

国際金融危機における市場相関の動的解析

東京大学 石野 真隆
指導教員 陳 昱 准教授

1 緒言

1.1 研究の背景

金融市場は、これまでの歴史において度重なる金融危機に直面してきた。特に2008年9月に発生したリーマン・ショックは私たちの生活にも大きく影響し、広く周知されている。しかし、国際的な金融危機は歴史的にも珍しいものではない。1980年以降の代表的な国際金融危機だけでも、1987年のブラックマンデー、1998年のロシア財政危機、2001年のドットコムバブルの崩壊、2008年のアメリカにおけるサブプライム住宅ローン危機などが挙げられる。金融危機は、金融市場が整備された当初から存在し続ける問題であり、現在においても全世界の人々が国際金融危機の被害に悩まされている。国際的なつながりが強くなった昨今において、国際金融危機が世界経済に与える影響は甚大であり、その発生を事前に予測することは世界経済にとって非常に大きな意味を持つ。

1.2 従来の研究

これまでにおいても、国際金融危機への関心は高く、さまざまな研究が行われてきた。その中には、株指数と同じような挙動を示す値の発見を目指したもの¹⁾、市場同士の相関の挙動を分析し、時期による相関係数の値の分析を行ったもの²⁾、株指数の相関行列に基づいて構築したネットワークから、ネットワークの指標と国際金融危機の時期との関連性を分析したもの³⁾などがあるが、確固たる理論は確立されておらず、現象の解明がなされていないことがわかる。これらの研究のなかで、主成分分析を行い、固有値・固有ベクトルと金融市場の相関係数との関係についての解析から、最大固有値に注目することで、国際金融危機の予兆ができることが示唆されている。しかしながら、これまでの研究においては、大規模な金融危機にのみ焦点が当てられていることから、小規模な金融危機についての議論がなされていないことや、金融危機との関連性も最大固有値のみとの議論となっており不十分な点が多々残っている。

2 本研究の目的・手法

2.1 本研究の目的

本研究の目的は、国際金融危機（同時クラッシュ）における各国の株相関の特徴的な挙動を発見し、将来の同時クラッシュの予兆につなげることである。具体的には、主成分分析を行い、固有値・固有ベクトルと同時クラッシュとの関連性を解析する。また、Indexへの癒着効果についても分析し、同時クラッシュとの関連性も解析していく。本研究との関連の深い先行研究には、不十分な点が残っている。その一つは、最大固有値が同時クラッシュ直前以外の場面においても、大きな変動を見せることがあり、これらの関係性を見出すに至っていない点である。また、最大固有値のみの議論にとどまっており、ランダム行列理論から逸脱した最大固有値以外の固有値やそれらに対応する固有ベクトルと、同時クラッシュとの関連性の詳細な分析は

なされていない。これらの問題を解決するためにも、さらに深く同時クラッシュとの関連性を解析していく必要がある。

2.2 研究の手法

2.2.1 データ

国際金融危機のデータ解析を行うにあたって、本研究では各国で利用されている代表的な指数を採用する。その他の指標として、国際機関投資家などに使用されているベンチマークとしてモルガンスタンレー・キャピタル・インターナショナル社が算出、公表しているMSCI指数がある。しかし、MSCI指数は通常のニュースや新聞では公表されておらず、独自の株式市場の人々が反応するものとしては各国の代表的な指数がより優れていると考えるため、そちらを採用する。主要な25か国(アメリカ大陸5か国、ヨーロッパ9か国、アジア11か国)における株価指数の終値の日次データを用いた。世界の株価指数を用いる際に、各国では休日があるという問題があるため欠員値がばらばらに発生している。この問題を解決するために、30%以上の国が休日の日はその日を除去し、それ未満の場合は休日の国での前後の日次データを線形補完するという処理を行った。

2.2.2 ランダム行列理論

ランダム行列理論とは、核物理学の分野の中で誕生し発展してきた理論である。原子核のように相互作用が強く、さらにそのハミルトニアン自体がはっきりとわからない場合に、その不可知性を統計的に処理しスペクトル相関を得るために考え出されたものである。現在では、核物理学の分野にとどまらず、さまざまな分野で応用されている。生態学、金融工学といった分野で積極的に用いられ、一見ランダムに見えるもの同士から関連性を見出すために用いられている。

ランダム行列理論において、 $N \times N$ 行列の対称行列で各成分が独立同分布に従う確率変数であるとする、その固有値 λ_i ($i=1, 2, \dots, N$)の確率分布 $\rho(\lambda)$ は、固有値の理論最小値 λ_- 、理論最大値 λ_+ を用いて

$$\rho(\lambda) = \frac{q}{2\pi\sigma^2} \frac{\sqrt{(\lambda_+ - \lambda)(\lambda - \lambda_-)}}{\lambda} \quad (1)$$

$$\lambda_- = \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{q} - 2\sqrt{\frac{1}{q}}\right), \lambda_+ = \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{q} + 2\sqrt{\frac{1}{q}}\right) \quad (2)$$

のように、表されることがわかっている。

一見ランダムに見える金融市場の指数も、相関行列の固有値の偏在からランダムとは異なるものであることがわかる。金融市場の指数の時系列が独立でランダムなものであるとすると、ランダム行列理論の結果から、固有値 λ_i は固有値の理論最小値 λ_- と理論最大値 λ_+ の間に収まることになる。しかし、現実の金融市場のデータから計算された

