ショートノート

紀一誠著‘資源切り出し型待ち行列の解析’について†

伊澤 喜三男†† 小田 豊†††

本稿は,「情報処理」Vol. 19 (1978) No. 2 に掲載された紀一誠著「資源切り出し型待ち行列の解析」における理論的結果とシミュレーション値の間にあまりにも大きな相違があることを示し,その原因が同論文の補題1にあること,すなわち,補題1が成立しないことを示唆する.

1. まえがき

「情報処理」Vol. 19 (1978) No. 2 に掲載された紀一誠著「資源切り出し型待ち行列の解析」(以下,文献1)という)を検討した結果,理論上の重大な問題点に気付いたので,本稿は,それについて述べる.

文献 1) は,題名の示すように資源切り出し型待ち行列システムを理論的に扱ったものである.これまで,このシステムが過密輻輳状態にあることを仮定した時の解析を文献 2),3),4),5) 等が扱っており,過密輻輳状態にない場合を文献 1) 及び文献 6) が扱っている.

以下の議論では,文献 1) における記号と用語を用いるから,諸結果を含めて詳細は文献 1) を随時参照するものとする.

2. 理論値とシミュレーション値の比較

見通しをよくするため呼の資源保有時間Hについての文献 1) の定式化(Hはパラメータμの指数分布に従う)を次のように一般化する.すなわち,資源を保有する呼が時間間隔$(t, t+\Delta t]$の間に終了する確率は$\mu(t)\Delta t+0(\Delta t)$である.ここで,$\mu(t)$の値は時刻$t$における資源保有呼数$K(t)$が$k$であるならば,$\mu_k$である.

$\{\mu_k | k=1,2,\cdots\}$は,普通,次の条件を満たすと考えられるから,

$$\left.\begin{array}{l}\mu_1\geq\mu_2\geq\cdots\geq\mu_k\geq\cdots\\ \mu_1\leq 2\mu_2\leq\cdots\leq k\mu_k\leq\cdots\end{array}\right\} \quad (1)$$

条件(1)の両端を取ったとき,それぞれモデルⅠ,モデルⅡということにする.すなわち,

(モデルⅠ) $\mu_1(=\mu)=\mu_2=\cdots=\mu_k\cdots$

(モデルⅡ) $\mu_1(=\mu)=2\mu_2=\cdots=k\mu_k=\cdots$

文献 1) のモデルはモデルⅠに相当する.

切り出し要求個数X_iの分布$\{f_n\}$は,独立かつ同一の任意のものであってよい.ここでは,一様分布,すなわち,$\lambda_n/\lambda=$一定 と仮定して,モデルⅠとモデルⅡの動作をシミュレートし,そのシミュレーション結果の一部をモデルⅠについては文献 1) の理論値,モデルⅡについては文献 6) の理論値と対比させると**表1**, **表2**のようになる.

シミュレーションの結果については,以下の事実から一応の信頼を置いてよいと考えられる.

(1) モデルⅡのシミュレーション結果は文献 6) の理論値とほぼ一致している.

(2) モデルⅠのシミュレーション結果についても次の点が認められる.

ⅰ) 表2の$a/u_m(C)$のシミュレーション値0.8242…の文献 6) による理論値 0.8272 に対する相対誤差*は0.35% であるというようにかなりの精度の一致が見られる.

ⅱ) モデルⅠとモデルⅡのシミュレーション・プログラムは一部を除外すれば同じものである.

ⅲ) X_iの分布$\{f_n\}$を deterministic とするとき,シミュレーション結果は M/M/s 型待ち行列システムの理論値とほぼ一致する.

文献 1),6) の理論値とシミュレーション値の比較によって次のことが分る.

(1) 表1を一見して,モデルⅠでは,シミュレー

---

† On 'Analysis of Queueing Model with Finite Number of Resources and Arbitrary Request Distribution' by Kino by KIMIO IZAWA (Department of Information Engineering, Nagoyo Institute of Technology) and YUTAKA ODA (Graduate School of Engineering, Tokyo Institute of Technology).

†† 名古屋工業大学情報工学科

††† 東京工業大学大学院理工学研究科修士課程

* α の β に対する相対誤差を $100(\alpha-\beta)/\beta$ (%) と定義する.

表 1　理論値とシミュレーション値の比較 I

Table 1　Comparison of theoretical values with simulation values, I.

