

Catalan 数の拡張とその応用†

今井 貞三†

スタックの処理手順の数を与える Catalan 数は、凸多角形を対角線によって三角形に分割する方法の数、 n 組の左右カッコを並べる順列の数、binary tree の数等々を与えるものとして知られているが、これは、 $2n$ 個のレンガを左側につめて n 個ずつ 2 段に積んでいく手順の数と等しい。

一般に、一段に r 個ずつ S 段に積み上げる手順の数を $W_{r \times s}$ とすれば、Catalan 数は $S=2$ の場合に当たる。この $W_{r \times s}$ が、

$$W_{r \times s} = \frac{(r \cdot S)!(r-1)!(r-2)! \cdots 1!}{S!(S+1)!(S+2)! \cdots (S+r-1)!}$$

で与えられることを証明し、若干の応用例を挙げた。証明の途中で、もっと一般的な途中の形まで積上げる手順の数 $W(\vec{a})$ が得られる。

証明は、2次元のパスカルの三角形を n 次元に拡張したパスカル格子と、これらの数値を全部負にした負のパスカル格子とをずらして重ね合わせることにより、制限つき n 次元経路の数を数える問題として解いた。

この解法自体も他の問題に適用可能である。パスカル格子の出発点を ± 1 に限らず、一般の数値を与えたものをずらして重ね合わせることにより、様々な数列が得られるが、それから 2, 3 の面白い結果がその後得られている。(学部研究報告, 53 年度参照)

1. まえがき

図 1 のようにななめに置いた箱に、 $2n$ 個の玉を 2 行 n 列に積み込む手順が

$W_{2 \times n}$ 通り

あるとする。下段に置くのをスタックの入り、上段に置くのを出に対応させれば、これは一列に並んだ n 個のものをスタック処理する手順と 1:1 に対応するから、Catalan 数で表わされ、

$$W_{2 \times n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \quad (1)$$

となる(後述)^{1)~4)}。

一般に r 行 S 列に積み上げる手順が $W_{r \times s}$ 通りあるとすれば、これは多重スタック処理、あるいは 2 つ以上の処理を同時に行わない場合の流れ作業の手順の数を

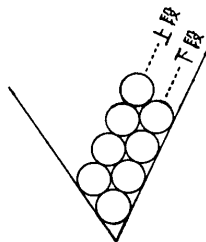


図 1 隅に寄せた玉
Fig. 1 Balls in a slanting corner.

与える(応用例参照)。

以下 $W_{r \times s}$ が次式で与えられることを証明する。

$$W_{r \times s} = \frac{(r \cdot S)!(r-1)!(r-2)! \cdots 2! \cdot 1!}{S!(S+1)!(S+2)! \cdots (S+r-1)!} \quad (2)$$

また、(2)を証明する前に任意に指定された形に積上げる手順の数が $W(\vec{a})$ として与えられる。

図 1 で左右を入替えれば

$$W_{r \times s} = W_{s \times r}$$

が成立つことは明らかであるが、これは $r < S$ として(2)式の分母、分子に

$$r!(r+1)! \cdots (S-1)!$$

を掛ければ容易に確かめられる。

$W_{r \times s}$ を求めるには、2次元で用いた方法⁵⁾をそのまま r 次元に拡張して用いる。

2. Pascal 格子 (P 格子)

r 次元直交座標系において整数座標で表わされる点の集まりを考え、隣接点間を座標の増す向きに有向線分で結んだ格子を作る。格子点 $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_r)$ から、 $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ として格子点 $\vec{n} + \vec{a}$ までの経路の数は

$$\left. \begin{array}{l} \sum a_i < 0 \text{ ならば } 0 \\ \sum a_i \geq 0 \text{ ならば } \frac{(\sum a_i)!}{\prod (a_i!)} \end{array} \right\} \quad (3)$$

で与えられる。ただし $a_i < 0$ のときは、例えば

† Generalized Catalan Numbers and Their Applications by TEIZO IMAI (Faculty of Education, Yamanashi University).

