

色々な撒布関数間の相関係数と 2次元揺らぎ方程式の解について*

3J-1

西山 佳和† 崔 金蘭‡
熊本大学自然科学研究科 §

大脇 信一‡
熊本大学理学部数理学科 §§

1 はじめに

至る所不連続な撒布関数を使った2次元揺らぎを含む方程式の解が、ブラウン積分を使って2次元正規分布に表される。この解の相関係数が方程式で使った撒布関数間の相関係数と一致していることが分かった。この相関係数は、 $N-N$ と $N-E$ の場合すでに計算されているので、解が最終的に求まる。

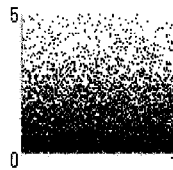
2 撒布関数とその積分

$0 < \alpha \neq \beta < 1$ とし、計算機で扱う数 x を2進で $f \times 2^\theta$ と正規表現した仮数部 f の下100 α %を0.の後に付けた数を一様撒布関数 $U_\alpha(x)$ と置くと、その値は区間 $(0, 1)$ に一様に分布する。正規撒布関数を $N_{\alpha,\beta}^\theta(x) = \sqrt{-2 \cdot \log U_\alpha(x)} \cdot \sin \pi(2 \cdot U_\beta(x) + \theta)$ と定義すると、この値の分布は標準正規分布になる。

正数 θ に対し、指数撒布関数を

$$E_{\theta,\alpha}(x) = -\frac{1}{\theta} \log(1 - U_\alpha(x))$$

と置くと、密度分布は、図1の



ように指数分布になっている。図1 $E_{1,0.5}(x)$ のグラフ

これらの関数のリーマン和は、分割数を大きくすると確率リーマン積分の値に近づき、多くの積分公式が得られている。

3 撒布関数間の相関係数

*On correlation coefficients between scattered functions and solutions of 2-dimensional fluctuating equations

†Yoshikazu Nishiyama ‡Kinran Sai †Shin-ichi Ohwaki

§ Graduate school of Science and Tech., Kumamoto Univ.

§§ Department of Mathematics, Kumamoto Univ.

相関係数を ρ とすると、 $\rho(N_{\alpha,\beta}^\theta, N_{\gamma,\zeta}^\xi)$ は、

(1) $\alpha = \gamma \neq \beta = \zeta$ のとき

$$\rho(N_{\alpha,\beta}^\theta, N_{\alpha,\beta}^\xi) = \cos \pi(\theta - \xi)$$

(2) $\beta = \zeta$ で α, β, γ がすべて異なるとき

$$\rho(N_{\alpha,\beta}^\theta, N_{\gamma,\beta}^\xi) \cong 0.785 \cdot \cos \pi(\theta - \xi)$$

(3) $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \zeta$ のとき

$$\rho(N_{\alpha,\beta}^\theta, N_{\gamma,\zeta}^\xi) = 0$$

となることが証明された[1]。

さらに $\rho(N_{\alpha,\beta}^\theta, E_{\zeta,\gamma}^\xi)$ も

計算され、

(i) $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ のとき

$$\rho(N_{\alpha,\beta}^\theta, E_{\zeta,\gamma}^\xi) = 0$$

(ii) $\alpha \neq \beta = \gamma$ のとき

$$\rho(N_{\alpha,\beta}^\theta, E_{\zeta,\beta}^\xi) \cong 0.56 \sin \pi(\theta - 0.33)$$

となることが分かっている。グラフの例を図2に示す。

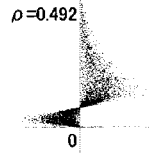


図2 $N_{0.3,0.5}^1 - E_{1,0.5}$

4 ブラウン積分

撒布関数 $S(x)$ の区間 (a, b) での1/2-リーマン和

$$\sum_{k=1}^n S(\xi_k) \sqrt{x_k - x_{k-1}}$$

の分布は、分割数 n を大きくしても、図3のように一定の正規分布になる。この分布をブラウン積分

$$\int_a^b S(x) \sqrt{dx}$$

と定義すると、合成関数、連続関数との積などについて多くの積

分公式が導かれる。図3 分割数 n - y - 密度 例えば、次の公式が成り立つ。

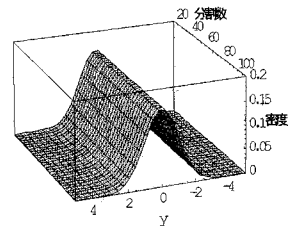


図3 分割数 n - y - 密度

$$\int_a^b N_{\alpha,\beta}^\theta(x)\sqrt{dx} = N(0, b-a)$$

$$\int_a^b \left(E_{\theta,\alpha}(x) - \frac{1}{\theta} \right) \sqrt{dx} = N\left(0, \frac{1}{\theta^2}(b-a)\right)$$

