

一階論理タブローによるモデル生成の再帰性検出と モデル表現の一般化

3P-1

久保山 哲[†] 宮原 哲浩[‡][†] 東京大学 国際・産学共同研究センター [‡] 広島市立大学 情報科学部

1 はじめに

一階論理のモデル自動生成は、その幅広い応用分野 [1] とともに 1990 年代初期から注目されるようになった研究分野である。モデル生成では初期節集合に繰り返し推論規則を適用して演繹の閉包を求める手法が主に用いられる。しかし、一般に演繹の閉包が無限集合となる場合には停止性が保証されない。これを端的に表すのが次の例である。節集合 $\{P(a), P(x) \rightarrow P(f(x))\}$ に対して、ボトムアップ推論を行うと、 $P(a), P(f(a)), P(f(f(a))), \dots$ のようにモデルの再帰的な生成が際限なく行われるために停止しない。この問題を解消するために、より表現力のある項を導入するなど様々な手法が提案されているが [2], いずれも計算コストが大きく、実装についてはほとんど報告されていないのが現状である。

本稿では、無限集合を成すエルブランモデルから、有限記述を抽出する新しいタブロー手続き **ME タブロー** (Model Enumeration Tableau) を提案する。有限記述の抽出とは、 $\{P(f^n(a)) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ($\mathbb{N}$ は自然数全体の集合) のような無限集合のモデルに対して、 $f(a) = a$ という解釈の下で矛盾が生じなければ、 $\{P(a)\} \cup \{f(a) = a\}$ をモデルの 1 つとして生成することを指す。本手法は、関数記号を含まない節集合を対象とした Bry らによる EP タブロー (Extended Positive Tableau) [3] の、関数記号を含む節集合のクラス [4] への拡張とみなせる。

2 ME タブロー

以下では一階論理のタブローに関する基本的な知識を仮定する [6]。ME タブローは関数記号を含む節集合を、まず ME タブロー節集合という独自の節形式に変換した後にモデル生成を行う。モデル生成手続きの基本部分は PUHR タブロー (Positive Unit Hyper Resolution Tableau) [5] などの標準的な方法と同様である。

2.1 節集合

変数の集合を $\mathcal{V}$ 、関数記号の集合を $\mathcal{F}$ 、述語記号の集合を $\mathcal{P}$ とする。ME タブローでは節 $C = \neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_m \vee \dots \vee B_1 \vee \dots \vee B_n$ を含意形式 $C = A_1 \wedge \dots \wedge A_m \rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_n$ で扱う ($m, n \in \mathbb{N}$)。含意記号 “ $\rightarrow$ ” の左側をボディ、右側をヘッドという。 $Body(C) = \{A_1, \dots, A_m\}$, $Head(C) = \{B_1, \dots, B_n\}$ とする。また、アトム $\top, \perp$ を導入し、それぞれ任意の解釈で真と偽となるものとする。

定義 2.1. リテラル集合 D に現れる変数の集合を $Var(D)$ と表記する。条件 $Var(Head(C)) \subseteq Var(Body(C))$ を満たす節 C を **値域制限節** という。

定義 2.2. ME タブロー節を含意形式の節、または以下の形式をした節とする。

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_m \rightarrow \exists x_1 L_1(x_1) \wedge \dots \wedge \exists x_n L_n(x_n)$$

ただし、 $m, n \in \mathbb{N}$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{V}^n$ であり、 $L_i(x_i)$ はリテラル L_i に x_i が自由変数として出現していることを表す。

2.2 値域制限節への変換と関数記号の抽出

ME タブローでは、まず一階論理の節集合を、値域制限節の集合へ変換し [3][4]、その後、停止性を阻害する原因となり得る関数記号の消去を行う。

消去の対象となる関数記号の抽出法については、本稿では触れない。直観的には、節 C において、 $Body(C)$ に含まれる変数が $Head(C)$ では項の構造についてより深い場所に位置しており、かつ f の出現位置が必ず項の先頭になっているとき、即ち、 $g \neq f$ なる任意の項 $g(t_1, \dots, t_n)$ の $t_1, \dots, t_n$ 中に f が現れることがないとき、関数記号 f を抽出する。

2.3 関数記号の消去

集合 $Cells(f, C)$ を節 (またはリテラル集合) C に含まれる、先頭記号が $f \in \mathcal{F}$ であるようなすべての項 $f(t_1, \dots, t_n)$ の集合とする。リテラル (または項) E 中に現れる各項 $t \in Cells(f, C)$ を、 t に一意な新しい変数 x_t で置き換えたものを E^f によって表す。

関数記号 f に対して一意に新しい述語記号 $F_f \in \mathcal{P}$ を割り当てる。その解釈は $f(x_1, \dots, x_n) = y$ かつそのときに限り $F_f(x_1, \dots, x_n, y)$ は真であるとする。

Model Enumeration Tableau for Finite Model Building

[†] Center for Collaborative Research, The University of Tokyo (kuboyama@ccr.u-tokyo.ac.jp)

[‡] Faculty of Information Sciences, Hiroshima City University (miyahara@its.hiroshima-cu.ac.jp)

定義 2.3. 節集合 S 中の関数記号 f に関する関数記号変換 $\text{Flatten}(f, S)$ を以下のように定義する。

$$\text{Flatten}(f, S) := \bigcup_{C \in S} \text{Flatten}(f, C)$$

$$\text{Flatten}(f, C) :=$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bigwedge_{L \in \text{Body}(C)} L^f \wedge \bigwedge_{t \equiv f(t_1, \dots, t_n) \in \text{Cells}(f, C)} F_f(t_1^f, \dots, t_n^f, x_t) \\ \rightarrow \bigvee_{L \in \text{Head}(C)} L^f, \\ \\ \bigwedge_{L \in \text{Body}(C)} L^f \wedge \bigwedge_{t \equiv f(t_1, \dots, t_n) \in \text{Cells}(f, \text{Body}(C))} F_f(t_1^f, \dots, t_n^f, x_t) \\ \rightarrow \bigwedge_{f(t_1, \dots, t_n) \in \text{Cells}(f, \text{Head}(C))} \exists x_{\text{new}} F_f(t_1^f, \dots, t_n^f, x_{\text{new}}) \end{array} \right\}$$

