多面体表面のガード問題に対するより効率的なアルゴリズム[1]

4W－02

中田　真央 [2]　陳 致中 [3]
東京電機大学理工学部数理科学科 [4]

1　概要

いくつかの平面が囲みとる３次元空間上の部分領域のことを**多面体**と呼ぶ。多面体を囲むある平面が多面体をつくる他の平面によって切り取られる領域の内部の事を多面体の**表面**と呼ぶ。また、この表面を含む平面と他の平面の交線を**辺**と呼ぶ。多面体上で異なる辺と辺が交わる点のことを**頂点**という。多面体のある**点** a **からある面** f **が見える**ということは、点 a から面 f 上にある任意の点 b に対して線分 $\overline{ab}$ を面 f 上のみに含まれるように引けることをいう。ある多面体の**辺** e **から表面** f **が見える**ということを、辺 e 上に面 f を見ることのできる点が存在することを言う。またある多面体が**凸多面体**であるとはその多面体の任意の面 f に対して片側が多面体の内部であるとき,その反対側は多面体の外部であることを言う。

多面体表面の頂点によるガード問題とは多面体の全ての面を見ることができる最小の重さを持つ頂点集合を求めることを目的とする問題である。任意の n 頂点の多面体に対して、$\lfloor n/2 \rfloor$ 個の頂点が、多面体の表面全てをガードするために十分であることが知られている [2]。また $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 個の頂点ガードが必要な n 頂点多面体が存在することも知られている [2]。

多面体表面の辺によるガード問題とは多面体の全ての表面をみることのできる最小の重さを持つ辺集合を求める事を目的とする問題である。任意の n 頂点の多面体に対して $\lfloor n/3 \rfloor$ 本の辺があれば多面体の全ての表面をガードするのに十分であることが知られている [3]。また $\lfloor (4n-4)/13 \rfloor$ 本の辺が全ての表面をガードするために必要である n 頂点の多面体の存在が知られている [3]。

頂点による多面体表面のガード問題と辺による多面体表面のガード問題はＮＰ完全である事が知られている。またいまのところこの問題の近似解を求めるための実用的で効率の良いアルゴリズムはない。頂点によるガード問題のアルゴリズムの解の上限は $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ であり、辺によるガード問題のアルゴリズムの解の上限は $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ となっている [2]。しかし、最適解のサイズがこれより遙かに小さいこともありうる。このように、現在示されているアルゴリズムは最適解の大きさを考えないものになっているため実用性を考えると厳しい。

そこでここでは、今までの研究と同じように多面体表面のガード問題を平面グラフの面のガード問題に言い直して考える。**平面グラフの頂点によるガード問題**とは、グラフ上の全ての面に接する最小の重さを持つ頂点の部分集合を求める問題である。平面グラフ上である**辺** e **が面** f **をガードする**とは辺 e の少なくとも一方の端点が面 f に接していることをいう。**平面グラフの辺によるガード問題**とは全ての面をガードする最小の重さを持つ辺の部分集合を求める問題である。

具体的に多面体を平面 $X-Y$ に射影する方法を述べよう。簡便のためにこの多面体が平面 $X-Y$ より上にあると仮定しよう。そして、多面体の頂点を垂直に平面に射影する。具体的には３次元上にある多面体の頂点の位置は３つの実数の組 (x,y,z) で表すことができるがこれを z を除いた実数の組 (x,y) で表すようにする。このとき、どの３つの頂点も、同直線上に現れないようになる。また、多面体上の辺も同様に平面 $X-Y$ に垂直に射影する。このようにすると辺は平面上の線分として表される。この線分も辺と呼ぼう。多面体の面は全て単調であると仮定してよい。多面体の面 f が単調であるとは、平面 $X-Y$ の任意の垂線 l に対して l と f の交点が１つであることをいう。

多面体が凸多面体であるならば、$X-Y$ 平面への射影を辺同士が頂点以外の場所で交差することなし

[1] Approximation Algorithms for Guarding Polyhedral Terrains
[2] Masahiro Nakada
[3] Zhi-Zhong Chen
[4] Department of Mathematical Sciences, Tokyo Denki University

