

常微分方程式数値解法的设计†

渡 辺 嘉二郎†† 寺 岡 誠††

この報告は与えられた系の常微分方程式をその特性にみあって合理的に解く数値解法的设计について述べている。近年、有限要素法の発達、プロセスオンラインデジタル制御の実用化にともない常微分方程式の高速・安定な数値解法が必要になってきた。このような必要性に対し、与方程式に適する数値解法を選択、開発及び評価などに関し多くの研究がなされている。また、この結果を用いた動的系のシミュレータ、構造解析などのソフトウェアも多く開発されてきている。ここでは、このような研究を数値解法的设计という立場からとらえ、単段型の常微分方程式数値解法的设计問題について述べる。本論文の構成は、1章 まえがき、2章で一般的な設計手順を、3章で具体的設計例を示している。これらより、本設計法で作られるアルゴリズムは、与えられる方程式を良い効率で処理できることがわかり、ある特定の系の解析ソフトウェアあるいは専用シミュレータにうまく応用され得る。

1. ま え が き

この報告は与えられた系の常微分方程式をその特性にみあって合理的に解く数値解法的设计¹⁾について述べている。近年、有限要素法の発達、オンライン計算機制御の実用化にともない常微分方程式の高速・安定な数値解法が必要になってきた。このような要請に対し、与方程式に適する数値解法を選択、開発及び評価などに関し多くの研究がなされている^{2)~6)}。また、この結果を用いた動的系のシミュレータ、構造解析などのソフトウェアも多く開発されてきている。

ここでは、このような研究を数値解法的设计という立場からとらえ、単段型の常微分方程式数値解法的设计問題について述べる。この場合、数値解法は与えられた方程式ごとに設計されるわけだが、方程式が特殊な性質をもつ場合とか、専用シミュレータのように使用頻度が高い場合、特にその効果が期待される。

2. 常微分方程式数値解法的设计手順

2.1 方程式の特質

2.1.1 方程式の種類

工学系の解析・設計で取り扱われる系の方程式は、表1のような場合が多い。この表の方程式の種類によ

って採用されるアルゴリズムの形態、特質は異なる。表1に各種方程式を解くにあたっての困難さ、配慮をまとめて示してある。

2.1.2 数値解に対する要求

方程式の数値解に対する要求は、その目的によって異なる。一般に表2に示すような case が考えられる⁷⁾。表中 case 1 であることが最も望ましいが、これを実現するためには高速な大型計算機を用いるか優れた計算法を開発する以外ない。しかし計算法開発には限界があり、実際には速度か精度のいずれかを犠牲にする case 2, case 3 の場合が多い。このような場合、それに応じた数値解法を設計することは可能である。

2.2 常微分方程式数値解法の基礎と分類

2.2.1 常微分方程式数値解法の基礎

常微分方程式を数値的に解く場合、式(1)に示す微分方程式を式(1)'の差分方程式に変換し、その差分方程式を解いていると解釈できる。

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1)$$

$$x_{n+1} = F(x_n, u_{n-k}, \dots, u_n, \dots, u_{n+l}) \quad (1)'$$

式中 x は n 次元解ベクトル、 u は非同次項の m 次元外力ベクトル、サフィックスは時点を意味する。式(1)の特別の場合として式(2)の非同次項 u が離散値データ u_n の l 次内挿多項式で与えられる線形常微分方程式

$$\dot{x} = Ax + B \sum_{i=0}^l \frac{t^i}{i!} \Gamma^i u_n \quad (2)$$

は次式のように差分方程式に変換される⁸⁾。

† A Design of the Numerical Computation Methods for Solving the Ordinary Differential Equations by KAJIRO WATANABE and MAKOTO TERAOKA (Control and Instrumentation Course, College of Engineering, Hosei University).

†† 法政大学工学部計測制御専攻

表 1 常微分方程式の分類と数値解法によって解く場合の配慮
Table 1 Classification of the ordinary differential equations when they are solved by the numerical computation method.