†† 山梨大学教育学部物理学教室

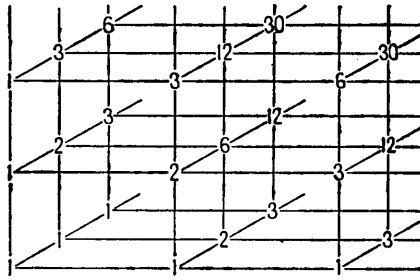


図 2 3次元+P格子

Fig. 2 The positive part of +P-lattice (r=3).

$$\frac{1}{(-3)!} = \frac{0 \cdot (-1) \cdot (-2)}{0!} = 0$$

のように扱って $1/a_r! = 0$ とする。また Σ, Π はそれぞれ

$$\sum_{i=1}^r, \prod_{i=1}^r$$

を意味する。

任意の格子点 \vec{n} を出発点としてえらび、その点に数値 1 を与え、他の点 \vec{n}' には \vec{n} から \vec{n}' までの経路の数を与えたものを Pascal 格子 (+P 格子または単に P 格子) と呼び $+P(\vec{n})$ で表わす。

$r=2$ のときこれは Pascal の三角形と一致する。 $+P(\vec{n})$ の数値をすべて -1 倍したものを $-P(\vec{n})$ で表わし、 $-P$ 格子または単に P 格子と呼ぶ。

図 2 は $r=3$ の +P 格子 (数値が 0 でない部分) である。

$\pm P$ 格子はどちらも次の性質を持つ。

“出発点以外の各格子点の数値は、その点から経路を逆向きにとった隣接点 (r 個) の数値を合計したものに等しい”。 (4)

これは各数値が格子点 \vec{n} からの経路の数を示していることから明らかである。

逆に Pascal の三角形の場合のように、任意の出発点 \vec{n} に数値 1 を与え (他は 0), \vec{n} の隣接点から (4) に従って次々に数値を与えていけば $+P(\vec{n})$ が、またははじめに -1 を与えておけば $-P(\vec{n})$ が得られる。

3. 複合 P 格子

いくつかの点を出発点とする P 格子をそのまま重ね合わせ、各格子点ですべての P 格子から与えられる数値の和をとったものを複合 P 格子と呼び、

$$+P(\vec{n}) + P(\vec{n}') - P(\vec{n}'')$$

のように表わす。

明らかに複合 P 格子も (4) の性質を保持する。

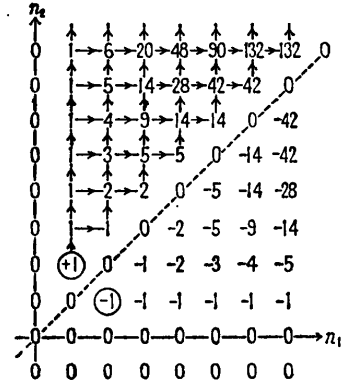


図 3 簡単な複合 P 格子

Fig. 3 The compound P-lattice, +P(1,2)-P(2,1).

図 3 は 2次元複合 P 格子

$$+P(1,2) - P(2,1)$$

である。 $n_1 = n_2$ の点は 0, 他の点は $n_1 = n_2$ の直線に対して歪対称となる。

この格子は $0 < n_1 < n_2$ を満足する格子点でのみ正の値をとるが、残りの部分との境界における相手側の隣接点は $n_1 = 0$ または $n_1 = n_2$ の点であり、これらの数値はすべて 0 になるから (4) を使うときに寄与しない。したがって、これらの隣接点で正の部分格子を他と切りはなしたのち、(1,2) に数値 1 を与え、(4) に従って次々に数値を与えていけば、上と全く同じ正の部分格子が得られる。したがって $0 < t_1 < t_2$ のとき、格子点 (t_1, t_2) の数値は、出発点 (1,2) から (t_1, t_2) までの間途中常に $0 < n_1 < n_2$ をみたく点 (n_1, n_2) ののみを通過していく経路の数に等しい。

n_2 の増加を下段の積込み、 n_1 の増加を上段の積込みと考えれば、 (t_1, t_2) の数値は“下段に $t_2 - 2$ 個、上段に $t_1 - 1$ 個の玉を積む手順の数”を与える。

一方、複合 P 格子と考えれば

$$+P(1,2) \text{ より } \frac{(t_1 + t_2 - 3)!}{(t_1 - 1)!(t_2 - 2)!}$$

$$-P(2,1) \text{ より } \frac{-(t_1 + t_2 - 3)!}{(t_1 - 2)!(t_2 - 1)!}$$

が与えられ、両者の和となる。

上段に a_1 個、下段に a_2 個積む手順の数は $t_1 - 1 = a_1, t_2 - 2 = a_2$ とおいて

$$\begin{aligned} & \frac{(a_1 + a_2)!}{a_1! a_2!} - \frac{(a_1 + a_2)!}{(a_1 - 1)!(a_2 + 1)!} \\ &= \frac{(a_1 + a_2)!(a_2 + 1 - a_1)}{a_1!(a_2 + 1)!} \end{aligned} \quad (5)$$

