Vol.2016-AL-158 No.1
2016/6/24

0/1-多面体の0/1-同値類の数え上げについて

中川 幸一[1,a)] 堀山 貴史[1,b)] 宮田 洋行[2,c)] 中野 眞一[2,d)]

概要：本研究は 0/1-多面体の 0/1-同値類の数え上げをポリアの数え上げ定理を用いて数えるために n 次元超立方体の回転についての巡回置換の列挙を行うことを目標とした．n 次元超立方体の回転にはまず初めに自然な考えとして，座標軸の位置関係による記述が考えられる．またこれとは別に超立方体から 1 つの正方形を選び，中心と原点を通る直線を回転軸としたとき，これらの回転軸の合成によって表すことも考えられる．本稿はこれら 2 つの手法を提案し，証明を与えるものである．

Counting the number of 0/1-equivalence classes of 0/1-polytopes

Nakagawa Kouichi[1,a)] Horiyama Takashi[1,b)] Miyata Hiroyuki[2,c)] Nakano Shin-ichi[2,d)]

1. はじめに

0/1-多面体とは全ての頂点の座標が 0 か 1 からなる凸多面体のことである．あるいは n 次元単位立方体 $[0,1]^n$ の頂点を適当に選んでその凸包を取ったものと言い換えることが出来る．[1], [2] この 0/1-多面体は組合せ最適化における「多面体的組合せ論」へのアプローチとして重要なものになっている．また，巡回セールスマン問題から出てくる多面体として巡回セールスマン多面体というものがある．これは，完全グラフ K_n の全頂点を回る閉路の特性ベクトルの凸包を取ることによって得られる多面体であり，0/1-多面体となっている．巡回セールスマン問題はこの多面体上で各辺の長さを係数とする線形関数を最小化する頂点を求めるという線形計画問題になる．[1], [3], [4] また，グラフの最大カット問題に対応する凸多面体であるカット凸多面体は頂点の座標が 0 か 1 である 0/1-多面体と呼ばれるものになっているなど多岐にわたって現れる多面体である．[5]

定義だけ見ると単純そうに見え，これだけ色々な場面に現れる 0/1-多面体だが，まだ知られていないことが多い．また，各次元に何個あるかというのは基本的な問題であるが，次元を固定したときどれだけあるかということも高次元ではあまり調べ切れていない．これらの先行研究として Aichholzer は 5 次元の 0/1 多面体について数え上げた．[6] また，Chen と Guo は 6 次元超立方体の 0/1-同値類による full-dimensional な 0/1-多面体について数え上げた．[7] ここで 0/1-同値類とは 2 つの多面体が単位立方体の対称性によって変換することができるものを同一視するという同値関係のことをいう．本研究では，0/1-多面体の 0/1-同値類の数え上げをポリアの数え上げ定理を用いて数えた．[8] その際この数え上げを高速に行うためには n 次元超立方体の回転がどのような回転群になっているのかということを高速に求める必要がある．そこでまず初めに自然な考えとして，座標軸の位置関係による記述が考えられる．またこの方法の問題点と，改善案としてこれとは別に超立方体から 1 つの正方形を選び，中心と原点を通る直線を回転軸としたとき，これらの回転軸の合成によって表せることをしめした．

また，本研究の適用として，NP-同値類の数え上げがあげられる．[9] 与えられた論理関数に対して，入力変数の順序の交換や，入力や出力の否定演算を行うことにより，別の論理関数を生成できる場合がある．このような操作により，論理関数どうしの同値関係を構成することができ，論

[1] 埼玉大学
Saitama University
[2] 群馬大学
Gunma University
a) s15dm004@mail.saitama-u.ac.jp
b) horiyama@al.ics.saitama-u.ac.jp
c) hmiyata@cs.gunma-u.ac.jp
d) nakano@cs.gunma-u.ac.jp

理関数の同値類が得られる．以下の 2 つの操作を組み合わせて得られる同値類のことを NP-同値類という．

(1) 一部またはすべての入力変数の否定（Negation）

(2) 一部またはすべての入力変数の順序の変更（Permutation）

入力変数が n である NP-同値類の数え上げは n 次元 0/1-多面体の 0/1-同値類 (変換に鏡映反転も含む) の数え上げの総和に等しいことが知られている．このように 0/1-多面体の 0/1-同値類の数え上げは幾何学や組合せ論の分野を超えて重要である．