| | | | |
|--------|------|------------|--|
| 線形 | 大規模 | 組織的スパース | 帯状構造, へり付き帯状構造のような特殊な行列構造をもつ線形常微分方程式で, これらの構造を積極的に利用する. |
| | 大規模 | 非組織的スパース | スパースな行列だが要素の配列は組織的でない. 陰解法の場合には, このスパース性を利用することができない. |
| 固有値の分布 | 中小規模 | | スパース性の考慮の必要がなく, 標準的なアルゴリズムがそのまま適用できる. |
| | | 広い領域に分布 | スティッフな方程式と呼ばれ, 速い応答成分と遅い応答成分が混在し, 数値的に不安定に陥りやすい. 安定性の強い解法で解く. |
| | | 虚軸近傍 | 振動的な方程式で, その特性を利用してうまく解ける. またうまい解法も作れる. |
| | | 実軸近傍 | 非振動的な方程式で, その特性を利用してうまい解法が作れる. |
| 非線形 | | 原点近傍 | 標準的な数値解法で容易に解ける. |
| | 中小規模 | | 線形近似できる非線形の場合に準ずる. |
| | 大規模 | | 解の数学的性質が明確でないことが多いので安定領域の広い陽解法が適している. 数値解法を行う前に定性的でよいから方程式を十分調査検討する. |
| | | 線形近似できる非線形 | 解の数学的性質が明確でないことが多いので, 一応安定性の強い解法を用い, その結果より適当な解法を選択する. |
| | | 本質的非線形 | 方程式の数学的性質がわかりにくい場合が多く, 数値解法は困難である. |

表 2 方程式の数値解に対する要求
Table 2 Demands for numerical solutions.

| CASE | 精度 | | 速度 | | 安定性 | | |
|------|----|---|----|---|-----|---|--|
| | 高 | 低 | 速 | 遅 | 良 | 悪 | |
| 1 | ○ | | ○ | | ○ | | 人工衛星の軌道計算のように高速かつ高精度な解を必要とする場合. |
| 2 | | ○ | ○ | | ○ | | 関数の変化が激しく, 大規模, 複雑で方程式の数学的性質がほとんどわからない場合. |
| 3 | ○ | | | ○ | ○ | | ある程度方程式の数学的性質がわかり, 高速な処理を必要としないが, 精度の高い結果を必要とする場合. |

$$x_{n+1} = F(A\tau)x_n + \sum_{i=0}^l \left\{ (F(A\tau) - I)A^{(i+1)} - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\tau^{i-j}}{(i-j)!} A^{-(j+1)} \right\} B^T u_n / \tau \quad (3)$$

ここで A は $n \times n$ の正方行列, τ は刻み幅, 行列関数 $F(A\tau)$ は理論的には, 次式で与えられる.

$$F(A\tau) = e^{A\tau} \quad (4)$$

この $e^{A\tau}$ は膨大な処理を必要とし, 通常, 処理が容易な $e^{A\tau}$ の近似関数が利用され, この近似関数形によって数値解法が分類される⁴⁾. このことは z 演算子

$$z = e^{s\tau} \quad (5)$$

の代わりにその近似関数 $F(s\tau)$ を利用することと同様である. 非線形常微分方程式の場合, それを解くアルゴリズムを構成するにあたり平均値定理が利用され¹⁰⁾, 局部的線形が前提となっており, 近似 z 演算子 $F(s\tau)$ がそのまま利用できる.

2.2.2 $e^{s\tau}$ の近似関数形からの数値解法の分類とそれらの特徴

$e^{s\tau}$ の近似関数形として表 3 に示すような場合が考

えられる. これらの関数形によって単段型の常微分方程式数値解法と特徴は同表のように分類される.

2.3 数値解法設計のための特性評価量

常微分方程式数値解法を評価する場合, 評価項目として, (1)スパース性への対処能力, (2)数値的安定性, (3)精度, (4)処理速度, (5)離散化誤差, (6)アルゴリズムの簡潔さ, などが考えられる. このうち(1)~(3)は $e^{s\tau}$ の近似関数形で定まる. ここでは数値解法の設計を前提として, 特に, (2), (3)について定量的に取り扱う. (4)~(6)は(2), (3)の結果から二次的に定まる.

2.3.1 精度

線形常微分方程式の特性根に刻み幅を掛けた平面 $s\tau$ 上の値(図 1(a))を $e^{s\tau}$ 及び, この近似関数 $F(s\tau)$ で差分方程式の根平面である z 平面へ写像するとそれぞれ図 1(b), (c)となる. これらの図 1(b), (c)上の値を $\ln z$ で逆写像すると, 図 1(d), (e)のようになり, $F(s\tau)$ を用いた場合, $s\tau$ 平面が $F(s\tau)$ の特性に従って, 理論値に対して歪んでいる. このことは

表 3 e^{st} の近似関数による数値解法の種類

Table 3 Classification of the numerical computation method by the approximate functions of e^{st} function.