ものはこの範囲から外れた範囲にも固有値が存在し、そこにランダムでない相関構造が表れていると考えられる。特に最大固有値や二番目の固有値、最小固有値等はランダム行列理論から予測される範囲から大きく外れており、それらの値に注目する意味を見いだせる。本研究では、それらの固有値の値と、それらに対応する固有ベクトルの動きを詳細に分析し、同時クラッシュとの関連性を見ていくこととする。

2.2.3 主成分分析

主成分分析を行っていくために、各市場 i の株価指数の 1 日おきの株指数 $S_i(t)$ に対して、対数リターン

$$G_i(t) = \ln S_i(t + \Delta t) - \ln S_i(t) \quad (3)$$

を計算し、 N (市場数) $\times L$ (営業日) の行列を構成する。

さらに市場ごとの対数リターンを正規化したデータ $g_i(t)$

$$g_i(t) = \frac{G_i(t) - \langle G_i \rangle}{\sigma_i}, \quad \sigma_i = \sqrt{\langle G_i^2 \rangle - \langle G_i \rangle^2} \quad (4)$$

を用いて、相関行列 C_{ij}

$$C_{ij} = \langle g_i(t) g_j(t) \rangle \quad (5)$$

を計算する。求めた相関行列から、固有値、固有ベクトルを分析する。

2.2.4 市場相関の動的解析

同時クラッシュにおける特徴的な挙動を探るために、これまでよりも詳細なダイナミクスを分析する。そこで、市場相関の解析をする期間 **window** を設定し、設定された **window** で固有値、固有ベクトルを計算する。この **window** をスライドさせながら固有値、固有ベクトルを解析することで、同時クラッシュ前後の詳細なダイナミクスを観察する。図は **window** を 140 に設定したときの、RMT から導かれる固有値分布と実際の各国の代表的な株価指数のデータから計算した相関行列の固有値の分布である。固有値の最大値、最小値は、共に理論最大値、最小値からずれて分布しており、ここに各国株価指数のランダムでない特徴的な挙動が表れていると考えられる。そこで、この RMT から逸脱した固有値や、それに対応する固有ベクトルの詳細なダイナミクスを観察することとする。

2.2.5 固有値、固有ベクトル

RMT から逸脱した固有値について、その動きと同時クラッシュ時のボラティリティを比較することで固有値と同時クラッシュとの関係性を見ていく。最大固有値に関しては、同時クラッシュ時にボラティリティよりも急峻な動きを見せているがその動きはほぼ同時期であり、さらに相関係数行列から求めた平均相関係数の動きとほぼ同じ動きを見せていることから、平均相関係数よりも良い予兆の指標とは言えない。そこで、最大固有値の次に RMT の理論値から最も離れている、2 番目の固有値 (第 2 固有値) と最小固有値について、その動きと同時クラッシュ時のボラティリティについての比較を行った。その結果、第 2 固有値についてはボラティリティや平均相関係数の増加に先立って減少していることがわかった。また、最小固有値については、それらに先立って増加していることがわかった。それぞれの動きはボラティリティや平均相関係数よりも

急峻な動きを見せていることから平均相関係数よりも有効な同時クラッシュの予兆の指標となりうると思える。そこで、それらの固有値に対応する固有ベクトルについても分析を行い、主成分の意味の考察を行った。

2.2.6 Index への癒着効果

ある市場における各銘柄は、その市場の **Index** に癒着している⁴⁾。Index の効果を除いた後の相関は、元のデータの相関と比較してとても小さな値を取り、多くの銘柄は Index へ癒着していることがわかる。そこで、同様なことが同時クラッシュ時における各国の株価指数においても見られるか分析した結果を報告する。

3 まとめと展望

今回は、主成分分析を行い固有値、固有ベクトルと同時クラッシュとの関連性の解析結果を報告する。今回の解析によって、RMT から逸脱している 2 番目の固有値や最小固有値の値も同時クラッシュ以前に急峻な動きをしているという結果が得られた。また、最大固有値の動きよりも前に挙動が表れている。これは、これらの固有値が最大固有値や平均相関係数よりも同時クラッシュを予兆する有効な指標となりうることを示している。しかし、同時クラッシュとこれらの指標の関係性についてはまだ議論の余地がある。そこで、今後も市場に潜む相関構造を詳細に分析していくことが重要であると考えている。

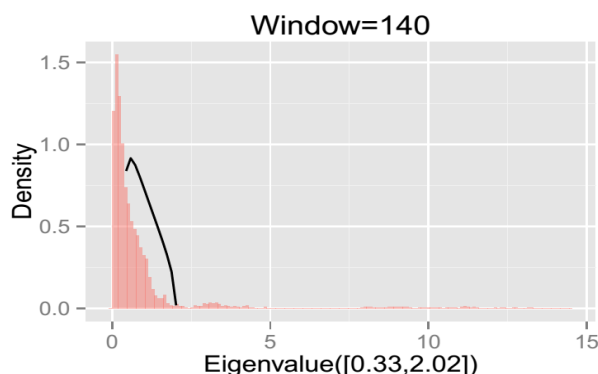


Fig. 1 Eigenvalue distribution for C constructed from the data (red) and the RMT result (solid curve).

文献

- 1) Ebara and Chen, Global Financial Crises and Market Correlations -An Analysis with Random Matrix Theory-, 東京大学大学院修士論文, 2013.
- 2) Leonidas Sandoval Junior and Italo De Paula Franca, Correlation of financial markets in times of crisis, arXiv:1102.1339v2, 2011.
- 3) Raphael H. Heiberger, Stock network stability in times of crisis, Physica A 393 (2014) 376-381
- 4) Y. Shapira and D.Y. Kenett and E. Ben-Jacob, The Index cohesive effect on stock market correlations, The European Physical Journal B 72(4): 657-669.