完全K分木型連結ピン組織構造への関係追加モデル

3J－6

澤田　清　　宇野　斉
流通科学大学 情報学部

1．はじめに

企業などの組織の構造には，上下間の一元的な命令系統に基づくピラミッド組織構造や，ピラミッド組織構造に部門内の横方向の協力関係を付加した連結ピン組織構造（Likert[1]の組織分類では，システム4と呼ばれている）などがある．ピラミッド組織構造は，構成主体を頂点に，上下の主体間関係を辺に対応させると，根付き木であると考えることができる．また，連結ピン組織構造は，根付き木の兄弟（同じ親を持つ頂点）を隣接化した構造として表すことができる．このとき，各頂点間の経路は組織内の主体間の関係をたどる情報伝達経路に対応している．また，これらの組織構造に辺を追加することは，組織にあらかじめ設定された主体間関係以外の追加的関係の形成に相当する[2].

筆者らは，すでに，完全2分木型のピラミッド組織構造に対して，(1)同じ深さの2頂点間に1辺追加する，(2)同じ深さの全兄弟間に辺を追加する，(3)同じ深さの全頂点間に辺を追加する場合に，全頂点間の最短経路の長さの総和（以後，総頂点間経路長と呼ぶ）を最小にする追加辺の位置を解析的に求めた[3]．本研究では，より一般化した完全K分木の全兄弟があらかじめ隣接化された完全K分木型連結ピン組織構造を対象として，(i)同じ深さの2頂点間に1辺追加する，(ii)同じ深さの全頂点間に辺を追加する場合に，総頂点間経路長を最小にする追加辺の位置を求める．ただし，完全K分木は，すべての葉の深さが同じで，かつすべての内部頂点の次数がKであるK分木を指す．また，深さは，根からその頂点までの経路の長さを表す．ここで，(i)は組織内の同じ層での一対一の追加的な関係形成（個人的なつながりなど）に，(ii)は組織内の同じ層全体での追加的な関係形成（集合研修や会合など）に相当する．

2.，3.では，それぞれ，上述した(i)，(ii)の関係追加モデルについて，辺追加前と比べて総頂点間経路長がどれだけ短縮されたか（以後，総頂点間短縮経路長と呼ぶ）を定式化し，これを最大にする（すなわち，総頂点間経路長を最小にする）追加辺の位置を解析的に求める．

2．深さ同一2頂点間への辺追加

ここでは，前述したように，高さ$H(H=2,3,\cdots)$の完全K分木型連結ピン組織構造$(K=2,3,\cdots)$に対して，同じ深さ$N(N=2,3,\cdots,H)$の2頂点間に1辺を追加する．

深さNの2頂点間に追加可能な辺は，同形のグラフを除去すると，$N-1$通り存在する．すなわち，深さ$L\,(L=0,1,2,\cdots,N-2)$の頂点の異なる子の子孫同士に追加する$N-1$通りである．ここで，$L=0$の場合，すなわち組織構造の根の異なる子の子孫間に辺を追加したときの総頂点間短縮経路長$S_{1,H}(N)$を定式化すると，

$$\begin{aligned} S_{1,H}(N) &= \{M(H-N)\}^2(2N-2)+2M(H-N)\sum_{i=1}^{N-2}2i+\sum_{i=1}^{N-3}\sum_{j=1}^{i}2j \\ &\quad +2M(H-N)\sum_{i=1}^{N-1}(K-1)M(H-i-1)(2i-1)+2\sum_{i=1}^{N-2}(K-1)M(H-i-2)\sum_{j=1}^{i}(2j-1) \\ &\quad +\sum_{i=1}^{N-2}(K-1)M(H-i-2)\sum_{j=1}^{i}(K-1)M(H-N+i-j)2j \end{aligned} \tag{1}$$

となる．ただし，$\sum_{i=1}^{-1}\cdot=0$，$\sum_{i=1}^{0}\cdot=0$と定義する．また，$M(h)\,(h=0,1,2,\cdots)$は，高さhの完全K分木の頂点数を表す.