| e^{st} の近似 | 形態 | 特 性 | 解 法 例 |
|---|-------|--|---|
| $\sum_{i=1}^m a_i(st)^i$ | 陽解法 | 簡潔なアルゴリズムで、非線形方程式、非組織的スパースな線形方程式に容易に適用できる。容易に高精度化できるが、数値的安定性が保障されない。 | Euler 法, Runge Kutta 法, 最速 Runge Kutta 法, Milne 法 |
| $\sum_{i=0}^m a_i(st)^i / \sum_{j=0}^n b_j(st)^j$ | 陰解法 | 数値的安定性が保障され、組織的スパース性の場合、対処できる。非線形方程式に容易に適用できず、アルゴリズムが複雑になる。 | Backward Euler 法, Crank-Nicholson 法, New mark- β 法, Stiffly Stable 法, Houbolt 法 |
| $\sum_{i=0}^m a_i(st)^i / \sum_{j=0}^n b_j(st)^j$ | 予修正子法 | 全体が陽解法に準ずる。ただし、分母の項はテイラー級数展開した形で処理する。 | Milne-Hamming 法, 中点則・台形則, Adams Bashforth Moulton 法, Argyris 法 |

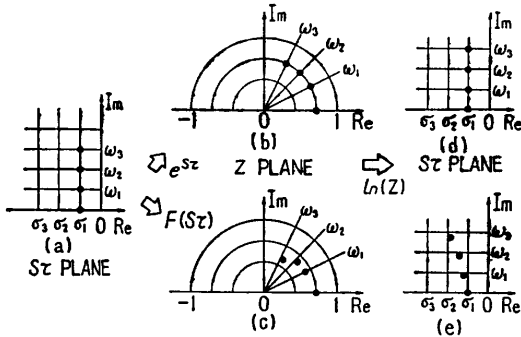


図 1 sr 平面と z 平面との間の理論解と近似関数との写像関係

Fig. 1 Mapping relation between sr plane and z plane.

$F(st)$ を用いた数値解法には系統的な誤差を含むことを意味している。歪んだ st の値 \bar{st} は

$$\bar{st} = \ln\{F(st)\} \quad (6)$$

で与えられ、図 1(e) の ●印で示す \bar{st} が st に対して広い範囲で近ければ近いほど歪みが少なく、その解法の精度は良いことになる。これより式(6)に従って作成された $F(st)$ の st 平面の歪み特性図から各解法の精度を評価できる⁹⁾。例として Euler 法, Runge Kutta (4次) 法の歪み特性図をそれぞれ図 2, 図 3 に示す。図は st 平面の左上半平面を示している。

2.3.2 数値的安定性

2.3.1項に示した方法で $F(st)$ に対する歪み特性図を作ると、本来 st の左半平面上にあるべき値が歪んで右半平面上に写像されることがある。これは本来安定な方程式が $F(st)$ の特性によって不安定な方程式と見なされることを意味している。この現象を数値的不安定性と呼ぶ¹¹⁾。いま、歪んだ \bar{st} 平面において本来安定である方程式を安定に解き得る限界(安定限界)を求める。これは z 平面での安定限界である $e^{i\omega\tau}$ に $F(st)$ が等しいとして、 $\omega\tau$ を $0 \sim \pi$ まで変化させた場合、次式の各 $\omega\tau$ に対する解 st の軌跡として与えられる。

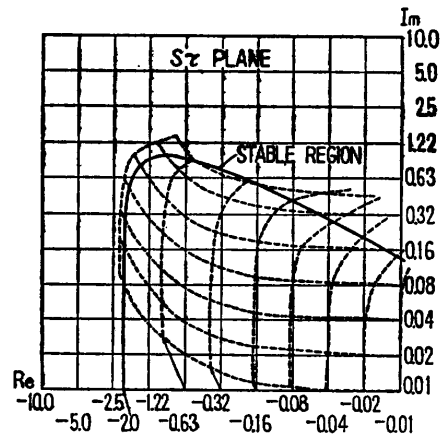


図 2 オイラー法の sr 平面における歪み図と安定領域

Fig. 2 Distortion characteristics of the sr plane and stable region of Euler method.