で与えられる。(5) で $a_1 = a_2 = n$ とおけば

$$W_{2 \times n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = {}_{2n}C_n - {}_{2n}C_{n+1}$$

となって(1)が得られる。

図3の格子点 $(n+1, n+2)$ または $(n, n+2)$ の数値が Catalan 数である $(n=1, 2, 3, \dots)$ 。

4. $W(\vec{a})$ と $W_{r \times s}$

r 段の積込み手順の数は r 次元複合 P 格子によって同様に得られる。

$1, 2, \dots, r$ で作られる順列の1つを q_1, q_2, \dots, q_r とし $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_r)$ で表わす。 $r!$ 個の \vec{q} によって得られる $r!$ 個の P 格子

$$\pm P(q_1, q_2, \dots, q_r),$$

によって複合 P 格子を作る。ただし符号は、置換

$$\begin{pmatrix} \vec{q}_0 \\ \vec{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, \dots, r \\ q_1, q_2, q_3, \dots, q_r \end{pmatrix}$$

が偶置換のとき +, 奇置換のとき - をとするとする。

$r!$ 個の出発点 \vec{q} は任意の $i, j (i \neq j)$ を固定したとき, $q_i > q_j$ である点と $q_i < q_j$ である点とに分けられ, 両者は q_i と q_j の入替えにより 1:1 に対応づけられる。対応する2点は必ず一方が $+P$ 格子の, 他方が $-P$ 格子の出発点であり, 両点から $n_i = n_j$ をみたす任意の点までの経路は $n_i = n_j$ の面 ($r-1$ 次元) についての対称移動によって 1:1 に対応づけられる (1つの経路上の各点の n_i と n_j を入替えれば, 対応する経路が得られる。)。したがって $n_i = n_j$ の面内ではすべての格子点の数値が0になる。

このような面は ${}_r C_2$ 個あるが, これらの面内の格子点を全部取除いたときに互に分離される $r!$ 個の部分空間のうち, $\vec{q}_0 = 1, 2, 3, (\dots, r)$ を含むものは

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_r \tag{6}$$

をみたす点の集まりで, この中の任意の点

$$\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_r) = \vec{q}_0 + \vec{a}$$

の数値 $W(\vec{a})$ は, 境界面外側の隣接点の数値がすべて0であるから, 2次元のときと同様 \vec{q}_0 から \vec{t} まで, この部分空間の中だけを通っていく経路の数である。経路の途中常に

$$0 \leq n_1 - 1 \leq n_2 - 2 \leq \dots \leq n_r - r \tag{7}$$

をみたしているから, $(n_r - r)$ を上から r 段目に積んだ個数と考えれば, 次のことがいえる。

“格子点 $\vec{t} = \vec{q}_0 + \vec{a}$ の数値 $W(\vec{a})$ は, 最上段に a_1 個, 次の段に a_2 個, ..., 最下段に a_r 個の玉を積込

む手順の数を表わしている”。

格子点 \vec{t} への1個の P 格子からの寄与は, 出発点を \vec{q} とし, $\vec{t} = \vec{q} + \vec{a}$ とおけば(3)より

$$\pm \frac{(\sum a_i)!}{\prod a_i!} = \pm \frac{(\sum a_i)!}{\prod a_i!} \tag{8}$$

で与えられる (ただし \pm は \vec{q}_0 から \vec{q} への置換によってきめる。)

複合 P 格子の \vec{t} における値は(8)を $r!$ 個の \vec{q} について合計すればよい。

$$t_i = q_i + a_i = i + a_i,$$

$$\therefore a_i = t_i + i - q_i. \tag{9}$$

(9)を使って全部の \vec{q} について(8)の和をとれば,

$$\begin{aligned} W(\vec{a}) &= \sum_{\vec{q}} \pm \frac{(\sum a_i)!}{\prod a_i!} \\ &= (\sum a_i)! \cdot \sum_{\vec{q}} \frac{\pm 1}{\prod (a_i + i - q_i)!} \end{aligned} \tag{10}$$

