p = x \simeq M$ が VT 条件を満たすとき，
$M_{|v} \in S$ を満たす位置 $v \in \mathcal{O}(M)$ と規則 $\alpha \to \beta \in R$ を選び，
$\Gamma' \cup \{p\} \Rightarrow_{\Phi_1}$
$\Gamma' \cup \{x \approx M[\beta]_v, \beta \approx M_{|v}\}$
さらに，$v = \varepsilon$ ならば，$x \approx \beta$ に対して VG 変換を適用する．
2. $p = x \rhd_U M$ が VT 条件を満たすとき，
$M_{|v} \in S$ を満たす位置 $v \in \mathcal{O}(M)$ と規則 $\alpha \to \beta \in R$ を選び，
$\Gamma' \cup \{p\} \Rightarrow_{\Phi_1}$
$\Gamma' \cup \{x \rhd_{U'} M[\beta]_v, \beta \rhd_{U/v} M_{|v}\}$
ここで $U' = \{u \in U \mid u|v\}$，さらに，$v = \varepsilon$ ならば，$x \rhd_\emptyset \beta$ に対して VG 変換を適用する．

**第 2 段 階**

**分　　解**

$p = x \approx_{\rm vf} P (P \in S)$ であり，$x \sim_{\Gamma_X} y$ および $P \neq Q$，$Q \in S$ かつ $\mathrm{common}(P, Q)$ が真になる項対 $q = y \approx_{\rm vf} Q \in \Gamma_T$ が存在するならば，

$\Gamma'' \cup \{p, q\} \Rightarrow_{\Phi_2}$
$\Gamma'' \cup \{q\}$
$\cup \{P_{|u} \approx_{\rm vf} Q_{|u} \mid u \in U, P_{|u} \in X\}$
$\cup \{Q_{|u} \approx_{\rm vf} P_{|u} \mid u \in U, P_{|u} \notin X\}$

ここで $\Gamma'' = \Gamma' \setminus \{q\}$，$U = \mathrm{Min}(\mathcal{O}_{\rm X}(\mathrm{P}) \cup \mathcal{O}_{\rm X}(\mathrm{Q}))$．ここでは，$\#_0(P) \geqq \#_0(Q)$ を仮定している．

**GT 変 換**

$p = P \approx_{\rm vf} Q (P \in G, Q \in S)$ かつ $\mathrm{common}(P, Q)$ が真ならば，

$\Gamma' \cup \{p\} \Rightarrow_{\Phi_2} \Gamma' \cup \{Q_{|u} \approx_{\rm vf} P_{|u} \mid u \in \mathcal{O}_X(Q)\}$

**VG 変 換**

$p = x \approx_{\rm vf} P$ または $p = P \approx_{\rm vf} x (P \in G)$ ならば，$P_0 \in \mathcal{L}_{min}(P)$ を選び，

$\Gamma' \cup \{p\} \Rightarrow_{\Phi_2} \Gamma'[P_0/x]$

**GG 変 換**

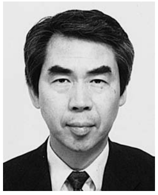
$p = P \approx_{\rm vf} Q (P, Q \in G)$ かつ $P \downarrow Q$ ならば，

$\Gamma' \cup \{p\} \Rightarrow_{\Phi_2} \Gamma'$

(平成 14 年 9 月 30 日受付)
(平成 15 年 1 月 9 日採録)

**三橋　一郎**（学生会員）

昭和 53 年生．平成 13 年三重大学工学部情報工学科卒業．同年同大学大学院工学研究科博士前期課程入学．項書き換えシステムに関する研究に従事．



**大山口通夫**（正会員）

昭和 22 年生．昭和 52 年東北大学大学院博士課程修了．同年名古屋大学助手．昭和 53 年より三重大学工学部助教授．平成 2 年より同大学工学部教授．理論計算機科学，特に項書き換えシステム，オートマトン・形式言語理論，言語処理系，プログラム意味論，アルゴリズム等に関する研究に従事．工学博士．

**太田　義勝**（正会員）

昭和 28 年生．昭和 53 年名古屋大学大学院工学研究科情報工学専攻修士課程修了．同年三重大学工学部助手．昭和 55 年より名古屋大学情報処理センター助手．昭和 60 年より名古屋大学大型計算機センター助手．平成 2 年より三重大学工学部助教授．項書き換えシステム，プログラミング言語処理系に関する研究に従事．工学博士．

**山田　俊行**

昭和 47 年生．平成 11 年筑波大学大学院博士課程工学研究科修了．同年同大学電子・情報工学系助手．平成 14 年より三重大学工学部情報工学科助手．項書き換えシステム，等式推論，関数型プログラミングに関する研究に従事．博士（工学）．