4N-2

微分方程式の境界値問題の精度保証付き数値計算

中津 望　　久保田 光一
中央大学大学院理工学研究科*

1 はじめに

解析的に解くことの難しい問題を計算機を用いて数値的に解くことは不可避である．しかし，得られた数値解には誤差が含まれるため真の解と大きく異なる可能性がある．そのため，解の存在と誤差限界を数学的に保証できる精度保証付き数値計算が考えられてきた [3, 4, 5].

本稿では九州大学の中尾等による不動点定理と区間演算を用いた (常・偏) 微分方程式の境界値問題の精度保証付き数値計算 [2] を実装した．領域 $\Omega = (0,1)\times(0,1)$ 上の偏微分方程式の境界値問題

$$\begin{cases} -\Delta u = f & (x, y \in \Omega), \\ u = 0 & (x, y \in \partial\Omega) \end{cases} \tag{1.1}$$

を例として，数値計算を実施し，その結果の精度や計算時間について報告する．

2 有限要素法を用いた微分方程式の境界値問題の解法

上記偏微分方程式の境界値問題は無限次元空間 H_0^1 上の関数 u を求める問題なので計算機で解くために有限要素法を用いる [1, 6]. 領域 Ω を 1 辺が $h = 1/(n+1)$ の正方形 $(n+1)^2$ 個に分割し，Ω 内部の格子点を p_i $(i = 1,\cdots,n^2)$ とする．p_i で 1 をとり，ほかの格子点では 0 をとる 1 次の基底関数 ϕ_i が張る空間を有限要素空間 S_h と定義すると，近似解 $u_h \in S_h$ は

$$u_h = \sum_{i=1}^{n^2} u_i\phi_i \tag{2.1}$$

の形に表される．(1.1) の両辺に基底関数を掛け積分することで，$\boldsymbol{u} = (u_1,\cdots,u_{n^2})^t$ についての連立方程式を構成し．これを $\boldsymbol{u}$ について解くことで (1.1) の近似解 u_h を得ることができる [1, 6].

3 微分方程式の境界値問題の精度保証付き数値計算

3.1 区間

実数の区間とは，

$$[a,b] = \{x \in \mathbf{R} | a \le x \le b\} \tag{3.1}$$

と定義された実数の集合である．また，2 つの区間 $X = [a,b]$, $Y = [c,d]$ を定義したとき，四則演算は

$$\begin{aligned} X + Y &= [a+c, b+d], \\ X - Y &= [a-d, b-c], \\ X \cdot Y &= [x, y], \\ X/Y &= [a,b]\cdot[1/d, 1/c] \quad (Y \not\ni 0) \end{aligned}$$

と定義できる．ここで，$x = \min\{ac, ad, bc, bd\}$, $y = \max\{ac, ad, bc, bd\}$ を意味する．区間の絶対値を $|X| = \max\{|a|, |b|\}$ と定義する．区間の両端点は浮動小数点数では正確に表せない場合があるため，両端点を外側へ丸める [2, 4, 5].

3.2 近似解の精度保証

以下，中尾等の方法の概略を記す [2]. (1.1) の弱解の計算を不動点方程式 $v = F(v)$ $(F: H_0^1 \to H_0^1)$ とみなし，解を含む可能性のある候補者集合 U の F による写像 $F(U)$ を考える．これらを計算機で正確に表すことは不可能であるので，H_0^1 上の関数の集合を S_h 上の関数の集合と S_h の直交補空間 $S_h^\perp$ 上の関数の集合とに分けて考える．

区間 $W_i = [-w_i, w_i]$ $(w_i \ge 0)$ と近似解 u_i $(i = 1,\cdots,n^2)$ を用いて，S_h 上の関数の集合を

$$U_h = \left\{ v_h \in S_h \,\middle|\, v_h = \sum_{i=1}^{n^2} v_i\phi_i, v_i \in u_i + W_i \right\} \tag{3.2}$$

と定義する．また，$S_h^\perp$ 上の関数の集合を

$$U_\perp = \{v_\perp \in S_h^\perp \mid \|\nabla v_\perp\|_{L^2} \le \alpha\} \qquad (\alpha \ge 0) \tag{3.3}$$

と定義する．この 2 つの集合の和 $U = U_h + U_\perp$ を候補者集合とする．

(1.1) の両辺に ϕ_i を掛けてから積分し，$f_h =$

*Numerical computations with guaranteed accuracy for solving boundary value problems of differential equations, Nozomu NAKATU and Koichi KUBOTA, Graduate School of Science and Engineering, Chuo University, 1-13-27 Kasuga, Bunkyo-ku, Tokyo 112-8551, Japan.