となる。最後の和を

$$\sum_{\vec{q}} \frac{\pm 1}{\prod (a_i + i - q_i)!} = D_0$$

とおけば, D_0 は次のようにして求められる。

r 行 r 列の行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1!} & \frac{1}{(a_1-1)!} & \frac{1}{(a_1-2)!} & \dots & \frac{1}{(a_1-r+1)!} \\ \frac{1}{(a_2+1)!} & \frac{1}{a_2!} & \frac{1}{(a_2-1)!} & & \\ \frac{1}{(a_3+2)!} & \frac{1}{(a_3+1)!} & \frac{1}{a_3!} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(a_r+r-1)!} & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{a_r!} \end{vmatrix}$$

を作り, 第 i 行第 j 列の要素を d_{ij} とおけば

$$d_{ij} = \frac{1}{(a_i + i - j)!}$$

となる。 \vec{q}_0 から \vec{q} への置換で \pm をきめれば

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{\vec{q}} \pm d_{1q_1} \cdot d_{2q_2} \cdot d_{3q_3} \cdot \dots \cdot d_{rq_r} \\ &= \sum_{\vec{q}} \frac{\pm 1}{\prod (a_i + i - q_i)!} = D_0 \end{aligned}$$

が成立ち, D_1 の $r!$ 個の展開項が $r!$ 個の $\pm P(\vec{q})$ と符号も含めて 1:1 に対応する。

D_1 の各要素を同じ行の第1列の数値で割った行列式を D_2 とすれば, (10)より,

$$W(\vec{a}) = (\sum a_i)! \cdot D_1$$

$$= \frac{(\sum a_i)! \cdot D_2}{a_1!(a_2+1)! \cdots (a_r+r-1)!} \quad (11)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 P_0 & a_1 P_1 & \cdots & a_1 P_{r-1} \\ a_2+1 P_0 & a_2+1 P_1 & \cdots & a_2+1 P_{r-1} \\ a_3+2 P_0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_r+r-1 P_0 & \cdots & \cdots & a_r+r-1 P_{r-1} \end{vmatrix}$$

さらに、第 j 列を $(j-1)!$ で割って D_3 とすれば

$$D_2 = (r-1)!(r-2)! \cdots 1! \cdot D_3 \quad (12)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 C_0 & a_1 C_1 & \cdots & a_1 C_{r-1} \\ a_2+1 C_0 & a_2+1 C_1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_r+r-1 C_0 & \cdots & \cdots & a_r+r-1 C_{r-1} \end{vmatrix} \quad (13)$$

となる。ただし (3) の扱いと同様に $m < n$ ならば ${}_m P_n = {}_m C_n = 0$ とする。

(11), (12) より, (13) を使って

$$W(\vec{a}) = \frac{(\sum a_i)!(r-1)!(r-2)! \cdots 1!}{a_1!(a_2+1)! \cdots (a_r+r-1)!} \cdot D_3, \quad (14)$$

となる。また (13) は $t_i = a_i + i$ を使って

$$D_3 = \begin{vmatrix} t_1-1 C_0 & t_1-1 C_1 & \cdots & t_1-1 C_{r-1} \\ t_2-1 C_0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ t_r-1 C_0 & \cdots & \cdots & t_r-1 C_{r-1} \end{vmatrix} \quad (15)$$

と書き直せる。(15) で $t_i = t_j$ ($i \neq j$) とおけば、第 i 行と第 j 行が一致するので $W(\vec{a}) = 0$ となることが確かめられる。

$W_{r \times s}$ を求めるには (13), (14) の \vec{a} を $\vec{a} = (S, S, S, \dots, S)$,

とおく。 D_3 を r と S の関数として

$$D_3 = \begin{vmatrix} s C_0 & s C_1 & \cdots & s C_{r-1} \\ s+1 C_0 & s+1 C_1 & & s+1 C_{r-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s+r-1 C_0 & s+r-1 C_1 & & s+r-1 C_{r-1} \end{vmatrix} \equiv D(r, S),$$

とおけば、各行から 1 段上の行を引くことにより (最下段から順次上にいく)、次のように変形できる。

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & s C_1 & s C_2 & \cdots \\ 0 & s+1 C_0 & s+1 C_1 & \cdots \\ 0 & s+2 C_0 & s+2 C_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = D(r-1, S+1) \\ = D(r-2, S+2) \\ = \cdots \\ \cdots \\ = D(1, S+r-1) \\ = s+r-1 C_0 = 1. \quad (16)$$