2. 準備

2.1 ポリアの数え上げ定理

ポリアの数え上げ定理とは，図形の頂点や辺や面などを n 色で塗り分けたとき，回転して写り合うものは同じと見なしたときに，何通りの塗り分け方があるかが計算できる定理である．つまり，0/1-多面体を数え上げるためには，単位超立方体の各頂点を 2 色で塗り分けるときに何通りあるかをポリアの数え上げ定理を使って計算すれば良いことが分かる．

ここでポリアの数え上げ定理を使う前に用語を定義しておく．詳しくは前半の群論については [10] を後半のポリアの数え上げ定理については [8] を参考にされたい．

$X = \{1, 2, \ldots, n\}$ とおき，X から X への全単射写像を X の**置換**という．X の 2 つの置換 σ，τ の合成写像 $\sigma \circ \tau$ はふたたび X の置換である．関を合成写像で定義することにより，X の置換全体の集合 S_n は群になり，n 次**対称群**とよばれる．置換 $\sigma \in S_n$ は各 i の像 $j_i = \sigma(i)$ によって，

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

と表される．相異なる r 個の数字 $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \subset X$ に対して，つぎのような $\sigma \in S_n$ が存在する．

$$\begin{cases} \sigma(i_1) = i_2,\ \sigma(i_2) = i_3,\ \cdots,\ \sigma(i_{r-1}) = i_r,\ \sigma(i_r) = i_1 \\ \sigma(j) = j \quad (j \neq i_1, i_2, \ldots, i_r) \end{cases}$$

この σ を

$$\sigma = (i_1\ i_2\ \cdots\ i_r)$$

とかいて長さ r の**巡回置換**という．

G を $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ 上の置換群とする．$|G|$ を置換群 G の位数，f_k を長さ k の巡回置換，$i_k(g)$ を $g \in G$ に含まれている f_k の個数とするとき，G の**巡回指数** $Z(G)$ を以下で表す．

$$Z(G) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} f_1^{i_1(g)} f_2^{i_2(g)} \cdots f_n^{i_n(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}\prod_{k=1}^{n} f_k^{i_k(g)}$$

$Z(G)$ の変数を明確にする必要があるときには，$Z(G; f_k)$ や $Z(G; f_1, f_2, \ldots, f_n)$ と書く．ここで，$\prod_{k=1}^{n} f_k^{i_k(g)}$ を g に対する巡回置換の型と呼ぶことにする．

以上のことを用いることにより以下の定理が得られる．

定理 1. (ポリアの数え上げ定理)

G を $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ 上の置換群，$C = \{c_1, c_2, \cdots, c_m\}$ を m 色の集合，$Z(G; f_k)$ を置換群 G の巡回指数とする．置換群 G の下での X から C への写像全体における軌道の合計は次で与えられる．

$$Z\left(G; \sum_{i=1}^{m} c_i^k\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} c_i^k\right)^{i_k(g)}$$

ここで具体的に 3 次元の 0/1-多面体の 0/1-同値類の数え上げをポリアの数え上げ定理を用いてどのように求めるかを説明する．まず初めに次のように問題を言い換える．立方体の頂点を白と黒の 2 色で彩色するときの仕方は何通りあるか？

立方体の回転仕方は大きく分けて以下の 5 種類がある．

(1) 恒等置換

(2) 2 つの向かい合う面の中心を通る直線を軸として，$\pm 90^\circ$ 回転　(軸は 3 本)

(3) 2 つの向かい合う面の中心を通る直線を軸として，180° 回転　(軸は 3 本)

(4) 2 つの向かい合う辺の中心を通る直線を軸として，180° 回転　(軸は 6 本)

(5) 2 つの向かい合う頂点を通る直線を軸として，$\pm 120^\circ$ 回転　(軸は 4 本)

よってこれらが頂点がどのように写り合うかを考える．

(1) は 8 個全ての頂点が固定されているので巡回置換の型は f_1^8 と表される．

(2) は回転軸に垂直に交わる正方形 2 つの内部の頂点が隣の頂点と写り合うので巡回置換の型は f_4^2 と表される．

(3) は回転軸に垂直に交わる正方形 2 つの内部の頂点が正方形の対角線上の頂点と写り合うので巡回置換の型は f_2^4 と表される．

(4) は回転軸に垂直に交わる辺 2 つの頂点が写り合うと同時に，残りの 4 頂点は立方体の対角線上の頂点と写り合うので巡回置換の型は f_2^4 と表される．

(5) は回転軸が通る 2 頂点は固定される．また，この回転軸に垂直に交わる平面で，正三角形上に頂点が含まれるような平面が 2 つ作れる．よってこの回転は正三角形の内部の頂点が隣の頂点と写り合うので巡回置換の型は $f_1^2 f_3^2$ と表される．

また回転軸に対して，回転の数と軸の本数を考えると

(1) は 1 通りの回転.