$F_h(v)$ の形に変形する．F の近似的な作用素 F_h : $H_0^1 \to S_h$ による U の写像を

$$F_h(U) = \{f_h \in S_h \,|\, f_h = F_h(v),\ v \in U\} \quad (3.4)$$

と定義する．また，$F_h(v)$ と $F(v)$ との誤差の大きさを示す誤差評価式

$$\|\nabla(F(v) - F_h(v))\|_{L^2} \le C_0 h \|f\|_{L^2} \quad (3.5)$$

から，

$$F_\perp(U) = \left\{ f_\perp \in S_h^\perp \;\middle|\; \|\nabla f_\perp\|_{L^2} \le C_0 h \sup_{v \in U} \|f\|_{L^2} \right\} \quad (3.6)$$

を定義する．1 次の基底関数を用いる場合 $C_0 = 1/\pi$ とおく．$F(U) \subset F_h(U) + F_\perp(U)$ であるため，

$$\begin{cases} F_h(U) \subset U_h, \\ F_\perp(U) \subset U_\perp \end{cases} \quad (3.7)$$

であれば，Schauder の不動点定理から U に不動点 u，すなわち，真の解が確実に含まれることが保証される．(3.7) を計算機で確かめるための検証条件は，(3.2)，(3.3)，(3.4)，(3.6) から，

$$\begin{cases} \left[\inf_{v \in U} (F_h(v))_i, \sup_{v \in U} (F_h(v))_i\right] \subset u_i + W_i \\ \qquad\qquad\qquad (i = 1, \cdots, n^2), \\ C_0 h \sup_{v \in U} \|f\|_{L^2} \le \alpha \end{cases} \quad (3.8)$$

と表すことができる．

3.3 アルゴリズム

(3.8) を用いたアルゴリズムは次のようになる．

1. 有限要素法を用いて近似解 $u_h = \sum_{i=1}^{n^2} u_i \phi_i$ を求める．
2. $W_i = [0, 0]$ $(i = 1, \cdots, n^2)$，$\alpha = 0$ とおく．
3. 検証条件が成立するなら $U = U_h + U_\perp$ を解とする．そうでなければ 4 へすすむ．
4. 検証条件で求めた左辺の値を $(1 + \delta)$ 倍したものを W_i $(i = 1, \cdots, n^2)$，α として 2 へ戻る．$(\delta \ge 0)$

4 数値例

$n = 15$，$\delta = 0.001$ として上記アルゴリズムにしたがって，

$$\begin{cases} -\Delta u - 20xyu = (2\pi - 1) \sin \pi x \sin \pi y \\ \qquad\qquad\qquad (x, y \in \Omega), \\ u = 0 \qquad\qquad (x, y \in \partial\Omega) \end{cases} \quad (4.1)$$

の精度保証付き数値計算による真の解を含む集合 U を求めた．図 1 は近似解 u_h，図 2 は $x = 0.5$ での格子点における解の保証区間を表したものである．U_h の大きさを示す $\max W_i$ は 0.1209557345338032，$U_\perp$ の大きさを示す α は 0.1385214515633863 となった．

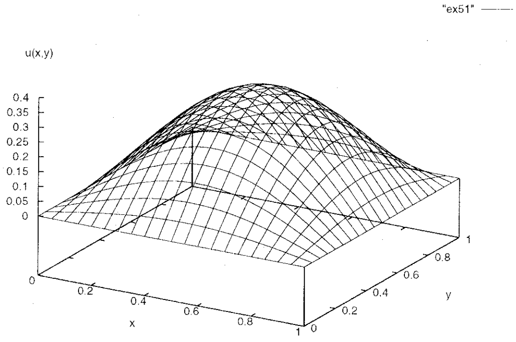

図 1　近似解 u_h

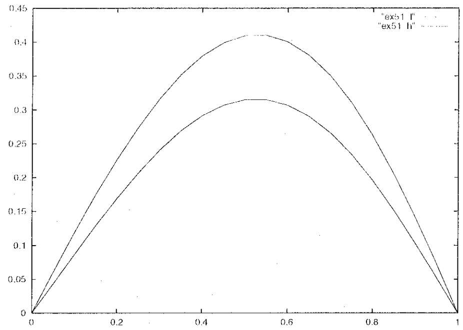

図 2　$x = 0.5$ での格子点における解の保証区間

5 まとめ

偏微分方程式の境界値問題の精度保証付き数値計算を行うプログラムを C++を用いて作成し，いくつかの簡単な問題については真の解を含む集合を求めることができ，中尾等の方法の有効性と有用性を確認した．

今後の課題として複雑な偏微分方程式の境界値問題への応用を考えている．また，使いやすい処理系の設計を考えている．

参考文献

[1] 菊地 文雄, “有限要素法の数値計算,” 科学技術出版社, 東京, 1979.
[2] 中尾 充宏, 山本 野人, “精度保証付き数値計算,” 日本評論社, 東京, 1998.
[3] 大石 進一, “非線形解析入門,” コロナ社, 東京, 1997.
[4] 大石 進一, “精度保証付き数値計算,” コロナ社, 東京, 2000.
[5] 大石 進一, “Linux 計算ツール,” コロナ社, 東京, 2000.
[6] O. C. ジェンキェヴィッチ, K. モーガン, (伊理正夫, 伊理 由美訳), “有限要素と近似,” ワイリージャパン・インコーポレイテッド, 東京, 1984.