(14), (16) より

$$W_{r \times s} = \frac{(r \cdot S)!(r-1)!(r-2)! \cdots 1!}{S!(S+1)! \cdots (S+r-1)!} \quad (2)$$

となり、(2) が得られる。

5. 応用例

○ 将棋盤の手前の 1 列 9 マスに左から 1, 2, ..., 9 の番号をつけ、1, 2, 3 のマスに左端から X, Y, Z, 3 個

表 1 $W(\vec{a})$ の例 ($r=4, a_i \leq 4$)

Table 1 $W(\vec{a})$, ($r=4, a_i \leq 4$)

		0				1				2			3		4	
a_1	a_4															
	a_3	0	1	2	3	4	1	2	3	4	2	3	4	3	4	4
0	0	1	1	1	1	1										
	1		1	2	3	4	1	3	6	10						
	2			2	5	9	5	16	35	5	21	56				
	3				5	14		21	70	42	168	42	210			
	4					14			84		252		462	462		
1	1						1	4	10	20						
	2						9	35	90	14	70	216				
	3							56	216		168	768	210	1,188		
	4								300		1,320		2,970	3,432		
2	2									14	84	300				
	3										252	1,320	462	2,970		
	4											2,640		8,580	12,012	
3	3												462	3,432		
	4													12,012	24,024	
4	4														24,024	

の駒をおく。右に空マスのある駒は1つだけ右に動けるものとすれば、 $3 \times 6 = 18$ 手で右の端まで動かすことができる。

このときの手順は $W_{3 \times 6} = 87,516$ 通りである。この手順は X, Y, Z の位置をそのまま3次元の座標 (x, y, z) と考えれば、出発点 $\vec{q}_0 = (1, 2, 3)$ から $\vec{t} = (7, 8, 9)$ まで途中常に $x < y < z$ をみたしている最短経路と 1:1 に対応するから、

$$\vec{a} = \vec{t} - \vec{q}_0 = (6, 6, 6),$$

より $W_{3 \times 6}$ 通りとなる。

上の動きを、6個の空白が右から左へ逆に動いた、と考えれば、6次元空間の経路となり $W_{3 \times 6} = W_{6 \times 3}$ の対応を示している。

○ 一列に並んだ S 個の窓口を次々に通らなければならない人が、最初の窓口で r 人並んでいる。各窓口の処理を1台のコンピュータが行い、1人ずつ処理していくときの手順の数は $W_{r \times S}$ である。

途中の状態を、最後から κ 番目の人が a_κ 個の窓口を通過したとして、 $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ で表わせれば、その状態に達する手順は $W(\vec{a})$ 通りである。

一列に並んだ $(S-1)$ 個のスタック (容量は充分大きいとする) を順々に通過させる場合も全く同じ。

○ 始めに L 人並んでいた窓口へ、更に M 人が到着し N 人が立去ったとき、途中の人数の変化は図4 a の A から B までいく最短経路で表わされる (図4は $L=3, M=8, N=6$ の場合の例である.)。

この経路の数は、図4 b のような複合 P 格子

$$+P(0, L+1) - P(L+1, 0),$$

を作って、 $\vec{t} = (N, M+L+1)$ の値から得られる。すなわち

$$\frac{(M+N)!}{M!N!} - \frac{(M+N)!}{(N-L-1)!(M+L+1)!} \text{通り},$$

である。

○ 図5は、はじめ5台の電話のうち2台が使われていた(A)が、その後新しく9回かかり、7回終了して、現在4台が使われている(B)、という場合の使用台数の変化を経路に対応させた図である。

Bに関係する P 格子は5個あり、これらは0の列で表わされた境界線のどれに対しても歪対称である。

複合 P 格子のBにおける値は

$${}_{16}C_7 - {}_{16}C_5 - {}_{16}C_4 + {}_{16}C_2 + {}_{16}C_0 = 5375$$

である。

○ 一粒子状態が1個の量子数 $m (\geq 0)$ だけできるとき、互に区別できない N 個の粒子から成る系の微視状態は、 N 次元量子数空間において、

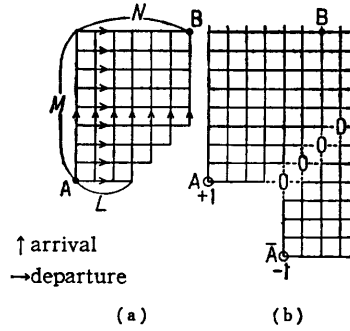


図4 (a)行列の長さの変化を表す経路

(b)経路の数を数えるための複合 P 格子

Fig. 4(a) The possible changes of the length of a queue, that is L initially (A), and after M arrivals and N departures, becomes $L+M-N$ (B).