(2) は $2 \times 3 = 6$ 通りの回転.

(3) は $1 \times 3 = 3$ 通りの回転.

(4) は $1 \times 6 = 6$ 通りの回転.

(5) は $2 \times 4 = 8$ 通りの回転.

が得られるので，この回転の群を G とすると巡回指数は

$$\begin{aligned} Z(G;f_k) &= \frac{1}{24}\left(f_1^8+6f_4^2+3f_2^4+6f_2^4+8f_1^2f_3^2\right) \\ &= \frac{1}{24}\left(f_1^8+6f_4^2+9f_2^4+8f_1^2f_3^2\right) \end{aligned}$$

を得る．ポリアの数え上げ定理より

$$\begin{aligned} &Z(G;W^k+B^k) \\ &= \frac{1}{24}\left((W+B)^8+6(W^4+B^4)^2+9(W^2+B^2)^4\right. \\ &\qquad \left.+8(W+B)^2(W^3+B^3)^2\right) \\ &= B^8+B^7W+3B^6W^2+3B^5W^3+7B^4W^4 \\ &\quad +3B^3W^5+3B^2W^6+BW^7+W^8 \end{aligned}$$

を得る．ここで $3W^5B^3$ は 5 頂点を白，3 頂点を黒 の 2 色で塗り分けたときの総数を表す．以上より立方体の頂点を白と黒の 2 色で彩色するときの仕方は全係数の総和を求めれば良いので 23 通りと分かる．よって 3 次元の 0/1-多面体は 23 個ある．

2.2 符号付置換行列による座標軸の位置の表現

n 次元超立方体 $[-1,\ 1]^n$ の面の中心を通る回転軸は n 次元ユークリッド空間の座標軸と一致している．よって，n 次元ユークリッド空間の回転と座標軸について知られていることを述べる．詳しくは [11], [12], [13] を参考にされたい．

まず初めに，ユークリッド空間内における原点を中心とした回転と行列の関係を述べる．$n\times n$ 行列 A について，A^tA が単位行列になるとき A を直交行列という．A の行と列は，すべての長さが 1 で互いに直交しているので，$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底をなしている．つまり，直交行列の列 (行) は標準基底，つまり直交座標系の各軸方向に向かう単位ベクトルからなるユークリッド空間の基底を表している．また，$\det(A^tA)=(\det A)^2$ なので，A の行列式の値は，$+1$ または -1 である．$n\times n$ の直交行列の全体は一般線形群 $GL(n)$ の部分群となっており，この部分群を**直交群** $O(n)$ とよぶ．特に，$O(n)$ の部分群で行列式が $+1$ である元の集まりを**特殊直交群 (回転群)** $SO(n)$ とよぶ．$SO(n)$ は原点を中心とする n 次元ユークリッド空間の回転を表し，$O(n)$ の部分群で行列式が -1 である群は鏡映反転を表す．

次に，n 次元超立方体の回転を考える．各行各列にちょうど 1 つだけ 1 の要素を持ち，それ以外は全て 0 となるような二値正方行列を**置換行列**という．各行各列にちょうど 1 つだけ -1 か 1 の要素を持ち，それ以外は全て 0 となるような正方行列を**符号付置換行列**という．置換行列は直交行列であり，対称群と同型であることが知られている．以上より，行列式が 1 の $n\times n$ 符号付置換行列は n 次元ユークリッド空間の回転を表す．特に，$n\times n$ 符号付置換行列の n 個の列は，向きを含めた n 次元ユークリッド空間の座標軸の置換を表している．

