ショートノート

複素数の累乗根および逆数を求める反復法について†

佐 藤 幸 平††

0でない複素数aの平方根・逆数を求める Newton 法の定義関数は何れも，z^2の1次変換になっている．同じ変換をz^N ($N\geq3$) に施せば，Newton 法と同じ収束範囲で$\sqrt{a}$，$1/a$にN次収束する反復法の定義関数が得られる．各ステップの計算時間を考慮すると，その内$N=3$の場合だけが Newton 法より能率が良い．aのn (≥3) 乗根を計算する Newton 法は，その仕方では一般化できないが．König の式を用いてN次収束する反復法が作られる．$N=3$の場合は常に Newton 法よりも計算時間が少ない．nが大きいほど．$N=3$の場合の有利さは増大し，$N=4$以上の場合もnの増加につれ次々に Newton 法より有利になってゆく．

1. まえがき

完全平方でない2次方程式に対する通常の Newton 法が，有理反復法としては例外的に単純な収束範囲を有することはよく知られている[1),2),5),6)]．しかしそれが，複素数の逆数を加減乗の演算の反復により求める周知の方法[3)~6)]と共に，写像z^2の反復から1次変換で導かれる事実は，案外注意されていないようである．z^2の代りにz^N ($N\geqq3$) を用いれば，2次方程式の根により速く収束する有理反復法の系列と，複素定数の逆数に同様に収束する整式反復法の系列とが同時に得られる．但しそれらは，Newton 法に比べて常に実用的に有利であるとは限らない．

高次方程式に対する Newton 法の収束範囲の形状は複雑[1),2),4),5),8)]で，上記のような形での一般化は困難であるが，局所的考察による一般化は幾通りも試みられている[3),6),7)]．そのひとつ (König の式) を累乗根の計算に用いたときの計算能率を Newton 法と比較する．

2. 2次方程式に対する Newton 法の一般化

関数φによる反復法，すなわち与えられた初期値z_0から数列$z_1=\varphi(z_0), z_2=\varphi^2(z_0), \cdots, z_n=\varphi^n(z_0)$を作り出す操作を$It[\varphi]$と略記する．$\varphi$を$It[\varphi]$の定義関数と呼ぶ．$\varphi$の不動点$x$に収束するような$It[\varphi]$の初期値の存在範囲$\{z_0|\lim_{n\to\infty}\varphi^n(z_0)=x\}$を$U(x)$と記す．$T$を任意の1次関数，$\psi=T\varphi T^{-1}$とするとき，$It[\psi]$を“$It[\varphi]$を$T$で同値変換した反復法”または単に“$It[\varphi]$に同値な反復法”と呼ぶ．このとき$x$が$\varphi$の不動点ならば$T(x)$は$\psi$の不動点であり，$U_\psi[T(x)]=T[U_\varphi(x)]$なる関係が成立する．例えば2次方程式

$$f(z)\equiv z^2+pz+q=0 \quad (p^2\neq4q) \tag{1}$$

の2根をα,βとするとき，Newton 法

$$It\left[z-\frac{f(z)}{f'(z)}\right]=It\left[\frac{z^2-q}{2z+p}\right] \tag{2}$$

は，1次関数$T(z)=(z-\alpha)/(z-\beta)$により$It[z^2]$に同値変換される．逆に$It[z^2]$は$T$の逆関数$T^{-1}(z)=(\beta z-\alpha)/(z-1)$により(2)に同値変換される．$It[z^2]$の安定不動点* $0,\infty$は(2)の安定不動点α,βにそれぞれ対応し，$It[z^2]$における$U(0)$, $U(\infty)$はそれぞれ単位円の内部および外部である．故に(2)における$U(\alpha)$, $U(\beta)$は単位円の内外に変換T^{-1}を施したもの，すなわち線分$\overline{\alpha\beta}$の垂直2等分線で境された2個の半平面である．

上記の議論の中の$It[z^2]$を$It[z^N]$ ($N\geqq2$) で置きかえれば，(2)と同じ安定不動点，同じ収束範囲を有し，かつα,βの近くでN次収束をなすN次関数

$$\frac{z^N-q\sum_{k=2}^{N}\binom{N}{k}s_{k-1}z^{N-k}}{\sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}s_kz^{N-k}} \tag{3}$$

による反復法が得られる．ここに$s_1=1$, $s_2=p$であ

† On Iterative Methods of Calculating Radicals and the Inverse of a Complex Number by KOHEI SATO (Faculty of Engineering, The University of Tokyo).