5 1次元の揺らぎを含む方程式の解

正規分布関数 $N_{\alpha,\beta}^\theta(t)$ に対して、初期値問題

$dx = N_{\alpha,\beta}^\theta(t)\sqrt{dt}$, $x(0) = 0$ を考え、その離散解

$$x(t_k) = x(t_{k-1}) + N_{\alpha,\beta}^\theta(t_{k-1})\sqrt{t_k - t_{k-1}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

を調べてみる。この解は分点 t_k を等分割から少し動かして折れ線で描くと、図4のようになる。

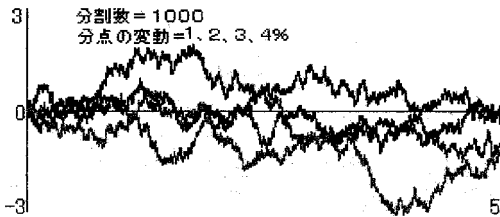


図4 初期値問題の離散解

そこで、1000回分点を変えて、 $k = 1, 2, \dots, 100$ について $(t_k, x(t_k))$ の点を描くと図5のようになる。

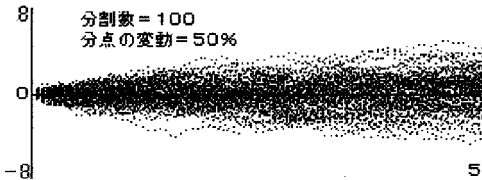


図5 $(t_k, x(t_k))$ の分布

この分布がブラウン積分で計算した解

$$\int_0^t N_{\alpha,\beta}^\theta(s)\sqrt{ds} = N(0, t) \text{ の密度分布 } \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} \text{ と一致}$$

している。

6 2次元の揺らぎを含む方程式の解

例えば、初期値問題

$$\begin{cases} dx = N_{0.3,0.5}^1(t)\sqrt{dt} \\ dy = (E_{1.0,5}(t) - 1)\sqrt{dt} \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = 0$$

の離散解

$$\begin{cases} x(t_k) = x(t_{k-1}) + N_{0.3,0.5}^1(t_{k-1})\sqrt{t_k - t_{k-1}} \\ y(t_k) = y(t_{k-1}) + (E_{1.0,5}(t_{k-1}) - 1)\sqrt{t_k - t_{k-1}} \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots$$

を折れ線で描くと、図6のようになる。

更に、 $t=1$ に達した解 $(x(t_k), y(t_k))$ を分点を1万回変化させて、点で描くと図7のようになり、2次元正規分布になっているのが分かる。

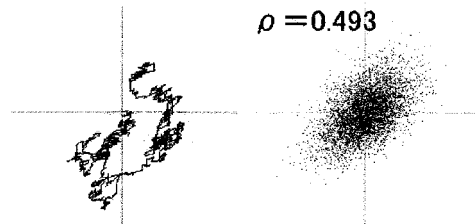


図6 折れ線による解 図7 $(x(t_k), y(t_k))$ の分布

更に、その相関係数が $\rho(N_{0.3,0.5}^1, E_{1.0,5})$ と一致している。従って、元の方程式の解は、 x, y についての分散がそれぞれ t 、相関係数が $\rho(N_{0.3,0.5}^1, E_{1.0,5})$ の2次元正規分布になる。同様な多くの例が数値実験で確かめられている。

7 おわりに

以上の結果を3次元以上に拡張しようとするとき、64ビットの数値では $U_\alpha(t)$ と $U_\beta(t)$ が直交するために、 $|\alpha - \beta| \geq 0.2$ となる必要があり、もっと多倍長の数を使わなければならない。

参考文献

[1] S. Ohwaki, K. Matsuda, On formulae for correlation coefficients between normally scattered functions II, Kumamoto Journal of Mathematics, Vol.13(2000) 83-92
 [2] <http://www.sci.kumamoto-u.ac.jp/~ohwaki/index-j.html>