数理計画問題の新解法

３Ｊ－４

山本祥弘　鳥取大学工学部

1．はじめに

単体法、楕円体法、内点法が知られている線形計画問題に対する新しい解法を提案する。提案法の特徴は、1)その解法が簡単であること、2)数理計画問題、例えば0-1計画、整数計画、TSPにも拡張可能なことである。

提案する方法は、不等式条件の中でどれが等式で満たされるか、活性条件を探すことであり、係数ベクトルが示す法線方向の角度を利用することである。

2．問題の設定

変数 $\mathbf{x}=(x_i)$ に関する目的関数（最大）と制約不等式が以下で与えられるとする．

$$z=\mathbf{c}^T\mathbf{x} \tag{1}$$

$$\mathbf{a}_j^T\mathbf{x} \leqq b_j,\quad j=1,2,\ldots\ldots,n \tag{2}$$

ここに変数 x_i の非負条件も(2)式に含まれている．また，制約条件のより一般的な形は

$$\mathbf{a}_j^T\mathbf{x}=b_j,\quad j=1,2,\ldots\ldots,n_1 \tag{3}$$

$$\mathbf{a}_j^T\mathbf{x} \geqq b_j,\quad j=1,2,\ldots\ldots,n_2 \tag{4}$$

$$\mathbf{a}_j^T\mathbf{x} \leqq b_j,\quad j=1,2,\ldots\ldots,n_3 \tag{5}$$

$$n_1+n_2+n_3=n$$

であるが，負号をかけることにより，(4)(5)式は(2)式に統一できる．また提案する方法は(2)式の中で等式を満たすものを探すことであるので，(3)式は(2)式の中に含めることができ，それが優先的に処理される．ベクトル $\mathbf{c}$ は $z=$ 一定を表す超平面の法線ベクトルであり，z の増加方向を示している．また，ベクトル $\mathbf{a}_j$ は不等式を満たす解領域の境界を示す超平面の法線ベクトルである．

3．新解法

いま問題の最適解を $\mathbf{x}=\mathbf{x}^*$ とするとき，制約不等式(2)の幾つかは等式

$$\mathbf{a}_j^T\mathbf{x}^*=b_j \tag{6}$$

となっている．(6)式を満たす制約式は解の存在を仮定すれば，一つ以上で有限個である．(6)式の $\mathbf{a}_j$ と $\mathbf{c}$ とのなす角 θ_j は

$$\cos\theta_j=\frac{\mathbf{c}^T\mathbf{a}_j}{\|\mathbf{c}\|\,\|\mathbf{a}_j\|} \tag{7}$$

で与えられるが，$\|\mathbf{c}\|$ は各 j に対して同じであるので，角 θ_j に対する指標 d_j を

$$d_j=\frac{\mathbf{c}^T\mathbf{a}_j}{\|\mathbf{a}_j\|} \tag{8}$$

と定める．これら d_j の中に最大値が存在し，この最大値は(2)式のすべての $\mathbf{a}_j$ に対しても最大であることが，幾何学的考察から言える．(ここに，実行可能領域に直接寄与しない冗長な制約式は含まれていないことを仮定している．) 以上は，(1)，(2)式の最大化問題を扱ってきたが，その他のタイプも含めて，Table 1にまとめられる．

Table 1　指針のまとめ

	目的関数	制約条件	指　標
1	z：最大	$\mathbf{a}_j^T\mathbf{x} \leqq b_j$	d_j：最大値
2		$\mathbf{a}_j^T\mathbf{x} \geqq b_j$	d_j：最小値
3	z：最小	$\mathbf{a}_j^T\mathbf{x} \leqq b_j$	d_j：最小値
4		$\mathbf{a}_j^T\mathbf{x} \geqq b_j$	d_j：最大値

4．計算手順

(1)，(2)式で与えられる最大化問題に対して，Table 2の表を作成する．このとき計算手順は以下のようになる．

1) $\mathbf{a}_j$ の中に等式条件があれば，$a_{jk}\neq 0$ を軸として，行と列を掃き出し，変数 x_k を消去する．
2) $b_j\leqq 0$，$\Sigma a_{jk}=b_j\,(a_{jk}<0)$ のとき，$a_{jk}<0$ の変数 $x_k=1$，$a_{jk}>0$ の変数 $x_k=0$ としてその行と列を掃き出す．
3) 各指標を計算し最大値 d_j を求め，$a_{jk}\neq 0$ を軸として，行と列を掃き出し，変数 x_k を消去．

Table 2　計算表

x	・・・	x_k	・・・	≦	指標	
c	・・・	c_k	・・・	c_0		
・		・		・		
a_j	・・・	a_{jk}	・・・	b_j	d_j	
・		・		・		
x_i	・・・	−1	・・・	0	d_i	
・		・		・		
x_p	・・・	1	・・・	1	d_p	*
・		・		・		

ここにTable 2で c_0 の初期値は0であり，最終結果の $-c_0$ が評価の最適値を与える．負号がつくのは(2)式を

$$\mathbf{a}_j^T\mathbf{x}-b_j\leqq 0,\quad j=1,2,\ldots\ldots,n \tag{2'}$$

とすれば解消される．

以上の手順を繰り返すと，各ステップで少なくとも変数一つが消去され，高々変数の数だけのステップで解が得られる．ただし，前節での仮定が成立しない冗長な制約式がある場合には，d_j の最大値が最適解を含まないこともある．この時は手順終了後，「解なし」の結果となるが、実行可能解に限らず指標の示す解を求める。この仮の解を各ステップのそれぞれの条件を満たすか判定することにより、活性条件の誤った選択が求められる。これがステップ4)となる。