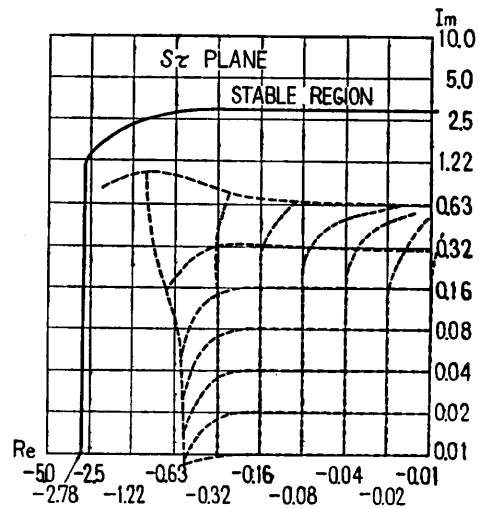


図 3 ルンゲクッタ (4次) 法の sr 平面における歪み図と安定領域

Fig. 3 Distortion characteristics of the sr plane and stable region of Runge Kutta method.

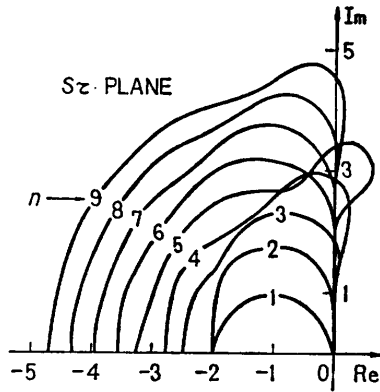


図4 近似関数 $\sum_{i=0}^n \frac{(s\tau)^i}{i!}$ の安定領域 ($n=1\sim 9$)

Fig. 4 Stable region of the approximate function

$\sum_{i=0}^n \frac{(s\tau)^i}{i!}$ of the $e^{s\tau}$ function.

$$F(s\tau) = e^{s\tau} \quad (7)$$

$F(s\tau)$ として式(8)を考え $n=1\sim 9$ とする.

$$F(s\tau) = \sum_{i=0}^n (s\tau)^i / i! \quad (8)$$

この場合の安定限界を図4に示す。この図で $n=1$ は Euler 法, $n=4$ は Runge Kutta (4次) 法の安定限界である。

2.4 設計手順

常微分方程式数値解法の設計手順は次に示すような4段階に分けられる。

(I) 与えられる方程式の分析 解くべき方程式の特性を表1, 表2を参照し, その解に対する要求について調べ, 設計条件を定める。

(II) 関数形の決定 (I)の結果に基づき表3と表4の $e^{s\tau}$ の近似関数の特性より, 望ましい $e^{s\tau}$ の近似関数を決定する。

(III) パラメータの決定 (II)の結果より大枠の解法の特性は定まるが, その枠内において関数形のパラメータを調整することにより安定限界を広げたり, ある指定される根平面の領域の精度を良くしたり, また解法に, ある種のフィルタ特性をもたせることができる。このようなパラメータ調整のために最小二乗法, ミニマックス修正法などを用いる。

(IV) アルゴリズム化 $F(s\tau)$ の関数形をもとに, これを因数分解したり, 変形したりして, 与えられた線形方程式のスパース性への対処及び非線形方程式向きの計算手順を作る。この段階は処理の効率を上げるうえで特に重要である⁹⁾。

(I)~(IV)の設計手順を全体として数理的に記述

し, 最終的なアルゴリズムを数理計画的に求めることは困難である。そこで, 例として, よく現われる方程式であるスティッフな非線形方程式の解法の設計を進める。他に, 筆者らは大型 Lagrange 運動方程式解法の設計例を文献 8) で示してある。

3. スティッフな非線形方程式の解法設計

3.1 設計条件

ここでは次のような設計条件を考える。(1)非線形方程式の解法, (2)数値的にタフな(安定性の強い)解法, (3)Euler 法以上の精度をもち, 非振動的な解をもつ方程式に適する解法, (4)高速な解法, (5)大規模な系にも適応可能な解法。

このような数値解法は, 次のような場合に適す。

- (a) 第1次近似解を容易に求めたい場合
- (b) 熱方程式, 化学プロセスなどの解法
- (c) シミュレータにおける微分方程式の数値解法
- (d) オンライン計算機制御用の数値計算