モデル	C	a	$r(j,k)$	理論値	シミュレーション値	相対誤差(%)
I	3	0.5	$r(2,1)$	.6667	.7721	15.83
			$r(2,2)$	.3333	.2279	−31.62
			$r(3,1)$	.6667	.8450	26.76
			$r(3,2)$	.2963	.1417	−52.17
			$r(3,3)$	.0370	.0133	−64.01
			$r(4,1)$	.6667	.8729	30.95
			$r(4,2)$	.2963	.1172	−60.45
			$r(4,3)$	.0370	.0099	−73.24
		0.7	$r(2,1)$	.6667	.7562	13.43
			$r(2,2)$	.3333	.2438	−26.85
			$r(3,1)$	.6667	.8201	23.01
			$r(3,2)$	.2963	.1643	−44.55
			$r(3,3)$	.0370	.0157	−57.57
			$r(4,1)$	.6667	.8455	26.81
			$r(4,2)$	.2963	.1439	−51.43
			$r(4,3)$	.0370	.0106	−71.35
II		0.5	$r(2,1)$	.6667	.6597	−1.05
			$r(2,2)$	.3333	.3403	2.11
			$r(3,1)$	.6667	.6660	−0.11
			$r(3,2)$	.2963	.2955	−0.26
			$r(3,3)$	.0370	.0385	4.01
			$r(4,1)$	.6667	.6694	0.41
			$r(4,2)$	.2963	.2941	−0.75
			$r(4,3)$	.0370	.0365	−1.43
		0.7	$r(2,1)$	.6667	.6564	−1.53
			$r(2,2)$	.3333	.3436	3.07
			$r(3,1)$	.6667	.6699	0.50
			$r(3,2)$	.2963	.2922	−1.38
			$r(3,3)$	.0370	.0378	2.10
			$r(4,1)$	.6667	.6672	0.08
			$r(4,2)$	.2963	.2963	0.00
			$r(4,3)$	.0370	.0365	−1.50

ション値の理論値に対する相対誤差が −73〜30% と極めて大きく，しかも，文献 1) の $r(j,k)$ の理論値はCに対してaに無関係に定まるのに，シミュレーション値は a によっても変化することが分る．また，$r(j,k)$ の理論値を $t(j,k)$，シミュレーション値を $s(j,k)$ と置くと，

$$\frac{s(j+1,1)-t(j+1,1)}{t(j+1,1)} > \frac{s(j+1,2)-t(j+1,2)}{t(j+1,2)} > \cdots > \frac{s(j+1,j)-t(j+1,j)}{t(j+1,j)} \quad (j \leq C) \qquad (2)$$

という一般的傾向を顕著に示している．一方，モデルIIについては $r(j,k)$ の理論値とシミュレーション値はほぼ一致している．

（2）表2においても，モデルIIについての文献 6) による理論値とシミュレーション値がほぼ一致しているのに対し，モデルIに関する文献 1) の諸結果の計算値に対するシミュレーション値の相対誤差が中には120% のものもあるなど異常に大きい．

表 2　理論値とシミュレーション値の比較 II

Table 2　Comparison of theoretical values with simulation values, II.

モデル	C	a	諸結果		理論値	シミュレーション値	相対誤差(%)
I	3	1.0	$P(j)$	$j=0$	.2095	.1416	−32.41
				1	.2095	.1427	−31.89
				2	.1571	.1139	−27.50
				3	.1147	.0935	−18.48
				4	.0627	.0774	23.45
				5	.0342	.0664	88.30
			$E(J)$		3.0543	5.4549	78.60
			$a/u_m(C)$		.7297	.8242	12.95
			$D(k)$	$k=0$	.2095	.1416	−32.41
				1	.5968	.7221	−21.00
				2	.1884	.1282	−31.95
				3	.0052	.0081	55.77
			$E(K)$		1.0000	1.0028	0.28
			$Z(l)$	$l=0$	.2095	.1416	−32.41
				1	.4073	.2875	−29.41
				2	.6653	.5604	−15.77
				3	1.0000	1.0000	0.00
			$E(Z)$		1.7163	2.0059	16.87
			$E(W)/h$		2.2806	4.4017	93.01
			$\frac{E\{W(\omega)\}}{h}$	$\omega=1$	1.9841	4.1054	106.92
				2	2.2999	4.4688	94.30
				3	2.5635	4.6472	81.28
			$E(L)$		2.0543	4.5311	120.57
			$M(0)$		.7155	.8032	12.26
II		0.7	$P(j)$	$j=0$	.3000	.3032	1.09
				1	.2100	.2011	−3.24
				2	.1470	.1453	−1.16
				3	.1029	.1024	−0.49
				4	.0720	.0722	0.28
				5	.0504	.0511	1.39
			$D(k)$	$k=0$	.3000	.3032	1.09
				1	.5366	.5329	−0.70
				2	.1506	.1511	0.33
				3	.0127	.0127	0.00
			$E(K)$		.8760	.8733	−0.32
			$Z(l)$	$l=0$	.3000	.3032	1.09
				1	.4244	.4255	0.26
				2	.6451	.6428	−0.36
				3	1.0000	1.0000	0.00
			$E(Z)$		1.6305	1.6234	−0.43