2.3 回転軸の合成とオイラー角

3 次元空間の回転に関して，座標軸を回転軸としたときにオイラーの回転定理というものが知られている．この考えを用いて高次元へ拡張するために用語を定義しておく．

実アフィン空間 $\mathbb{AR}^n$ とは, n 個の実数の組 $a_1,\ a_2,\dots,a_n$ をすべて集めた集合のことであり，$\mathbb{AR}^n$ の元を点とよぶ．実アフィン空間 $\mathbb{AR}^n$ を距離 $d(a,b)=\sqrt{\sum_{i=1}^n(a_i-b_i)^2}$ により距離空間とみなす．$\mathbb{AR}^n$ から $\mathbb{AR}^n$ の上への写像 s によって，$a,\ b\in\mathbb{AR}^n$ に対し，$d(sa,sb)=d(a,b)$ を満たすような変換を**等長変換**という．原点 o を固定する $\mathbb{AR}^n$ のすべての等長変換からなる群は直交群 $O(n)$ に一致する．$\mathbb{AR}^3$ の等長変換では以下のことが知られている．

定理 2. (オイラーの回転定理)

ある直交座標系から別の直交座標系への変換は $SO(3)$ で表され，その写像はある軸に関する回転である．

また，任意の回転は直交座標軸まわりの回転角の 3 つの組で表され，オイラー角と呼ばれている．

次に，n 次特殊直交群について知られていることを述べる．群 G が集合 X に**作用**するとは写像

$$G\times X\ni(\sigma,u)\mapsto\sigma u\in X$$

が定義され，条件 (1) $1u=u$，(2) $(\sigma\tau)u=\sigma(\tau u)$ がすべての $u\in X$ とすべての $\sigma,\tau\in G$ について成立することをいう．ただし， 1 を単位元とした．任意の 2 元 $u,v\in X$ に対して，$\sigma\in G$ が存在して $v=\sigma u$ となるとき，G は X に**推移的**に作用するという．群 G が推移的に作用するような空でない多様体あるいは位相空間 X を**等質空間**という．特殊直交群の球面への自然な作用は推移的であり，従って球面は等質空間として書ける．また，以下の様な位相空間としての同型を誘導することが知られている．

$$SO(n)/SO(n-1)\simeq S^{n-1}$$

2.4 置換群の計算

本稿の数え上げをポリアの数え上げ定理を用いて求めるためには，回転によって頂点の集合がどのように写るのかという S_{2^n} の部分群である 2^n 次置換群を求める必要がある．そのために，置換群の特性として一般に Schreier - Sims アルゴリズムを使って群の強生成元集合表現を構築することで計算出来ることを用いて置換群を生成する．

ここで，Schreier - Sims アルゴリズムを使う前に用語を定義しておく．詳しくは [10], [14] を参考にされたい．群 G が集合 X にさようするとき X を G-集合 という．このとき集合 $\mathrm{Orb}(u)=\{\sigma u|\sigma\in G\}$ を u の**軌道**という．$u,v\in X$ について $\sigma u=v$ となる $\sigma\in G$ が存在するとき $u\sim v$ と定めると， $\sim$ は X 上の同値関係となる．このとき，$\mathrm{Orb}(u)$

は u の属する同値類に他ならない．したがって，X は異なる軌道の共通部分のない和集合として表される (X の軌道分解)．元 $u \in X$ に対して，$G_u = \{\sigma \in G | \sigma u = u\}$ とおくと，G_u は G の部分群になり, u の**固定群** または **安定化部分群** とよばれる．ここで, 写像 $\mathrm{Orb}(u) \ni \sigma u \mapsto \overline{\sigma} \in G/G_u$ は全単射写像であるので，$|\mathrm{Orb}(u)| = |G|/|G_x|$ が成り立つ．G が X に推移的に作用している G-集合であるとき，$u \in X$ とすると X と G/G_u は G-集合として同型であることも知られている．

次に，以下のような問題を考える．G を n 次置換群とすると $G \subseteq S_n$ がいえる．G の生成元が与えられており $G = \langle \sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_r \rangle$ が与えられているものとする．このとき

(1) G の位数を求めよ．

(2) $\tau \in S_n$ に対して $\tau \in G$ を判定せよ．

このような問題が与えられて，具体的な場合にこれを計算するためのアルゴリムとして Schreier - Sims アルゴリズムがある．

定理 3. (Schreier の補題)

$G = \langle \sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_r \rangle$ とする．H を G の指数 n の部分群とし，左剰余類の代表系を $x_1 = x_1,\ x_2\ \ldots,\ x_n$ とする．また gH の代表元を $\overline{\sigma}$ で表す．このとき

$$H = \langle (\overline{\sigma_j x_i})^{-1} \sigma_j x_i | 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq r \rangle$$

