5H－1

ランダムスパースな非線形微分方程式における Newton-Raphson法の粗粒度並列処理

古屋 穂高, 羽田 泰啓, 宮本 和則, 伊藤 小琴, 前川 仁孝, 伊與田 光宏

千葉工業大学情報工学科

1 はじめに

電力系統解析や電子回路解析等で用いられる非線形微分方程式の求解は処理の高速化が求められている [1, 2]。非線形微分方程式は代数式化して非線形連立方程式に変形し，収束性の良い Newton-Raphson 法を用いて求解するのが一般的である。この際の連立方程式の係数行列はシミュレーションにおいてランダムスパース行列となることが多い。ランダムスパース行列を係数行列に持つ連立方程式求解に間接法を用いると収束性に問題が生じることがあるので，LU 分解法等の直接法を用いた求解が多く用いられている。LU 分解法を用いた直接法による求解は係数行列がスパースであることを利用して並列処理が行われてきた [1, 2]。その一つの手法として係数行列を縁付きブロック対角行列 (BBDF 行列) にリオーダリングして粗粒度の並列性を抽出する手法がある。しかし，本手法は縁の部分行列に関わる計算が並列処理できないことが知られている [3]。そこで，本稿では縁付きブロック対角行列を Newton-Raphson 法における反復計算の一回前の値を使って定式化することによりブロック対角行列に変形し，LU 分解，前進代入，後退代入をプロセッサ毎に並列に計算する手法を提案する。また，本稿では非線形微分方程式の求解の例として電力系統過渡安定度計算を共有メモリ型並列コンピュータ Sun Enterprise 4500 上で評価する。

2 縁付きブロック対角行列の並列処理手法

本章では Newton-Raphson ループ中の連立方程式に対して粗粒度の並列性を抽出する手法である，ランダムスパース行列をリオーダリングして縁付きブロック対角行列に変形する手法を述べる。非線形連立方程式は Newton-Raphson 法を用いて線形化して連立方程式を求解する。連立方程式によって求めた解を改善して収束条件が満たされるまで反復求解する。この際，Newton-Raphson 法の連立方程式は式 (1)，式 (2) のようになる。

$$J(X^k)X^{k+1} = J(X^k)X^k - F(X^k) \tag{1}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \frac{\partial F_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1} & \frac{\partial F_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial X_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial X_1} & \frac{\partial F_n}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial X_n} \end{bmatrix} \tag{2}$$

ここで，k は Newton-Raphson 法の反復回数である。ヤコビ行列の要素は Newton-Raphson 法の繰返し計算中に更新される。このため，繰返し計算毎に LU 分解，前進代入，後退代入を行う必要がある。そこで，この修正方程式の連立一次方程式を高速に解くことで全体の処理の高速化を図ることができる。このヤコビ行列がランダムスパース行列となる連立方程式を高速に解く方法として，従来より，係数行列を縁付きブロック対角行列にリオーダリングして粗粒度レベル並列性を抽出し，並列処理が行われてきた。このリオーダリングをを行うことで式 (1) の右辺は図 1 のように表すことができる。

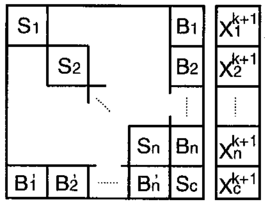

図 1: 縁付きブロック対角行列

図 1 のような行列を持つ連立方程式を LU 分解法を用いて計算する場合，非零要素の配置を考慮することにより，部分行列 $S_i, B_i, B'_i(i = 1, ..., n)$ に含まれる要素は S_i, B_i, B'_i 毎に並列に LU 分解可能である。部分行列 S_c はこれらの LU 分解後に LU 分解することができる。次に，前進代入の処理は，部分行列 $S_i(i = 1, ..., n)$ の値を用いて各ブロック間で並列に計算することができる。また，残りの部分行列 $S_c, B'_i(i = 1, ..., n)$ の値を用いて計算する前進代入は，他のブロックで計算された前進代入の結果を用いて計算する必要があるため，他のブロックの計算が終了した後に計算する。最後に，後退代入の処理は，部分行列 S_c の値を用いて計算する後退代入が終了した後，計算結果を他のブロックに送り，これらの値と残りの部分行列 S_i と部分行列 B_i の値を用いて各ブロック毎に並列に後退代入の計算ができる。しかし，この手法の場合 S_c の部分行列が $S_i(i = 1, ..., n)$ と並列処理できないという問題点がある。