3.2 関数形の決定

(1)~(5)の設計条件を満たすためには, 微分方程式の数値解法のもととなる近似関数として表4 case 2 の場合が望ましい。これより次式が選ばれる。

$$F(s\tau) = \sum_{i=0}^m a_i (s\tau)^i \quad (9)$$

m と a_i は関数近似論の立場から最適に決めうるが, ここでは簡単に(3), (4)の条件を満たすために, Runge Kutta (4次) 法と同じ次数 $m=4$ とし, さらに Euler 法以上の精度を保つために係数 a_0, a_1 は

$$a_0 = 1.0, \quad a_1 = 1.0 \quad (10)$$

とし, $e^{s\tau}$ に対し原点での値及び傾きを等しくする。

3.3 パラメータの決定

3.2 節のもとで式(9)の残った係数 $a_2\sim a_4$ を次の評価関数を最小にする最小二乗法で決定する。

$$J = \int_0^W \int_{-R}^0 [\{X - e^x \cos(y)\}^2 + \{Y - e^x \sin(y)\}^2] dx dy + \int_0^Q \int_{-P}^0 [X^2 + Y^2] dx dy - \int_0^W \int_{-R}^0 [X^2 + Y^2] dx dy \quad (11)$$

上式において $x+iy=s\tau$ であり X, Y は $F(s\tau)$ の実部と虚部で, 次式のように与えられる。

表 4 数値解法の基となる近似関数の決定のための分類
Table 4 A table to decide the approximate z-operator for the numerical computation.

| Case | m, n | 条 件 |
|------|--|--|
| 1 | n=0 m:小 | 方程式が線形, 非組織スパース, 原点近傍の固有値をもつ場合, また非線形で大規模な場合の第1次近似解を求めたいとき |
| 2 | n=0 m:大 | 方程式が線形, 非組織スパースの場合, 非線形の場合で, 数值的にタフに解くか, ある程度の精度をもたせたいとき |
| 3 | n=1 m=1 | 方程式が線形で, 中小規模か, 組織的スパース性をもつ大規模方程式で精度は高くないが, タフで高速に解きたいとき |
| 4 | n ≥ 2 m ≥ 2 | 方程式が中小規模か, 組織的スパース性をもつ大規模方程式の場合, 数值的に安定で高精度を得たいとき |
| 備 考 | 表中 m, n は次の e st の近似関数形の次数. n=0 のとき陽解法 n≠0 のとき陰解法となる. $\sum_{i=0}^m a_i(st)^i / \sum_{j=0}^n b_j(st)^j$ | |

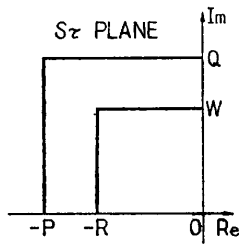


図 5 (11)式の評価関数における積分区間 P, Q, R, W
Fig. 5 Integral intervals of the criterion function of the least square method.

$$\begin{aligned}
 X &= (1 - a_2 y^2 + a_4 y^4) + (1 - 3a_3 y^2)x \\
 &\quad + (a_2 - 6a_4 y^2)x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \\
 Y &= (y - a_3 y^3) + (2a_2 y - 4a_4 y^3)x \\
 &\quad + 3a_3 y x^2 + 4a_4 y x^3
 \end{aligned} \tag{12}$$

また, 積分区間 R, W は図 5 に示すように est とこの近似関数との最小二乗法適用範囲を示し, 精度を規定するものである. P, Q は図 5 に示すカギ型のゾーン -P, Q, W, -R において近似関数値を零に近づけるための設定値である. これより, 数值的安定領域を広げることができる. いま, 最小二乗法により係数を決定するために評価関数を各係数に関して偏微分し, 評価関数の最小値を求めるための方程式を作る.

$$\partial J / \partial \mathbf{a} = \mathbf{0} \tag{13}$$

$$\mathbf{a} = [a_2 \ a_3 \ a_4]^T \tag{14}$$

ここで H を $\partial J / \partial \mathbf{a}$ の a に関する Jacobian とすると

$$\mathbf{H} \mathbf{a} = \mathbf{t} \tag{15}$$

の関係が求まり, この解より a₂, a₃, a₄ が求まる.

式(15)の H, t はそれぞれ

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{23} & 2A_{33} & A_{34} \\ A_{24} & A_{34} & 2A_{44} \end{bmatrix} \quad \mathbf{t} = - \begin{bmatrix} A_2 + A_{12} \\ A_3 + A_{13} \\ A_4 + A_{14} \end{bmatrix} \tag{16}$$

であり, H, t 中の A_{ij}, A_k は表 5 に示すように R,

W, P, Q の関数で与えられる. ここで指定される R, W, P, Q により直接, 数值的安定領域, st 平面の歪みを求めることはできず, 2.3 節に基づいて改めて求めなければならない.