New Method for Mathematical Programming Problems
Yoshihiro Yamamoto
Faculty of Engineering, Tottori University

5．0-1計画

次の問題[2]により、その解法を示す。

最大化： $z=-0.5x+5y_1+6y_2+9y_3+7y_4+9y_5$

条件：$x+23y_1+32y_2+45y_3+33y_4+41y_5=100$

$x\geqq 0 \qquad y_k\in\{0, 1\}$

0	x	y1	y2	y3	y4	y5	≧	d j
C	-0.5	5	6	9	7	9		max
A	1	23	32	45	33	41	100	
a1	-1							
b1		1					1	
b2			1				1	
b3				1			1	
b4					1		1	
b5						1	1	
c1		-1						
c2			-1					
c3				-1				
c4					-1			
c5						-1		

以下詳細は当日示すが、一回目の解から c5 と c4 が活性条件と判定され、合計 10 ステップで最適解$(x, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)=(0, 1, 1, 1, 0, 0)$を得た。この問題の特徴は bj または cj の一方が必ず活性条件となることである。

6．整数計画

次の数値例[3]により解法を示す。

最小化：$z=7x_1+3x_2+4x_3$

条　件：　$x_1+2x_2+3x_3\geqq 8$

$3x_1+x_2+x_3\geqq 5$

$0\leqq x_1、x_2、x_3\in Z$

[A]整数条件をはずした緩和問題を考える。

0	x1	x2	x3	≧	d j
c	7	3	4		max
a1	1	2	3	8	6.68
a2	3	1	1	5	8.44
b1	1	0	0	0	7
b1	0	1	0	0	3
b3	0	0	1	0	4

1) $x_3\geqq 5-3x_1-x_2$

1	x1	x2	≧	d j
c	-5	-1	-20	max
a1	-8	-1	-7	5.09
b1	1	0	0	
b2	0	1	0	
b3	-3	-1	-5	5.06

2) $x_2\geqq 7-8x_1$

2	x1	≧	d j
c	3	-13	max
b1	1	0	3
b2	-8	-7	
b3	5	2	3

$z=13+3x_1$：最小

$x_1\geqq 0$

$x_1\leqq 7/8 \quad 2/5\leqq x_1\leqq 7/8$

$x_1\geqq 2/5$

3) $x_1=2/5$、2) $x_2=7-8x_1=19/5$、

1) $x_3=5-3x_1-x_2=0$

緩和問題[A]の解：(2/5、19/5、0) のとき最小。

最小値 $z=13+3x_1=71/5=$**14.2**。

ステップ２において $2/5\leqq x_1\leqq 7/8$ より整数解を含まない。また、$z=13+3x_1$よりx_1の増加で z も増加する。従って、

[B1]ステップ０へ戻り $x_1=1$ とする。

0	x1	x2	x3	≧	d j
c	7	3	4		max
a1	1	2	3	8	
a2	3	1	1	5	
b1	1	0	0	1	
b2	0	1	0	0	
b3	0	0	1	0	

1) $x_1=1$

1	x2	x3	≧	d j
c	3	4	-7	max
a1	2	3	7	4.99
a2	1	1	2	4.95
b2	1	0	0	
b3	0	1	0	

2) $x_2\geqq 7/2-3/2x_3$

2	x3	≧	d j
c	-1/2	-35/2	max
a2	-1	-3	
b2	-3	-7	
b3	1	0	

$z=35/2-1/2x_3$

：最小。x_3：最大。

$x_3\leqq 3$

$x_3\leqq 7/3 \quad 0\leqq x_3\leqq 7/3$

$x_3\geqq 0$

3) $x_3=7/3$、2) $x_2=7/2-3/2x_3=0$、1) $x_1=1$

緩和問題[B1]の解：(1、0、7/3) のとき最小。

最小値 $z=35/2-1/2x_3=49/3=$**16.3**。

3) $x_3=2$、2) $x_2=1$、1) $x_1=1$

整数解：(1、1、2) のとき最小。

最小値 $z=7x_1+3x_2+4x_3=$**18**

x_3が減少のとき z は増加。

[B2]ステップ１へ戻り $x_3=1$ とする。

1	x2	x3	≧	d j
c	3	4	-7	max
a1	2	3	7	
a2	1	1	2	
b2	1	0	0	
b3	0	1	1	

2	x2	≧	d j
c	3	-11	max
a1	2	4	
a2	1	1	
b2	1	0	

3) $x_2=2$、2) $x_3=1$、1) $x_1=1$

緩和問題[B2]の解＝整数解：(1、2、1) のとき最小。最小値 $z=11+3x_2=$**17**。

さらに[B3]ステップ１へ戻り $x_3=0$ とすると、(1、7/2、0) のとき最小。最小値 $z=$**17.5**

[C1]ステップ１へ戻り $x_1=2$ とすると、(2、0、2) のとき最小。最小値 $z=22$、$x_1=0$ とすると解なしとなり、[B2]の解が最適解となる。

7．TSP（巡回セールスマン問題）

この問題も提案する方法で解くことができる。ただし、評価の最小値に対しては、部分巡回路を含む解となる。この部分巡回路を不成立とする条件を加えて新たに解き、これを繰り返すことにより、TSP の最適解を求めることができる。

8．まとめ　大規模問題に対しては、ステップ 4) の改良が今後の重要課題である。

参考文献

[1]刀根薫：数理計画、朝倉書店、1978。

[2]今野/鈴木編：整数計画法と組合せ最適化、p.54、日科技連、1982。

[3]今野浩：整数計画法、p37、産業図書、1981。

[4]柳浦・茨木：組合せ最適化、朝倉、2000。