が成り立つ．

この定理を n 次置換群に適用すれば，安定化部分群の生成元を求めることができる．したがって Schreier - Sims アルゴリズムによって，生成元によって定義された置換群の位数を求めることが出来る．

置換群 G とその作用域 Ω が与えられたとき，Ω の部分集合 $B = \{b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n\}$ で，$G^{(i)} := G^{(i-1)}_{b_i}$ としたとき，$G^{(0)} = G,\ \ldots,\ G^{(n)} = \{()\}$ となるものを置換群 G の**基底**とよぶ．さらに，置換群 G の生成元 S が，任意の i について，集合 $S \cap G^{(i)}$ が $G^{(i)}$ の生成元の集合となるとき，S を**強生成元集合**とよぶ．さらに，この $G^{(i)}$ を**固定部分群鎖**とよぶ．これは，ある置換のもとの基底にある点の写像を知っていれば，その置換を一意的に見付けることができるということを意味している．

3. 座標軸の位置による巡回置換の列挙

e_i を第 i 成分が 1 でその他は 0 となる列ベクトルとする．このとき，単位行列 $I = (e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n)$ は恒等置換とする．すると，e_i は第 i 成分の座標軸を表していることになる．また，$-e_i$ を第 i 成分が -1 でその他は 0 となる列ベクトルとすると，これは座標軸を逆向きに取っていることになる．ここで，以下のことをふまえて行列式が $+1$ の $n \times n$ 符号付置換行列の列挙を考える．

- 単位行列の列ベクトルを入れ換えて得られる行列は置換行列．
- 列ベクトルを偶数回入れ換えても行列式の値は変わらない．
- 列ベクトルの成分を -1 倍すると行列式の値も -1 倍される．

まず初めに $n \times n$ 符号付置換行列を作る．これは $(e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n)$ の並べ替え及び各々の成分をそのままにするか -1 倍するかすれば作れる．すると $n! \times 2^n$ 個の要素が出来る．このうち上記で述べたことを注意して行列式が $+1$ となるものを抽出する．

つまり

- 列ベクトルの入れ換えが偶数回かつ
  列ベクトルの成分が -1 倍されている箇所が偶数箇所
- 列ベクトルの入れ換えが奇数回かつ
  列ベクトルの成分が -1 倍されている箇所が奇数箇所

という条件を満たすものを抽出すれば良い．行列式が $+1$ であるものと -1 であるものが同数出てくるので条件を満たすものとして $n! \times 2^{n-1}$ 個の要素が抽出できることがわかる．

しかし，この方法だと $n \times n$ 符号付置換行列を列挙し，全てに対して行列式の値が $+1$ かどうかを一つずつ判定し，それから一つずつ巡回置換の型を調べる必要が出てくる．これでは次元が大きくなると組合せ爆発を起こしてしまうという問題点が出てくる．

4. 回転軸の合成による巡回置換の列挙

第 3 章の方法は直感的であったが，次元が大きくなると計算に時間がかかるため，生成元から群を生成する方法を考える．そのために回転軸の合成により巡回置換を求める方法を提案する．

n 次元超立方体 $[-1,\ 1]^n$ を考えると，中心は原点となる．このとき，超立方体から 1 つの正方形を選び，中心と原点を通る直線を回転軸とするとこの回転軸は 2^{n-2} 個の正方形の中心を通る．このような回転軸の取り方は全部で $\frac{n(n-1)}{2}$ 個ある．

n 次元空間の正規直交基底を $e_1 = (1,\ 0, \ldots,\ 0),\ e_2 = (0,\ 1,\ 0, \ldots,\ 0),\ \ldots, e_n = (0,\ \ldots,\ 0,\ 1)$ とする．このとき，回転軸が通る正方形が $e_i,\ e_j \quad (i \neq j)$ によって作られる正方形だとすると，この回転 $R_{ij}(\theta)$ は行列を用いて以下の様に表すことができる．

$$
\begin{array}{c@{}c}
 & \begin{array}{ccccccccccccc} & & & i & & & & j & & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & & & 0 & & & & 0 & & & \\
 & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & & \\
 & & 1 & 0 & & & & 0 & & & \\
0 & \cdots & 0 & \cos\theta & 0 & \cdots & 0 & -\sin\theta & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & 0 & 1 & & & 0 & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & 0 & & & 1 & 0 & & & \\
0 & \cdots & 0 & \sin\theta & 0 & \cdots & 0 & \cos\theta & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & 0 & & & & 0 & 1 & & \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & & \ddots & \\
 & & & 0 & & & & 0 & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