†† 東京大学工学部計数工学科

* φの不動点xが$It[\varphi]$のxの収束範囲$U(x)$の内点のとき，xを$It[\varphi]$の安定不動点と呼ぶ．

り，$k\geqq 3$ に対する s_k は漸化式

$$s_k=ps_{k-1}-qs_{k-2} \qquad (4)$$

により計算される，(3)を $\varphi(N,z)$ と書くことにすれば $\varphi(2,z)$ は言うまでもなく Newton 法の定義関数であり，$\varphi(3,z)$ は Halley の反復法[7]を(1)に適用したときの定義関数に等しい．また $It[\varphi(2^n,z)]$ は Newton 法の n ステップを1ステップにまとめた反復法にほかならないことが容易に確かめられる．

大きなNの値に対する(3)の係数は，(α,β が既知でない限り）一般には漸化式（4）を用いて逐次に計算しなくてはならないが，特に $p=0$ の場合は

$$s_{2k}=0,\ s_{2k+1}=(-q)^k \qquad (5)$$

となる．ここで更に $q=-a\,(\neq 0)$ とおけば(3)は a の平方根に収束する有理反復法の定義関数

$$\phi(a,N,z)=\frac{\sum_{k=0}^{[N/2]}\binom{N}{2k}a^k z^{N-2k}}{\sum_{k=0}^{[(N-1)/2]}\binom{N}{2k+1}a^k z^{N-2k-1}} \qquad (6)$$

を与える．N が十分大ならば，$z\in U(a^{1/2})$ なる限り $\phi(a,N,z)\fallingdotseq a^{1/2}$ と見て差支えない．特に a が正の実数の場合は，$1\in U(\sqrt{a})$ であるから，

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1+\binom{N}{2}a+\binom{N}{4}a^2+\cdots}{\binom{N}{1}+\binom{N}{3}a+\binom{N}{5}a^2+\cdots}=\sqrt{a} \qquad (7)$$

となる．(7)の左辺の分数式は(a を独立変数と考えれば）1を中心とする $\sqrt{a}$ の Padé 展開に他ならない．

3. 逆数を求める Newton 法の一般化

a を 0 以外の複素数，$T(z)=(1-z)/a$ として，$It[z^N]$ を T で同値変換すれば，N次整式

$$\psi(a,N,z)=z\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k\binom{N}{k+1}(az)^k \qquad (8)$$

による反復法が得られる．z^N の不動点 $0,1,\infty$ は ψ の不動点 $1/a,0,\infty$ に対応し，$It[\psi]$ での $U(1/a)$ は，中心 $1/a$ 半径 $1/|a|$ の円の内部である．$N=2$ の場合の $It[\psi]$ は方程式 $1/z-a=0$ に対する周知の Newton法，$N=3$の場合は同じ方程式に対する Halley 法に他ならない．$N=4$ の場合は「1つおきのNewton法」であり，一般に $N=2^{n+1}$ が「nステップおきの Newton 法」を与えることになる．

もし $z\in U(1/a)$ ならば，非常に大きなNに対しては $\psi(a,N,z)\fallingdotseq 1/a$ である．例えば a が 2^{n-1} と 2^{n+1} の間にある正の実数ならば $2^{-n}a=b$ として，

$$\lim_{N\to\infty}2^{-n}\left[\binom{N}{1}-\binom{N}{2}b+\binom{N}{3}b^2-\cdots\right]=\frac{1}{a} \qquad (9)$$

4. 計算能率の比較

aとNが与えられているとき，$\phi(a,N,z)$ および $\psi(a,N,z)$ の計算にはいずれもN個内外の乗除算が含まれるから，それらによる反復法の1ステップと同程度の精度改良を行う通常の Newton 法が平均 $2\log_2 N$ 個の乗除算を含むことを考えると，大きなNの値に対する $It[\phi]$，$It[\psi]$ は全く実用的ではない，比較的小さなNの値に対してはどうであろうか．

$\phi(a,N,z)$ は(6)の形のままではN回の乗算と1回の除算を必要とするが，Nが偶数のときには

$$\left[z+\left\{\frac{N^2-1}{3}a-\frac{\frac{(N^2-1)(N^2-4)}{45}a^2z^{N-4}+\cdots}{z^{N-2}+\frac{(N-1)(N-2)}{6}az^{N-4}+\cdots}\right\}\Big/z\right]\Big/N \qquad (10)$$

と書き直し，Nが奇数のときには

$$\left[\frac{1}{N}+\frac{\frac{N^2-1}{3N}az^{N-3}+\cdots}{z^{N-1}+\frac{(N-1)(N-2)}{6}az^{N-3}+\cdots}\right]z \qquad (11)$$

と書き直すことにすれば，乗算と除算の回数合計N回で計算できる．$\psi(a,N,z)$ は(8)の形のままでも乗算N回で計算できる．一方，$2\log_2 N>N$ は $N=3$ の場合にのみ成立し，$2\log_2 3=3.1699\cdots$ である．