3 Newton-Raphson 法の改良よる高速化

本章では Newton-Raphson ループ中の連立方程式を並列求解する手法について述べる。係数行列をリオーダリングすることで得られた縁付きブロック対角行列を LU 分解法によって求解する場合，図 1 の S_c の部分行列が並列処理できない部分行列となり，並列処理による高速化の妨げとなる。よって，部分行列 S_c と部分行列 $S_i(i = 1, ..., n)$ が並列に処理できれば処理の高速化が望める。そこで，リオーダリングすることによって得られた縁付きブロック対角行列に対して Newton-Raphson 法の反復計算の一回前の変数を用いてブロック対角行列に変形する手法を提案する。図 1 の縁付きブロック対角行列をブロック対角行列 $S_i(i = 1, ..., n), S_c$ と

A Coarse Grain Parallel Processing of Newton-Raphson Method for Non-Linear Differential Eqations with Random Sparse Matrix

Hodaka FURYA, Yasuhiro HADA, Kazunori MIYAMOTO, Ogoto ITO, Yoshitaka MAEKAWA, Mitsuhiro IYODA

Dept. of Computer Science, Chiba Institute of Technology.

縁の部分行列 B_i, B_i' の 2 項に分けると図 2 のようになる。この図 2 の第 2 項の X^{k+1} に対して Newton-Raphson 法の反復計算の一回前の値である X^k を用いて定式化し，右辺に移項して計算することにより図 3 が得られる。図 3 よりヤコビ行列がブロック対角行列となることが分かる。よって，Newton-Raphson ループ中の LU 分解，前進代入，後退代入を並列に行うことが可能となる。また，縁付きブロック対角行列からブロック対角行列に変形することで，縁の部分行列に対する計算量が減少し LU 分解処理の高速化が望める。しかし，X^{k+1} の値に対して X^k を用いたことで，この差の修正のために Newton-Raphson のループ回数が増える可能性がある。

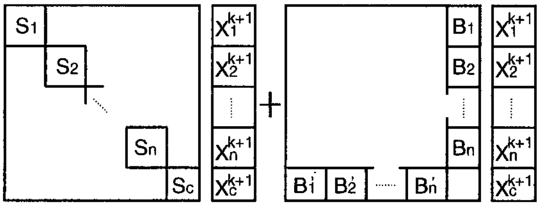

図 2: 縁付きブロック対角行列の変形

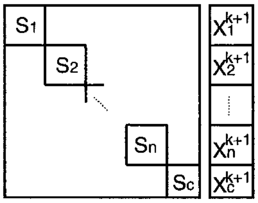

図 3: ブロック対角行列

4 性能評価

本章では提案した手法の有効性を確認するため，非線形微分方程式の求解の例として電力系統過渡安定度計算の同時解法を取り上げ，共有メモリ型並列コンピュータ Sun Enterprise 4500 上に実装して評価した結果について述べる。Sun Enterprise 4500 は，CPU に 400MHz の UltraSparc が最大 14 台接続することができる主記憶共有型マルチプロセッサである。並列化プログラミングモデルとして OpenMP を用いる。対象系統は 10 機 39 母線母線系統で発電機モデルに Park の詳細モデル [4] を用いた。シミュレーション条件は 0[s] で事故発生，0.05[s] で事故除去，シミュレーション時間は 2[s] である。また，系統の分割は 7 分割とした。表 1 に時間刻幅 0.01[s] の場合の BBDF 行列を生成した手法と提案手法の処理時間を表 2 に時間刻幅 0.005[s] の場合の BBDF 行列を生成した手法と提案手法の処理時間を示す。

