Surrogate 双対ギャップに関する一考察

3J−5

田原 宣彦† 北海道大学 経済学部
田中 嘉浩‡ 北海道大学大学院 経済研究科§

1 はじめに

整数計画に於いて Surrogate（代理）双対緩和は H.J. Greenberg and W.P. Pierskalla (1970) に依る提案以来、特に木探索法等の解法のステップで Lagrange 緩和よりきつい下界値を与え、制約を扱い易い等の観点で有望視されている。

しかしながら代理双対緩和の理論的性質はまだ十分に述べられておらず、例えば B. Ram and M.H. Karwan (1989) には混合整数計画問題に於いて Surrogate（代理）双対ギャップの存在が示されたに過ぎない。本稿では整数計画に既に代理双対ギャップが存在することとその必要十分条件及び混合整数計画への拡張結果について述べる。

2 整数計画に対する結果

一般の整数線形計画問題は次の様に述べられる:

$$(P) \qquad \text{minimize} \quad c^T x \qquad \text{subject to} \quad Ax \le b, \quad x \in S,$$

但し x は整数ベクトル、A は $m \times n$ 有理数行列、b, c は適当な次元の有理数ベクトル、$S = \{x \ge 0 \mid Gx \le h,\ \ S \text{ は有界}\}$, 但し G は $k \times n$ 有理数行列、h は $k \times 1$ 有理数ベクトル、とする。我々は病的な例外を除外する為に本稿では 問題 (P) は実行可能であると仮定する。

$\mu \ge 0$ に関する 問題 (P) の代理制約緩和 (surrogate constraint relaxation) は、

$$(P^\mu) \qquad \text{minimize} \quad c^T x \qquad \text{subject to} \quad \mu^T(Ax - b) \le 0, \quad x \in S.$$

と定義され、対応する代理双対 (surrogate dual) は、

$$(D_S) \qquad \max_{r \ge 0}\{v(P^\mu)\}.$$

となる。

問題 (P^μ) に於いて整数 x_i を $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_N}$ ($x_{i_1},\ldots,x_{i_N}$ は 1 又は 0) と通常の方法で 2 進数桁変換するとナップザック問題になるので、問題 (P^μ) は *NP* 完全 (*NP-Complete*) 問題に属する。

上の問題の間に $v(D_L) \le v(D_S) \le v(P)$ の関係が成立することが一般に知られているが、[2] では整数計画では双対ギャップが無いとされていた。

例.

$$\begin{aligned}(P) \qquad & \text{minimize} && -x_1 - 2x_2 \\ & \text{subject to} && 3x_1 + 2x_2 \le 9, \\ &&& x_1 + 4x_2 \le 8, \\ &&& 0 \le x_1, x_2 \le 5, \quad x_1, x_2 \text{ は整数.}\end{aligned}$$

最適解は $x^* = \{(0,2)^T, (2,1)^T\}$, $v(P) = -4$ である。一方、代理双対解とラグランジュ双対解は各々$x_S^* = \{(1,2)^T, (3,1)^T, (5,0)^T\}$, $v(P^\mu) = -5$, 及び $x_\lambda^* = \{S \text{ 内の整数点}\}$, $v(P_\lambda) = -5$, であり整数計画問題に於いてさえ双対ギャップがあることを例示している。

先に進む前に、我々は問題 (P) の線形緩和問題を $(\bar{P})$、その解を $\bar{x}$ とする。

定理 1. $\bar{x} \notin \mathrm{bdry}\ S$ を仮定する。その時、問題 (P) と問題 (D_S) の間に双対ギャップ、即ち、

$$v(D_S) < v(P) \tag{1}$$

となる必要十分条件は離散集合 $D = \{x \mid c^T\bar{x} \le c^T x < c^T x^*,\ x \in S\}$ が非空であること、である。

[略 証] 問題 $(\bar{P})$ に Kuhn-Tucker 条件を適用した解 $\bar{\mu} \ge 0$ が、問題 (D_S) に対する μ と相似でなければ背反することを示すことにより証明される。 ∎

---

*A Study on Surrogate Duality Gaps

†Nobuhiko Tahara (taharar@orion.ocn.ne.jp)
‡Yoshihiro Tanaka (tanaka@econ.hokudai.ac.jp)
§Graduate School of Economics and Business Administration, Hokkaido University, Sapporo 060-0809, Japan.