深さLの頂点の異なる子の子孫間に辺を追加するときの総頂点間短縮経路長を$R_H(N,L)$とすると，深さLの頂点の子孫同士以外は経路長が短縮されないことから，

$$R_H(N,L)=S_{1,H-L}(N-L) \tag{2}$$

Additional Relations Models to a Linking Pin Type Organization Structure of a Complete K-ary Tree
Kiyoshi Sawada and Hitoshi Uno
Faculty of Information Science, University of Marketing and Distribution Sciences

が成り立つ．このとき，$R_H(N,L)$ の L に関する差分が

$$R_H(N,L+1) - R_H(N,L) \ < \ 0 \tag{3}$$

となることから，$L=0$ のとき $R_H(N,L)$ が最大となる．すなわち，次の定理 1 が導ける．

定理 1 高さ H の完全 K 分木型連結ピン組織構造の同じ深さ N の 2 頂点間に 1 辺を追加する場合，根の異なる子の子孫間に追加したときに総頂点間短縮経路長が最大となる．

定理 1 より，総頂点間短縮経路長を最大にする追加辺を求めるには，根の異なる子の子孫間だけを考えればよい．すなわち，$S_{1,H}(N)$ を最大にする N を求めればよい．

式 (1) に $M(h) = \dfrac{K^{h+1}-1}{K-1}$ を代入して整理すると，

$$S_{1,H}(N) = \frac{2}{(K-1)^3}\Big\{(N-1)(K-1)K^{2H-N+1} + 2K^{H-N+2} - 2K^{H+1} + K(N-1)(K-1)\Big\} \tag{4}$$

を得る．ここで，$S_{1,H}(N)$ の N に関する差分を $\Delta S_{1,H}(N) \equiv S_{1,H}(N+1) - S_{1,H}(N)$ とおくと，$N=2,3,\cdots,H-1$ に対して $\Delta S_{1,H}(N) < 0$ が成り立つ．

以上より，次の定理 2 が得られる．

定理 2 高さ H の完全 K 分木型連結ピン組織構造の同じ深さ N の 2 頂点間に 1 辺を追加するとき，総頂点間短縮経路長を最大にする追加辺深さは $N^* = 2$ である．

3．深さ同一全頂点間への辺追加

ここでは，高さ $H(H=2,3,\cdots)$ の完全 K 分木型連結ピン組織構造 $(K=2,3,\cdots)$ に対して，同じ深さ $N(N=2,3,\cdots,H)$ の全頂点間に辺を追加する．

この場合の総頂点間短縮経路長 $S_{2,H}(N)$ は

$$\begin{aligned} S_{2,H}(N) \ &= \ \{M(H-N)\}^2K^N(K-1)\sum_{i=1}^{N-1} iK^i + M(H-N)2K^N(K-1)\sum_{i=1}^{N-2}\sum_{j=1}^{i} jK^j \\ &\quad + K^N(K-1)\sum_{i=1}^{N-3}\sum_{j=1}^{i} j(i-j+1)K^j \end{aligned} \tag{5}$$

と定式化される．ただし，$\displaystyle\sum_{i=1}^{-1}\cdot = 0$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{0}\cdot = 0$ と定義する．ここでも，$M(h)\,(h=0,1,2,\cdots)$ は，高さ h の完全 K 分木の頂点数を表す．

式 (5) を整理すると，

$$\begin{aligned} S_{2,H}(N) \ &= \ \frac{1}{2(K-1)^3}\Big\{2K^{2H-N+3} + 2(NK-K-N)K^{2H+2} - 4K^{H+N+2} + 4(NK-N+1)K^{H+2} \\ &\quad + N(N-1)(K-1)^2K^{N+1}\Big\} \end{aligned} \tag{6}$$

を得る．ここで，$S_{2,H}(N)$ の N に関する差分を $\Delta S_{2,H}(N) \equiv S_{2,H}(N+1) - S_{2,H}(N)$ とおくと，$N=2,3,\cdots,H-1$ に対して $\Delta S_{2,H}(N) > 0$ が成り立つ．

以上より，次の定理 3 が得られる．

定理 3 高さ H の完全 K 分木型連結ピン組織構造の同じ深さ N の全頂点間に辺を追加するとき，総頂点間短縮経路長を最大にする追加辺深さは $N^* = H$ である．

参考文献

[1] R. Likert and J. G. Likert, *New Ways of Managing Conflict*, McGraw-Hill, New York, 1976. / 三隅二不二監訳, コンフリクトの行動科学 — 対立管理の新しいアプローチ —, ダイヤモンド社, 東京, 1988.

[2] 宇野 斉, “組織内コミュニケーション・パスの追加効果について”, 組織科学, Vol.27, No.2, pp.73–86, 1993.

[3] 澤田 清, 宇野 斉, “完全 2 分木型組織構造への関係追加モデル”, 日本応用数理学会論文誌, Vol.10, No.4, pp.335–346, 2000.