(b) The compound P -lattice for counting the possible ways. A, \bar{A} : two origins.

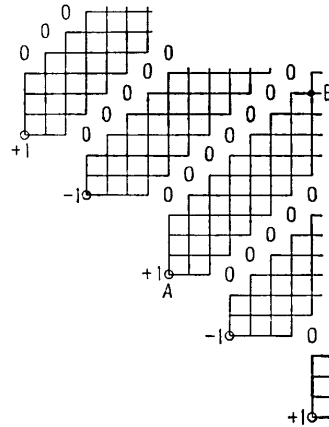


図5 電話の使用台数変化の経路を数えるための複合 P 格子

Fig. 5 An example of the compound P -lattice for counting the ways of changes of number of occupied telephones, out of 5 ones. The number is 2 initially (A), and 4 finally (B), after the 16 changes.

$$0 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_N,$$

をみたす $1/N!$ 部分空間の格子点で表わされる。総量子数 $\sum m_i$ が1つずつふえると仮定したとき、 $\vec{m} = \vec{0}$ の基底状態から状態 \vec{m} に達する最短経路の数は $W(\vec{m})$ で与えられる。

6. むすび

2次元の経路の問題を玉の2段積みに対応させたことから、これを、 r 段積み= r 次元の経路、の問題に拡張することができた。

r 次元の経路が2次元の玉の積みに対応したので、3次元 ($W_{r \times x \times x}$) あるいはそれ以上の玉の積み

に何が対応するかという問題も検討してみたい。

将棋盤の例では更に1次元の運動に対応していることが分った。これは例えば、将棋盤の左下隅においたいくつかの駒（またはマス数个分の板）を適当な条件のもとに右上隅まで動かす問題に拡張できる。実際L形の字板（マス7個分）2枚と、 4×4 の正方形の板1枚を、ある制限のもとにチェス盤の片隅から対角の隅へ動かす手順は、玉の立体積みに対応し $W_{2 \times 2 \times 3}$ 通りあることが分った（図6）。

$W_{r \times s}$ および $W(\vec{a})$ は複合 P 格子の一つの応用例であって、電話の例にもみられるように種々の複合 P 格子が考えられる。

P 格子の出発点を ± 1 に限らず $\pm \kappa$ として

$$\pm \kappa P(\vec{n}),$$

のように表わせば、順序に少し注意して $\pm \kappa P(\vec{n})$ を加えていくことより、任意の点の数値を0にすることができる。これは任意の欠陥格子の経路を数えるのに便利である。

ここにあげた例は僅かですが、各方面で他の応用例をみつけていただければ幸いです。

おわりに、終始貴重な情報と御忠告をいただいた野崎昭弘教授に深く感謝いたします。

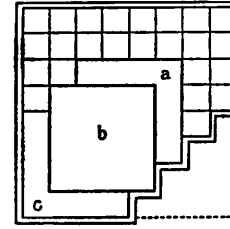


図6 右下の使えないチェス盤と3枚の板
Fig. 6 The 3 boards (a, b, c) can move to the opposite corner in $W_{2 \times 2 \times 3}$ ways.

参考文献

- 1) D. E. Knuth: The Art of Computer Programming, Vol. 1, p. 531 (1973).
- 2) 野崎昭弘: 経路の問題と母関数, 数学セミナー, Vol. 15, No. 2, p. 44 (1976).
- 3) M. Gardner: Mathematical Games, Scientific American, Vol. 234, No. 6, p. 120 (1976).
- 4) 山本幸一: 括弧—その組合せ論的な考察, 数学セミナー, Vol. 15, No. 10, p. 18 (1976).
- 5) 野崎昭弘: 計算数学セミナー, p. 102 (1976).

(昭和52年6月22日受付)

(昭和53年5月22日採録)