3.4 アルゴリズム化

3.3 節より式(9)のパラメータが決定された. いま, このような関数より非線形系に適用できるような Runge Kutta 型のアルゴリズムを作る. これは刻み幅 τ と方程式の関数 f(x) より, 一般に

$$\Delta_1 = \tau f(x_n) \tag{17}$$

$$\Delta_i = \tau f(x_n + d_{i-1} \Delta_{i-1}) \quad (i=2 \sim m)$$

$$x_{n+1} = x_n + c_1 \Delta_1 + c_2 \Delta_2 + \dots + c_m \Delta_m \tag{18}$$

の形式になっている. これらの中で係数 c_i (i=1~m), d_k (k=1~m-1) は次のように決定する. いま式(19)

$$\dot{x} = s x \tag{19}$$

表 5 マトリクス H およびベクトル t の係数
Table 5 Coefficients of the element of matrix H and vector t.

| | |
|-----------------|---|
| A ₁₁ | =(Q ² +P ²)PQ/3 |
| A ₁₂ | =(PQ ² /3+P ³ /3)PQ |
| A ₁₃ | =-2(-Q ⁴ +P ⁴)PQ/5 |
| A ₁₄ | =(P ⁴ Q ² /3+3PQ ⁴ /5-P ⁵ /3)PQ |
| A ₂₂ | =(2P ² Q ² /9+P ⁴ /5+Q ⁴ /5)PQ |
| A ₂₃ | =(P ⁴ Q ² /3+P ⁴ /3+PQ ⁴ /5)PQ |
| A ₂₄ | =2(P ⁴ Q ² /15-P ² Q ⁴ /15+P ⁵ /7-Q ⁴ /7)PQ |
| A ₃₃ | =(P ⁴ Q ² /5+P ² Q ⁴ /5+Q ⁴ /7+P ⁵ /7)PQ |
| A ₃₄ | =(P ⁴ Q ² /3+3P ² Q ⁴ /10+PQ ⁴ /7+P ⁵ /4)PQ |
| A ₄₄ | =(4P ⁴ Q ² /21+4P ² Q ⁴ /21+P ⁵ /9+Q ⁴ /9+6P ⁴ Q ² /25)PQ |
| A ₁ | =-P ² Q-2Re ^{-R} sin(W)-2(e ^{-R} -1)W cos(W) |
| A ₂ | =2(P ² -Q ²)PQ/3+e ^{-R} ((2R ² +2W ² -4) sin(W)+4WR cos(W))+(W ³ -6W) cos(W) |
| A ₃ | =-P ⁴ Q/2+P ² Q ³ -2[e ^{-R} ((3R ² W+6-W ³) cos(W)+(R ³ +3RW ² +6R) sin(W))+(W ³ -6W) cos(W)] |
| A ₄ | =2P ⁴ Q/5-4P ⁴ Q ³ /3+2PQ ⁴ /5-2[e ^{-R} ((-4R ³ W-24RW+4RW ³) cos(W))+(-R ⁴ -12R ² +6R ³ W ² -24-W ⁴ +12W ²) sin(W)]+(-12W ² +W ⁴ +24) sin(W)] |

を式(17)のアルゴリズムに代入すると

$$\begin{aligned} D_1 &= s\tau x_n \\ D_2 &= (s\tau + d_1 s^2 \tau^2) x_n \\ &\vdots \\ D_m &= \left(s\tau + d_{m-1} s^2 \tau^2 + d_{m-2} d_{m-1} s^3 \tau^3 + \dots \right. \\ &\quad \left. \prod_{i=1}^{m-1} d_i s^m \tau^m \right) x_n \end{aligned} \quad (17')$$

となる。式(17)'を式(18)に代入して整理すれば

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= G x_n \quad (18)' \\ G &= 1 + (c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_m) s\tau \\ &\quad + (d_1 c_2 + d_2 c_3 + \dots + d_{m-1} c_m) s^2 \tau^2 + \dots \\ &\quad + \prod_{i=1}^{m-1} d_i c_m s^m \tau^m \end{aligned} \quad (20)$$

となる。これより、このアルゴリズムの $n\tau$ から $(n+1)\tau$ までの $F(s\tau)$ は次のようになる。

$$F(s\tau) = G \quad (21)$$

式(9)、式(21)の $(s\tau)^i$ の係数が相等しいとすると

$$\begin{aligned} a_1 &= c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_m \\ a_2 &= d_1 c_2 + d_2 c_3 + \dots + d_{m-1} c_m \\ &\vdots \\ a_m &= d_1 d_2 d_3 \dots d_{m-1} c_m \end{aligned} \quad (22)$$