ただしθは 0°，90°，180°，270°のいずれかを取る．

これは明らかに $R_{ij}(\theta) \in SO(n)$ を満たしており，部分群をなしている．$SO(n)/SO(n-1) \simeq S^{n-1}$ より $SO(n)$ は $SO(n-1) \times S^{n-1}$ と書ける．これは, 1 つの成分を固定したときの回転軸は $n-1$ 次元球面の位相に沿って回転を起こしていることを意味する．

ここで，固定した成分を第 1 成分であったとしても一般性を失わないので，以下第 1 成分を固定したものとして話を進める．このとき，$i \neq j \neq 1$ を満たす $R_{ij}(\theta)$ らの任意の積は $SO(n-1)$ での回転を表しており，この軸は S^{n-1} 上の 1 点を定めていることになる．即ち，e_1 を法線ベクトルとする超平面内の回転を表すことが分かる．その後, $j \neq 1$ に対して, $R_{1j}(\theta)$ の回転を施すことによって e_1 ベクトルは S^{n-1} 上の 1 点に定めることができる．

即ち，オイラーの回転定理より帰納的に超立方体から 1 つの正方形を選び，中心と原点を通る直線を回転軸としたとき，この $\frac{n(n-1)}{2}$ 個の回転軸を合成することにより n 次元超立方体の任意の回転を表すことが出来る．

これらの回転軸を生成元とし Schreier - Sims を使えば, n 次元超立方体の群や巡回置換の型をまとめて求めることが出来る．

5. 実験結果

実行環境には以下を用いた

- OS : Microsoft Windows® 8.1 (64 bit)
- CPU : Inter® Core™ i7-4702MQ (2.20GHz)
- メモリ : 16.0 GB
- 使用言語 : Mathematica 10.0.2.0

座標軸の位置による巡回置換の列挙から求める方法と回転軸の合成による巡回置換の列挙から求める方法の実行時間は**表 1** の通りになった．ただし時間の単位は秒とする．

なお，7 次元の段階で座標軸の位置による巡回置換の列挙から求める方法では 10 分を超えてしまったので，8 次元以降は求めていない．

また，n 次元超立方体から得られる 0/1-多面体の総数は

次元	座標軸の位置	回転軸の合成
1	0.000000	0.000000
2	0.000000	0.000000
3	0.000000	0.000000
4	0.031250	0.015625
5	0.765625	0.000000
6	20.500000	0.078125
7	744.484375	1.156250
8	—	22.968750
9	—	615.156250
10	—	20657.609375

表 1 実行時間
Table 1 Execution Time

表 **2** の通りになる．

ここでは n 次元超立方体の 2^n 個の頂点から k 個 $(1 \leq k \leq 2^n)$ 選んで得られる 0/1-多面体を求め，全ての総和を取ることによって求めている．よって，例えば n 次元超立方体の頂点から $n+1$ 個の頂点を選んで出来る 0/1-単体という特別な 0/1-多面体数がいくつあるかということも分かる．n 次元 0/1-単体の数は**表 3** の通りになる．

6. おわりに

0/1-多面体の数え上げをポリアの数え上げ定理を用いて 2 通りの方法で求めることが出来た．座標軸の位置による巡回置換の列挙から求める方法では組合せ爆発を起こしてしまい高次元では現実的な時間では計算できなくなってしまうので，回転軸の合成による巡回置換の列挙から求める方法を用いて 10 次元までの 0/1-多面体を現実的な時間の範囲内で数え上げた．また，鏡映を含めた場合と含めなかった場合の両方を 10 次元まで数え上げることに成功した．

今後の課題としては，巡回指数をより高速で求める手法の確立がある．また，今回の場合は 0/1-多面体の退化の有無を区別せず数え上げているので，これらを区別した数え上げをしたい．退化の有無を区別することによって 0/1-多面体の系統的分類及び目録作りができるはずなので，これらの分類もしたい．

謝辞　本研究を進めるにあたり，多くの方々にお世話になりました．協力していただいた皆様へ心から感謝申し上げます．

参考文献

[1] Ziegler, G.M.: *Lectures on Polytopes*, Springer-Verlag GTM 152, (1995), Second revised printing (1998).

[2] Ziegler, G.M.: *Lectures on 0/1-polytopes.* In: Kalai, G., Ziegler, G.M. (eds.) Polytopes: Combinatorics and Computation, vol. 29, DMV Seminar, pp. 1–41. Birkhauser, Basel (2000).

