5N-4 ある係数系をもつ陽的ルンゲクッタ法の簡易局所離散化誤差評価法

大野 博
茨城大学 工学部

概 要

高次の陽的ルンゲ－クッタ法の係数を決定するには非常に多くの非線形方程式を解かなければならなかった。Hairer の 10 次公式の方法を一般化して，簡単に 10 次以上の偶数次の公式を作れるようにした。ところが，自由パラメータがいくつか残る。これらの自由パラメータを使って離散化誤差や丸め誤差が小さい公式を簡単に決定できる方法があるかどうか検討する。

1 はじめに

常微分方程式の初期値問題

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}), \qquad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0 \tag{1.1}$$

の数値解法について考察する。ただし，関数 $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ は領域 $D = \{(x, \boldsymbol{y}) | x \in R, \boldsymbol{y} \in R^m\}$ で定義され，$\boldsymbol{f} : R \times R^m \to R^m$ となり，x と y について十分高階まで微分可能な関数である。さらに，関数 $\boldsymbol{f}$ は適当な $L > 0$ を与えると全ての点 $(x, \boldsymbol{y}_1), (x, \boldsymbol{y}_2) \in D$ でリプシッツ条件

$$\|\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_1) - \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_2)\| < L\|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2\|, \qquad (x, \boldsymbol{y}_1), (x, \boldsymbol{y}_2) \in D \tag{1.2}$$

を満たすものとする。このことは解が唯一であることを示す [1, 5]。

ここで考える数値解法は s 段陽的ルンゲ－クッタ法

$$\begin{cases} \boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{f}(x_n, \boldsymbol{y}_n) \\ \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{f}(x_n + c_2 h, \boldsymbol{y}_n + h a_{2,1} \boldsymbol{k}_1) \\ \qquad \vdots \\ \boldsymbol{k}_s = \boldsymbol{f}\left(x_n + c_s h, \boldsymbol{y}_n + h \sum_{j=1}^{s-1} a_{s,j} \boldsymbol{k}_j \right) \\ \boldsymbol{y}_{n+1} = \boldsymbol{y}_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i \boldsymbol{k}_i, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{1.3}$$

とする。この方法は点 $x = x_n$ での $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_n$ の近似値が分かっているとき，x の値がステップ幅 $h(> 0)$ だけ離れた $x = x_n + h(= x_{n+1})$ での $\boldsymbol{y}$ の近似値 $\boldsymbol{y}_{n+1}$ を求めるものである。式 (1.3) の中の係数 $a_{i,j}, b_i, c_i$ は実定数である。この係数をうまく決めると高精度の公式が得られる。　一般的に使われている係数を決める方法では，10 次で 1205 個，12 次で 7813 個，14 次で 53272 個の非線形連立方程式を解かなければならない。Hairer が 10 次公式を作った方法を一般化して，10 次，12 次，14 次の公式を上記の数の方程式よりも少なく，ほとんどが線形方程式を解けば，係数を決められる方法を見つけた [4]。ところが，係数の中に自由パラメータがいくつか残る。この自由パラメータをうまく決めて，離散化誤差，丸め誤差が小さい公式を作りたいと考えているのだが，従来の方法を使うと非常に多くの数式を解析しなければならない。離散化誤差や丸め誤差を小さくする簡単な方法があるかどうか検討する。

参考文献

[1] J.C.Butcher. *The numerical analysis of ordinary differential equations (Runge-Kutta and General linear method).* JOHN WILEY & SONS., 1987.

[2] A.R.Curtis. *High-order Explicit Runge-Kutta Formulae, Their Uses, and Limitations.* J.Inst.Maths.Applics., 1975.

[3] 藤野清次, 数値計算の基礎 -数値解法を中心に-. サイエンス社, 1998.

[4] E.Hairer. *A Runge-Kutta Method of 10.* J.Inst.Maths.Applics., 1978.

[5] E.Hairer,S.P.Norsett,G.Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I (Nonstiff Problems).* Springer-Verlag., 1987.

[6] T.E.Hull, W.H.Enright, B.M.Fellen and A.E. Sengwick. *Comparing numerical methods for ordinary differential equations.* SIAM J. Numer. Anal., 1972.