時間刻幅が 0.01[s] の処理結果は，提案手法ではプロセッサ 1 台のとき 26.86[s]，プロセッサ 8 台のとき 16.11[s] となり，約 1.67 倍の速度向上が得られた。また，BBDF 行列手法では，プロセッサ 1 台のとき 26.01[s]，プロセッサ 8 台のとき 15.67[s] となり，約 1.66 倍の速度向上が得られた。また，時間刻幅が 0.005[s] の処理結果は，提案手法ではプロセッサ 1 台のとき 29.68[s]，プロセッサ 4 台のとき 18.35[s] となり，約 1.62 倍の速度向上が得られた。また，BBDF 行列手法では，プロセッサ 1 台のとき 43.63[s]，プロセッサ 8 台のとき 26.31[s] となり，約 1.54 倍の速度向上が得られた。時間刻幅 0.01[s] の場合は提案手法が BBDF 行列手法より処理時間がかかってしまったが，時間刻幅 0.005[s] の場合は提案手法が BBDF 行列手法より高速に処理できたことが分かる。この理由は時間刻幅を小さくしたことで X^{k+1} の値に対して X^k が小さくなり Newton-Raphson 法の収束ループ回数が減ったためである。また，提案手法の方は BBDF 行列手法に比べて並列処理よる処理速度の向上が得られた。

表 1: 時間刻幅 0.01[s] の過渡安定度計算処理時間

プロセッサ数	BBDF 行列手法 [s]	提案手法 [s]
1	26.01	26.84
2	21.45	22.63
3	20.94	21.34
4	19.19	19.46
5	19.12	19.12
6	18.84	18.97
7	15.88	18.73
8	15.67	16.11

表 2: 時間刻幅 0.005[s] の過渡安定度計算処理時間

プロセッサ数	BBDF 行列手法 [s]	提案手法 [s]
1	40.63	29.68
2	35.29	25.39
3	34.35	24.10
4	31.73	21.95
5	31.36	21.53
6	31.23	21.46
7	26.69	21.31
8	26.31	18.35

5 まとめ

本稿では縁付きブロック対角行列に対して，Newton-Raphson 法の反復計算の一回前の値を用いて定式化してブロック対角行列に変形し，LU 分解，前進代入，後退代入をプロセッサ毎に並列に計算する手法を提案した。また，電力系統過渡安定度計算を例にあげて共有メモリ型並列コンピュータ Sun Enterprise 4500 上に実装し，提案した手法の有効性を評価した。評価の結果，時間刻幅 0.005[s] において本手法は BBDF 行列手法より高速に処理することができた。よって，精度を得るために時間刻幅を小さくした時に本手法は有効であるといえる。また，縁付きブロック対角行列の縁の部分行列が大きくなり，Newton-Raphson ループの収束に必要な回数が増える可能性があるので，縁の部分行列が大きくならないようなリオーダリング手法を考える必要がある。

参考文献

[1] 中野恵一，笠原博徳:「マルチプロセッサシステム上での非線形方程式の並列処理」，電気学会論文誌 C, Vol.11,947-954 (1993)

[2] 前川仁孝，高井峰生，伊藤泰樹，西川健，笠原博徳:「スタティックスケジューリングを用いた電子回路シミュレーションの粗粒度/近細粒度階層的並列処理手法」，情報処理学会論文誌，Vol.37,No.10 (1996)

[3] 原田雄司，大山力:「並列処理による電力系統の可変時間刻み解析の高速化」，電気学会論文誌 B, Vol.117-B, No.3,pp323-329 (1997)

[4] 関根泰次:「電力系統過渡解析」，オーム社，(1984)