3. どこに問題があるか

ここでは極めておおざっぱなことしか述べないが，モデルIについては，時間間隔 $(t, t+\Delta t]$ の間に k 個の資源保有呼のうちどれか1つが終了する確率は $k\mu\Delta t+0(\Delta t)$ であるから，時刻 $t+\Delta t$ においても依然として $K(t+\Delta t)=k$ である確率は $k\mu$ にも依存することが直観的にほぼ明らかであろう．このことは，$r(j, k)$ が単に $k+1$ 個の呼の資源切り出し要求量の分布だけで定まるものではないということ，すなわち，補題 1：

$$r(j, k)=\begin{cases}F_k(C)-F_{k+1}(C) & (1\leq k\leq j-1)\\ F_j(C) & (k=j)\end{cases} \tag{3}$$

に問題があることを示唆している．

このことをもっとはっきりさせよう．

$D(k)=P_r\{K=k\}$ に着目する．

$$\begin{aligned}D(k)&=\sum_{j=k}^{\infty}r(j, k)P(j)\\ &=F_k(C)\sum_{j=k}^{\infty}P(j)-F_{k+1}(C)\sum_{j=k+1}^{\infty}P(j)\end{aligned} \tag{4}$$

であるので，a を過密幅輳条件（A と置く）に近づけると，$\sum_{j=k}^{\infty}P(j)$, $\sum_{j=k+1}^{\infty}P(j)$ は1に収束するから，

$$D(k)\rightarrow F_k(C)-F_{k+1}(C)\quad(a\rightarrow A) \tag{5}$$

を得る．

一方，文献3)，4) はまさにこの過密幅輳の場合を扱っており，そこで得られ，しかも，シミュレーションによってその正当性を充分に確められている式：

$P_{k,C}$(過密幅輳時における $K=k$ の確率)

$$=\frac{K_{C,C}}{k\mu}\{F_k(C)-F_{k+1}(C)\} \tag{6}$$

ただし，

$$K_{C,C}=\frac{1}{\sum_{k=1}^{C-1}\frac{1}{k\mu}\{F_k(C)-F_{k+1}(C)\}+\frac{1}{C\mu}F_C(C)} \tag{7}$$

に対して，明らかに

$$D(k)\nrightarrow P_{k,C}\quad(a\rightarrow A) \tag{8}$$

である．

4. 文献 1) 全体としてはどうか

モデルIは M/M/s 待ち行列の拡張になっている．モデルIにおいて分布 $\{f_n\}$ が deterministic である場合が M/M/s に対応するから，それに限定して文献1) を見ると，この時の微分方程式(5.2)（文献1)）には何の誤りも含まれていないので，これから M/M/s に関する正しい諸結果が生み出されることは明らかである．しかし，これらはすべて既知である．

そこで，文献1) の価値は元々 $\{f_n\}$ が deterministic でないときにあるが，このときには，補題1が諸結果を得る上でかなめとなっているから，ほぼ全部の結果に問題が波及するということになる．

5. おわりに

著者らは，研究の進展のため期待を込めて文献 1) を検討したのであるが，意外にも以上のような結果を得たので，更に原著者並びに読者諸氏の検討を望む．

参考文献

1) 紀 一誠：資源切り出し型待ち行列の解析，情報処理，Vol. 19, No. 2, p. 151 (1978).
2) T. Betteridge: An Analytic Storage Allocation Model, Acta Informatica, Vol. 3, Fasc. 2, p. 101 (1974).
3) a 伊澤喜三男：動的再配置の解析とスケジューリングの効果，情報処理学会システム性能評価研資，74-4 (1974).
b 伊澤喜三男：動的再配置の確率モデル，名古屋工業大学学報，第29巻，p. 369 (1977).
4) 伊澤喜三男：動的再配置の解析と最適システムの設計，情報処理，Vol. 16, No. 5, p. 410 (1975).
5) 伊澤喜三男：動的再配置系における待ち時間の平均，信学論 (D)，Vol. 59-D, No. 2, p. 77 (1976).
6) 伊澤喜三男：記憶空間配分の待ち行列モデル，情報処理，Vol. 19, No. 3, p. 219 (1978).

(昭和53年3月20日受付)
(昭和53年6月15日採録)