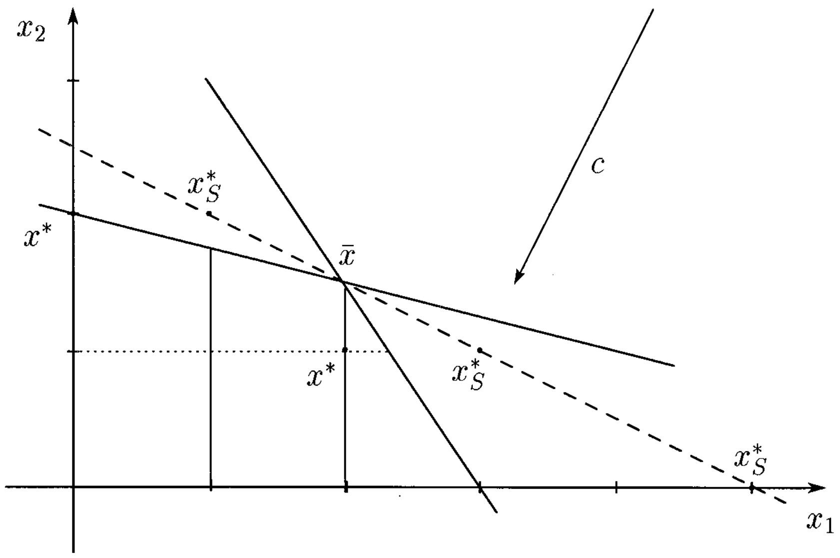

図 1: 例のグラフ表示

3　混合整数線形計画問題に対する結果

一般の混合整数線形計画問題は次の様に述べられる：

$$\begin{array}{lll}(P^M) & \text{minimize} & c^T x \\ & \text{subject to} & Ax \le b, \quad x \in S, \\ & & x_i \in \mathbb{Z},\ i \in I_Z, \quad x_j \in \mathbb{R},\ j \in I_R,\end{array}$$

但し、$I_Z \cup I_R = \{1, ..., n\}$ とする。

上の問題の領域制約を、

$$\begin{aligned} Y \ = \ & \{x \in S \mid x_i \in \mathbb{Z},\ i \in I_Z, \quad x_j \in \mathbb{R},\ j \in I_R; \\ & I_Z \text{ と } I_R \text{は所与}\}. \end{aligned}$$

と定義する。

例で x_1 を整数条件にしても双対ギャップが無いが、x_2 を整数条件にすれば双対ギャップを生じることに注意しよう。

問題 (P^M) の $\mu \ge 0$ に関する代理制約緩和 $(P^{M\mu})$ 及び対応する代理双対 (D_S^M) は前節と同様に定義する。問題 (P^M) の線形緩和問題 $(I_Z \ne \phi)$ を $(\bar{P}^M)$ とし、その解を $\bar{x}_M$ とする。

定理 2. $\bar{x}_M \notin \text{bdry } S$ を仮定する。$c_k \ne 0$ となる $k \in I_R$ が存在するとも仮定する。その時、問題 (P^M) と 問題 (D_S^M) の間に双対ギャップが存在する、即ち、

$$v(D_S^M) < v(P^M) \tag{2}$$

となる必要十分条件は $\bar{x}_M \notin Y$ となることである。任意の $k \in I_R$ に対して $c_k = 0$ ならば、集合 $G = \{x \mid c^T \bar{x}_M \le c^T x < c^T x_M^*,\ x \in Y\}$ が空でない時に上の不等式が成立する。

[証 明]　　略　∎

整数計画の双対ギャップを調べる問題は x^* を求める以上 NP 完全問題になっているが、混合整数計画の双対ギャップを調べる問題は $c_k \ne 0,\ k \in I_R$ の時にはクラス P の問題になっていることに注意しよう。

参考文献

[1] Greenberg, H.J. and Pierskalla, W.P. (1970): Surrogate mathematical programming. *Operations Research* **18**, 924–939.

[2] Ram, B. and Karwan, M.H. (1989): A result in surrogate duality for certain integer programming problems. *Math. Program.* **43**, 103–106.