の関係式を得る。この式で d_k は Runge Kutta (4次) 法と同様な値にする。これより式(22)を用いて c_i ($i=1 \sim m$) を決定することができる。

3.5 設計例

3.2節に示す理由より式(9)の $m=4$ の場合について考える。3.1節の(2)、(3)の条件から実軸近傍の安定限界を広くし精度を良くする。そのために式(11)の評価関数の積分区間 P, Q, R, W を

$$P=11.0, \quad Q=2.0, \quad R=5.0, \quad W=1.0 \quad (23)$$

とする。このもとで式(15)を解くと係数 a_i ($i=2 \sim 4$) は表6の a_i 欄に示すように求まる。式(17)の d_k ($k=1 \sim 3$) は前述のように Runge Kutta (4次) 法の場合と等しい値¹⁰⁾

$$d_1=0.5, \quad d_2=0.5, \quad d_3=1.0 \quad (24)$$

としてある。これより式(18)の c_i は表6の c_i 欄に示

表6 設計した数値解法における係数 a_i, c_i
Table 6 Coefficients of the designed numerical computation method.

| a_i | c_i |
|----------------|----------------|
| $a_1=1.000000$ | $c_1=0.402794$ |
| $a_2=0.301403$ | $c_2=0.462322$ |
| $a_3=0.351212$ | $c_3=0.129284$ |
| $a_4=0.140000$ | $c_4=0.005600$ |

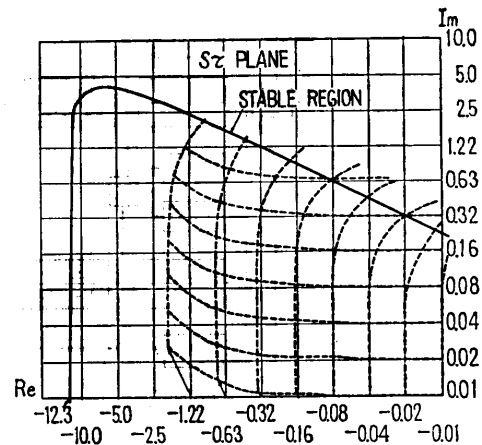


図6 設計例の $s\tau$ 平面における歪み特性および安定領域
Fig. 6 Distortion characteristics of the $s\tau$ plane and stable region of the designed method.

すように求まる。

2.3.1項に示す方法で $s\tau$ 平面の歪み特性図、2.3.2項に示す方法で数値的安定限界を求めると図6のようになる。この図6と図2(Euler法)を比較する。図2における実軸 -0.02 、虚軸 0.03 程度の精度は図6では実軸 -0.1 、虚軸 0.06 程度まで広がっており、Euler法以上の精度が保障される。また図3の $n=4$ (Runge Kutta (4次) 法) の場合に比べると虚軸側の安定限界は多少狭いが実軸側の安定限界は4.4倍に広がっている。以上のことよりこの設計例は所定の条件を満たしている。

3.6 数値計算例

図7に示す非線形系を Runge Kutta (4次) 法と設計した方法で解いた。この結果を図8に示す。図中実線は Runge Kutta (4次) 法で刻み幅 $\tau=0.01$ で求めた結果であり、ほぼ理論解と見なせる。Runge Kutta (4次) 法では $\tau=0.07$ 以上で不安定になり、これも同図に示す。この図より明らかに数値的不安定現象がおこっていることがわかる。

設計した方法では $\tau=0.265$ 以下で安定であり $\tau=0.25$ の結果を求めてある。これより解はほぼ理論値に一致しており、このような非線形系の場合でも刻み幅を4倍程度大きくしても解くことができる。

4. むすび

常微分方程式数値解法の設計は z 演算子 $e^{s\tau}$ の関数近似及びそのアルゴリズム化問題に定式化される。この設計法に基づき、非振動的な解をもつ方程式向きで数値的安定限界の広い解法を設計し非線形方程式を解