に行うことができる。このとき多面体のガード問題と、それを平面に射影したグラフのガード問題は等価である。これは、多面体上の全ての頂点、辺、および面に1対1上への対応が平面上の頂点、辺および面が存在することと、多面体上のある頂点から見える面というのが、平面上でその頂点に対応する頂点と隣接する面になることから明らかである。

平面グラフの面のガード問題を解く近似スキーマを具体的に述べる。これは Baker[1] と Chen[4] の手法を拡張したものである。まず、平面グラフ $G=(V,E)$ の頂点によるガード問題は次のようにして2部平面グラフにおけるある種の支配集合問題に帰着することができる。ここでは G の面を一つの頂点（slave と呼ぼう）とみなし、面に隣接していた頂点（master と呼ぼう）に対して、その面に対応する slave 頂点から master 頂点に対して辺をつくると、2部平面グラフ H を得ることができる。G の頂点によるガード問題は、H のすべての slave 頂点を支配するような最小の重さを持つ master 頂点の部分集合を求める問題になる。（達成したい近似率に依存して）定数 k を適当に選んでおく。H を互いによく重なる k-outerplanar グラフに分割したあと、各 k-outerplanar グラフについて定数幅の木分割を利用して最適解を $O(n\log n)$ 時間で求める。求めた最適解の中から重さが最も小さいものを近似アルゴリズムの解にする。k を大きくすればするほど、出力の支配集合の重さが最適に近づく。

平面グラフの辺による支配集合を求める問題を考えよう。上と同様に、与えられた平面グラフ $G=(V,E)$ に対して面をひとつの頂点（slave）とみなし、面に隣接していた頂点（master と呼ぼう）に対して、その面に対応する slave 頂点から master 頂点に対して辺をつくると、平面グラフ H を得ることができる。H が必ずしも2部平面グラフではない。G の辺によるガード問題は、H のすべての slave 頂点を支配するような最小の重さを持つ master 頂点間の辺の部分集合を求める問題になる。詳細は点による支配集合問題に似ているが、もっと複雑である。

2 結果

定理1 任意の定数 k に対して、与えられた n 頂点の平面グラフのすべての面をガードする重さが最適解の $(1+1/k)$ 倍以内の頂点の集合を $O(n\log n)$ 時間以内で求めるアルゴリズムが存在する。

系1 任意の定数 k に対して、与えられた n 頂点の凸多面体のすべての面をガードする重さが最適解の $(1+1/k)$ 倍以内の頂点の集合を $O(n\log n)$ 時間以内で求めるアルゴリズムが存在する。

定理2 任意の定数 k に対して、与えられた n 頂点の平面グラフのすべての面をガードする重さが最適解の $(1+1/k)$ 倍以内の辺の集合を $O(n\log n)$ 時間以内で求めるアルゴリズムが存在する。

系2 任意の定数 k に対して、与えられた n 頂点の凸多面体のすべての面をガードする重さが最適解の $(1+1/k)$ 倍以内の辺の集合を $O(n\log n)$ 時間以内で求めるアルゴリズムが存在する。

参考文献

[1] B.S. Baker. Approximation algorithms for NP-complete problems on planar graphs. *J. ACM* **41** (1994), 153-180.

[2] P. Bose, D. Kirkpatrick, and Z. Li. Efficient Algorithms for Guarding or Illuminating the Surface of a Polyhedral Terrain, *CCCG* (1996).

[3] P Bose, T. Shermer, and G. Toussaint, and B. Zhu. Guarding polyhedral terrains, *Computational Geometry*, **7** (1997), 173-185.

[4] Z.-Z. Chen. Approximation algorithms for independent sets in map graphs. *J. Algorithms*, **41** (2001), 20-40.

[5] H. Everett. Eduardo Rivera-Campo:Edge Guarding polyhedralterrains, *Computational Geometry*, **7** (1977), 201-203.