すなわち，一定精度に達するまでに要する乗除算の回数で計算能率を計るとすれば，$It[\phi(a,3,z)]$ と $It[\psi(a,3,z)]$ だけが Newton 法より僅かに勝れていることになる．

5. 立方根および高次の累乗根の計算

3次以上の代数方程式に対する Newton 法は，収束範囲の形状が一般に複雑怪奇で，2次方程式の場合のような形での一般化は多分不可能であるが，単根に対して任意の収束次数を与える反復法は色々作られている[3),4),6),7)]．それらの内，比較的低次の有理関数で定義され，従ってかなり実用性もありそうに思われるのは，König の公式と呼ばれる

$$z+(N-1)\left(\frac{1}{f(z)}\right)^{(N-2)}\Bigg/\left(\frac{1}{f(z)}\right)^{(N-1)} \tag{12}$$

による反復法である[3]．それは $f(z)=0$ のすべての単根にN次収束，重根に１次収束する．特に $N=2$ の場合は Newton 法，$N=3$ の場合は Halley の反復法[7]となる．(12) に (1) を代入すれば (3) 式が得られ，$f(z)=1/z-a$ を代入すれば (8) 式が得られる．

König の公式で $f(z)=z^n-a$ と置いた結果を $\Phi(a,n,N,z)$ と記すことにする．これは $\phi(a,N,z)$ の一般化である．任意のNの値に対する $\Phi(a,n,N,z)$ の式を直接書き下すことは困難と思われるが，

$$\Phi(a,n,3,z)=\frac{z[(n-1)z^n+(n+1)a]}{(n+1)z^n+(n-1)a} \tag{13}$$

$$\Phi(a,n,4,z)=\frac{z[(n^2-1)z^{2n}+2(2n^2+1)az^n+(n^2-1)a^2]}{(n+1)(n+2)z^{2n}+4(n^2-1)az^n+(n-1)(n-2)a^2} \tag{14}$$

であり，一般に $3\leqq N\leqq n+1$ のとき $\Phi(a,n,N,z)$ は z^n とaに関する $N-2$ 次形式の比とzの積となることが容易に知られる．故にいまzの値から z^n の値を得るまでに必要な最小乗算数を $L(n)$ とすれば，$\Phi(a,n,N,z)$ を (11) 式と同様の形に変形したものは $L(n)+2N-4$ 回の乗除算で計算できる．一方 $\Phi(a,n,2,z)$ は z^{n-1} と乗除算１回ずつで計算できるから，

$$L(n)+2N-4<[L(n-1)+2]\log_2 N \tag{15}$$

ならば $It[\Phi]$ の方が Newton 法より能率が良いことになる．$N=3$ ならば n が何であっても (15) が成立し，両辺の差はnとともに（一進一退を繰返しながらも）際限なく増大して行く．$n\geqq 4$ では $N=4,5$ でも (15) が成立ち，nの増加につれ更に多くの N に対し (15) が成立する．しかし $n\leqq 18$ では，$N=3$ の場合よりも平均乗除算数の少ないものは現われない．

6. あとがき

３次収束をなす有理反復法は Newton 法ほど知られていないが，電卓やマイコンの組込関数などに用いられる機会がありそうに思う．紙数の都合で数値例は省略したが，$N=3,4,5$ に対する $It[\phi]$，$It[\Phi]$ の実例および n,N の小さな値に対する (15) の計算は小型プログラム電卓 (YHP 25) を用いて行った．もし遺漏があれば何とぞ御叱正をお願い致します．

参考文献

1) M. Fatou: Sur les solutions unifomes de certaines équations fonctionelles, C. R. Acad. Sci. Paris, 15 Oct., pp. 546–548 (1906).
2) G. Julia: Mémoires sur l'itération des fonctions. rationelles, J. Math. Pures Appl., 7e série, Tome IV, 1, pp. 4–245 (1918).
3) A. S. Householder: Principles of Numerical Analysis, McGraw-Hill, New York (1953).
4) 一松　信：数値計算，至文堂 (1953).
5) B. Rall: Computational Solution of Nonlinear Operator Equations, John Wiley & Sons, New York (1969).
6) A. Ostrowski: Solution of Equations and Systems of Equations, Academic Press, New York (1973).
7) M. Davies and B. Dawson: On the Global Convergence of Halley's Iteration Formula, Numer. Math., 24, pp. 133–135 (1975).
8) K. Sato: Equivalence Class and Invariant Figures of Rational Iterations with Special Reference to the Global Convergence Features of Newton's Method, Memories of Numerical Mathematics, 3, pp. 1–32 (1978).

(昭和 53 年 5 月 15 日受付)
(昭和 53 年 7 月 7 日採録)