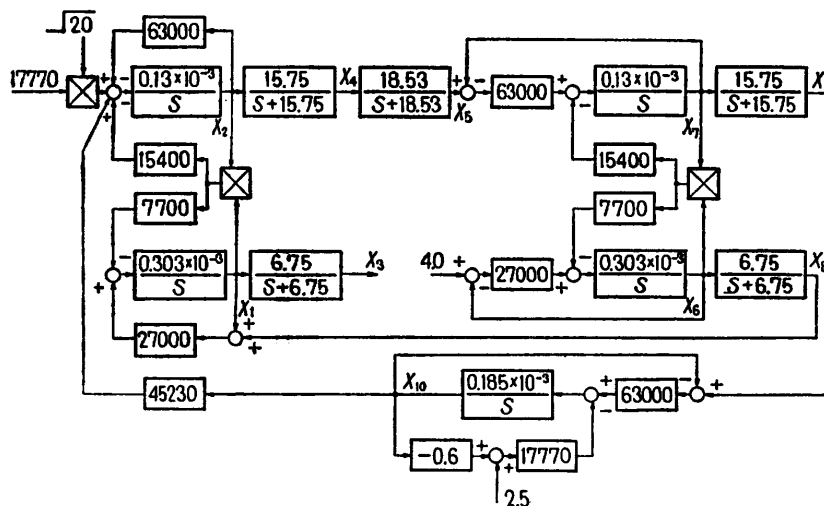


図 7 非線形プロセスのブロック線図
Fig. 7 Block diagram of the nonlinear process.

いた。これらの結果から、本設計法によると、与えられる方程式に応じて効率のよい数値解法が設計できることがわかった。

本設計法では解法の基礎となる関数の最適次数（項数）の決定，設計仕様を数理的に記述することに問題を残している。また，アルゴリズムの形態も単段法に限定した。今後の課題は最適次数決定の評価関数，離散化誤差などの評価関数を導入した，より一般的な設計法の確立にあると思われる。

この研究を進めるにあたり有益な御助言をいただいた東京工業大学 長谷川健介教授，千代田化工建設 清水信行氏，法政大学 中村顕一教授，同大 大地羊三教授，同大学院 嶋田健司氏に感謝します。

参 考 文 献

- 1) 渡辺嘉二郎，寺岡 誠：数値計算法の設計，第 20 回自動制御連合講演会，pp. 189-190 (1977).
- 2) Wilson, E. L.: Earthquake Engng. and Struct. Dynamics (1973).
- 3) 渡辺嘉二郎：Exp(x) の Pade' 近似式を用いた状態推移行列の計算法，計測自動制御学会論文集，Vol. 10, No. 1 (1974).
- 4) 渡辺嘉二郎：パディ近似関数を用いた高階の連立線形常微分方程式の数値解法，電気学会論文集 C 分冊，Vol. 95, No. 2 (1975).
- 5) P. Henrici: Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons, Inc., New York (1968).

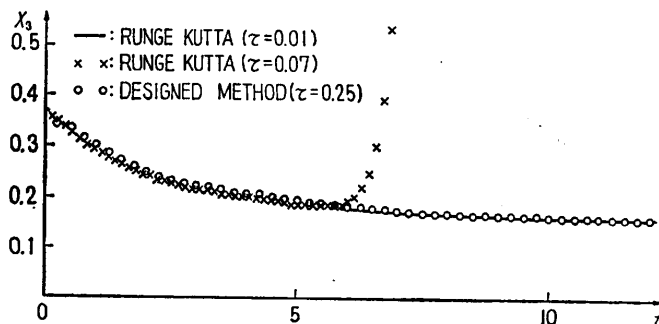


図 8 ルンゲクッタ（4次）法と設計した解法による数値解
Fig. 8 Numerical solutions solved by Runge Kutta method and designed method.

- 6) C. W. Gear : Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations, Prentice-Hall (1971).
- 7) 戸川隼人：マトリクスの数値計算，オーム社，東京 (1971).
- 8) 清水信行，渡辺嘉二郎：大次元常微分方程式の直接数値積分法，日本機械学会論文集，Vol. 43, No. 368, pp. 1272-1289 (1977).
- 9) 渡辺嘉二郎：線形常微分方程式数値計算法の評価（その1），（その2），電気学会情報処理研究会資料，IP-76-46, IP-77-9, (1976-77).
- 10) 磯野和男：数値計算ハンドブック，p. 175-184, オーム社，東京 (1973).
- 11) 戸川隼人：微分方程式の数値計算，p. 42 他，オーム社，東京 (1976).

(昭和 53 年 2 月 1 日受付)
(昭和 53 年 5 月 22 日採録)