値域制限性の条件を満たす節集合 S が充足可能であるとき、かつそのときに限り $\text{Flatten}(f, S)$ は充足可能である ($f \in F$)。

2.4 ME タブローによるモデル生成手続き

ME タブローでは以下のようなタブロー展開規則を用いる。

$$\text{枚挙規則} \quad \frac{\exists x L(x)}{L[c_1/x] \mid \cdots \mid L[c_k/x] \mid L[c_{\text{new}}/x]}$$

$\{c_1, \dots, c_k\}$ は展開中の枝の上に現れている全ての定数であり、定数 c_{new} は、 $c_{\text{new}} \notin \{c_1, \dots, c_k\}$ を満たす新しい定数である。

$$\begin{array}{l} \wedge\text{-規則} \quad \frac{L_1 \wedge \cdots \wedge L_n}{\begin{array}{c} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{array}} \quad \vee\text{-規則} \quad \frac{L_1 \vee \cdots \vee L_n}{\begin{array}{c} L_1 \mid \cdots \mid L_n \end{array}} \end{array}$$

タブローのある枝 B 上のアトム集合 $\text{Atoms}(B)$ と、ある節 $C \in S$ について、代入 σ が存在し $\text{Atoms}(B) \subseteq \text{Body}(C\sigma)$ となるとき、節 $C\sigma$ のヘッド部分を、着目している枝の葉ノードにラベル付けし、タブロー展開規則を適用する。包摂検査などの詳細については [5] を参照のこと。

3 ME タブローによるモデル生成の例

以下のような値域制限性の条件が満たされた節集合 S について、本稿で提案した証明手続きを適用する。

$$S = \left\{ \begin{array}{ll} c_1: & \rightarrow P(a), \\ c_2: & P(x) \rightarrow P(f(x)), \\ c_3: & P(x) \rightarrow Q(x, f(x)), \\ c_4: & Q(x, x) \rightarrow \end{array} \right\}$$

関数記号 f の消去により、以下のような ME タブロー節集合が生成される。

$$S' = \text{Flatten}(f, S) = \left\{ \begin{array}{ll} c_1: & \rightarrow P(a), \\ c_2': & P(x) \wedge F(x, y) \rightarrow P(y), \\ c_2'': & P(x) \rightarrow \exists y F(x, y), \\ c_3': & P(x), F(x, y) \rightarrow Q(x, y), \\ c_4: & Q(x, x) \rightarrow \end{array} \right\}$$

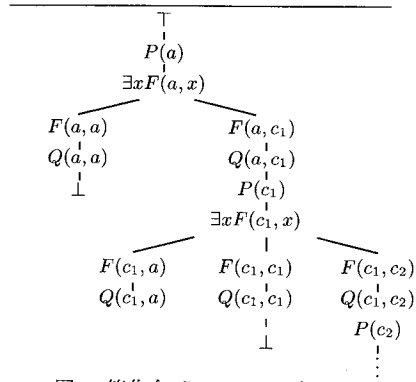


図 1. 節集合 S の ME タブロー

S' に幅優先で ME タブロー規則を適用することにより、図 1 に示すような ME タブローが構成できる。図中の $\perp$ は枝が閉じたことを示している。図 1 の左から 2 番目の枝が充足可能であり、以下のようなモデルが抽出できる。

$$\{P(a), Q(a, c_1), P(c_1), Q(c_1, a)\} \cup \{F(a, c_1), F(c_1, a)\}$$

関数記号に戻すと以下ようになる。

$$\{P(a), Q(a, f(a)), P(f(a)), Q(f(a), a)\} \cup \{f(f(a)) = a\}$$

即ち、以下のような無限集合を成すモデルの有限記述になっていることがわかる。

$$\{P(a), Q(a, f^m(a)), P(f^m(a)), Q(f^m(a), a) \mid m = 2n+1, n \in \mathbb{N}\}$$

4 まとめ

新しいモデル生成手続き ME タブローについて提案し概観した。本手法により、従来のモデル生成手法では、停止しないような節集合に対して、モデルの有限記述を導入することにより停止することを例によって示した。今後の課題は、ME タブロー上での極小モデルの生成 [5] および、応用分野への適用である。

参考文献

- [1] N. Eisinger and T. Geisler: Problem solving with model-generation approaches based on PUHR tableaux. Technical Report PMS-FB-1998-8, Institut für Informatik, LMU München, 1998.
- [2] A. Leitsch: Decision Procedures and Model Building or How to Improve Logical Information in Automated Deduction, pp. 62-79, LNAI 1761, Springer, 2000.
- [3] F. Bry and S. Torge: A deduction method complete for refutation and finite satisfiability, pp.122-138, LNAI 1489, Springer, 1998.
- [4] N. Peltier: Combining Resolution and Enumeration for Finite Model Building, *Proc. FTP'00 (Third International Workshop on First-Order Theorem Proving)*, pp. 170-181, 2000.
- [5] F. Bry and A. Yahya: Minimal Model Generation with Positive Unit Hyperresolution Tableaux, pp. 143-159, LNAI 1071, Springer, 1996.
- [6] M. Fitting: First-Order Logic and Automated Theorem Proving. Springer, second edition, 1996.