[3] M. Grotschel and M. W. Padberg.: *Polyhedral theory. In The traveling salesman problem*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math., pp. 251—305. Wiley, Chichester(1985).

[4] David Applegate, Robert Bixby, Vaěk Chvatal, and William Cook.: *On the solution of traveling salesman problems.* In Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III (Berlin, 1998) , number Extra Vol. III, pp. 645—656 (electronic)(1998).

[5] M. M. Deza and M. Laurent *Geometry of cuts and metrics*, Algorithms and Combinatorics 15, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1997).

[6] Aichholzer, O.: *Extreme properties of 0/1-polytopes of dimension 5.* In : Kalai, G., Ziegler, G.M. (eds.) Polytopes: Combinatorics and Computation, vol. 29, DMV Seminar, pp. 111–130. Birkhauser, Basel (2000).

[7] Chen, William Y. C. and Guo, Peter L.: *Equivalence classes of full-dimensional 0/1-polytopes with many vertices*, Discrete Comput. Geom., Vol. 52 No. 4 pp. 630–662, (2014).

[8] Pólya, G., Tarjan, E., and Woods, R.: *Notes on Introductory Combinatorics*, Birkhäuser, Boston (1983).

[9] 湊 真 一：論 理 代 数 と 論 理 関 数，電 子 情 報 通 信 学 会　知 識 の 森， 入 手 先 ⟨http://www.ieice-hbkb.org/files/01/01gun_08hen_01.pdf⟩ (2010.5.18).

[10] 酒井文雄：環と体の理論，共立出版 (1997).

[11] 横田一郎：群と位相，裳華房 (1971).

[12] Armstrong, M.A: *Groups and Symmetry*, Springer (1988).

[13] Borovik, A.V. and Borovik, A.: *Mirrors and Reflections: The Geometry of Finite Reflection Groups*, Springer New York(2009).

[14] 花 木 章 秀：群 論 と 対 称 性，2012　年 度 前 期 信 州 大 学 大 学 院 講 義， 入 手 先 ⟨http://math.shinshu-u.ac.jp/ hanaki/edu/symmetry/perm.pdf⟩ (2012.3.17).

次元	鏡映なし	鏡映あり
1	3	3
2	6	6
3	23	22
4	496	402
5	2275974	1228158
6	80064 8638402240	40050 7806843728
7	1054 9428537991 2658039022 2487977120	527 471432057 65300401727 4030725792
8	2 2436153203 5350391058 1965104095 9324360753 6172440780 6265462456 0815030272	1 1218076601 7675195869 6528198417 3341005925 1428538554 8102447047 1657123840
9	1443293 9188254593 7831269386 9853438779 6369673924 3521375232 4414002437 3474467144 8698116166 0893608185 7503953585 6270086045 7179989669 7392512634 7240611840	721646 9594127296 8915634693 4926719389 9711762425 5160085872 4672279654 3479662190 8173076713 0866695111 3701253270 1111814714 3101426347 4478733000 2626912256
10	967570382 5032960640 6630268980 3740612006 0657206229 8625575167 5835706560 3847900657 7551414033 5015231533 2651295811 8839911517 3313996388 0825809697 7417247137 8316263071 6284386011 2927993001 3101153842 7613562197 3463336795 2458071825 0426186307 4444287264 7551134325 3529808502 6149046106 7931543945 3983283066 2899924992	483785191 2516480320 3315134490 1870306003 0328603114 9312787583 7917853280 1923954089 1229811987 2633975247 1091773061 3279530479 6748894035 9021808401 7915411587 2092179421 4114679301 7943332876 5201301849 2561851538 2516448167 7021952229 2397852574 0245378908 6306761793 3002992802 9851949150 8244205138 4547572394 5124560896

表 2 0/1-多面体の 0/1-同値類の数え上げ
Table 2 Counting the number of 0/1-equivalence classes of 0/1-polytopes

次元	鏡映なし	鏡映あり
1	1	1
2	1	1
3	7	6
4	32	27
5	620	472
6	29685	19735
7	4589065	2773763
8	2211121581	1245930065
9	337 3197311427	181 6451773537
10	1660363 1483731241	868709 9045170277

表 3 0/1-単体の 0/1-同値類の数え上げ
Table 3 Counting the number of 0/1-equivalence classes of 0/1-simplexes