

非多様体における有限要素補間の研究

黒木省吾[†] 日吉久礎[‡]

青山学院大学理工学研究科理工学専攻[†] 青山学院大学理工学部[‡]

1. はじめに

私たちの周りには、人口、気温、交通量のように数値で表現できる現象が数多く存在している。そのような現象を解析するとき、まだ値が観測されていない地点での値を推定する方法として周囲の観測されている値に基づいて推定する方法がある。このような方法を補間と言う。

補間は、画像変換やシミュレーションなど工学における様々な問題に応用されており、工学的に非常に重要な方法である。対象となる問題の性質によって補間方法を使い分ける必要があるため、補間法には様々な種類がある。

本研究では補間法の一つである有限要素補間をネットワーク時空間に拡張することを目的とする。

2. 補間の拡張

従来の補間法はユークリッド空間を対象に研究が行われてきた。しかし、実際に身の回りに起きている現象には車の交通量、川の水位、生活による二酸化炭素排出量など、様々な事柄がネットワーク空間上で存在している。ここで、ネットワーク空間とは、例えば街の路が織りなす街路網をはじめとする網の目構造のことである。

だが、ネットワーク空間での現象の中にはデータの値が時間変動するものも存在している。そのような時間で変化する値に対してネットワーク空間上での補間を行うためには、単一の時点だけではなく、過去のデータ、未来のデータも踏まえ、時系列的に追うことにより、さらに精密な補間を行うことが可能になる。

このように補間をネットワーク空間、ネットワーク時空間に拡張することにより、身の回りに起きる現象においてより適した補間を行うことが出来るようになると考えられる[1][2][3]。

3. 有限要素補間

有限要素補間とは、領域を適当なメッシュに分割して、要素内部の値を多項式で表すことにより補間を行

う方法である。有限要素補間は、偏微分方程式を解く際の数値解法である有限要素法の基礎をなす、非常に重要な技術である。最大の特徴は計算領域を自由に分割できることであり、計算領域が複雑な形をしていても補間ができることである。メッシュ分割は三角形や四角形のような単純な図形が望まれ、また細長い三角形や四角形ではなくふっくらとした正三角形のような図形が望まれる[4][5]。

本研究では、メッシュとしてドロネー四面体分割を使用する。ドロネー四面体分割とは、母点集合が与えられたとき、どの母点に近いかによって空間を分割して作られるボロノイ図という図をもとに作られる。有限要素補間を精度よく実行するために、ドロネー四面体分割が、実践的に有効であることが知られている。

4. ネットワーク時空間への拡張

本研究では、時間軸を考慮した交差点をネットワーク時空間として考える。このように考えたとき、このネットワーク時空間は面が連なる非多様体として考えられる(図1)。

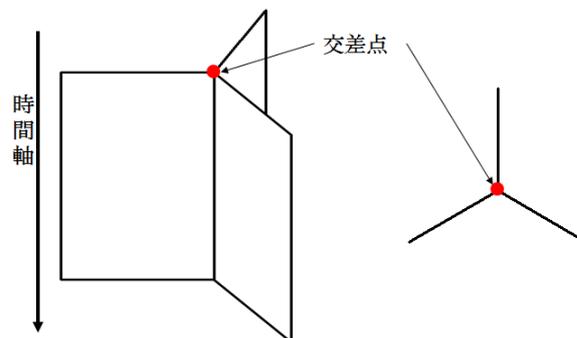


図1 時間軸を考慮した交差路

飯島[3]の研究では、ネットワーク時空間に母点を頂点としたドロネーグラフを得ることができないため、時間軸上に点を新たに追加した。続いて追加した点における値を、周囲の点から推定する。最後に、各面ごとにドロネー三角形分割を求めて有限要素補間を行った。しかし、新たに点を追加することにより安定的な補間を行うことが出来ず、時間軸付近で補間された値の誤差が大きくなってしまった。

よって本研究では、新たに点を追加するのではなく、この非多様体を三次元空間に埋め込み、ドロネー四面体分割による有限要素補間を行った。

「Finite element interpolation on non-manifold spaces.」

[†] 「Kuroki Shogo · Aoyama Gakuin University」

[‡] 「Hiyoshi Hisamoto · Aoyama Gakuin University」

5. 検証

各面に人工データを与えて、先行研究と比較し、どのような違いがあるかを調べ、本研究で提案された補間法の有効性について調べた。その際の補間法の実装としては、ボロノイ図やドロネーグラフ等を計算することのできる計算幾何学分野のソフトウェアCGALを用いて有限要素補間を行うプログラムを作成した。

実装手順としては

1. 1つの面を基準とし、他面を角度によって変換することで三次元空間に埋め込む。
2. 変換後のデータを基に四面体分割、有限要素補間を行う。
3. データを基の非多様体の状態に変換する。

このような手順で行う。

各面における座標軸を図2の様に表した。各面にある母点の座標を (x, y) としたとき、その点を持つデータ値 z を $z(x, y)$ と書く。本実験では各面に

$$z = x \tag{1}$$

のデータ値を与えた。その時のある一面の補間結果を図3、図4である。本研究を非多様体における有限要素補間、飯島の研究を交点2点補間とする。この結果を交点2点補間と比較するとより有効性が高いことが確認できた。

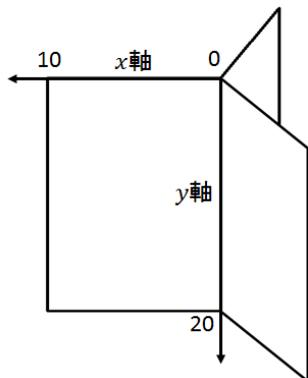


図2 座標軸の取り方

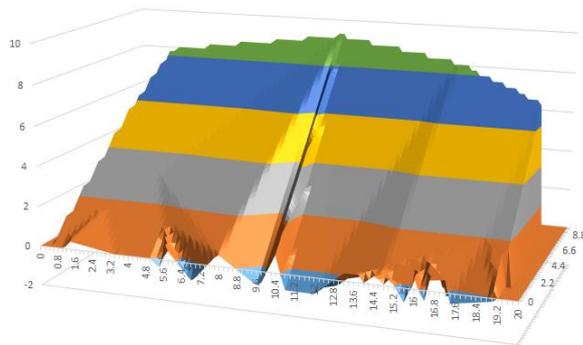


図3 交点2点補間

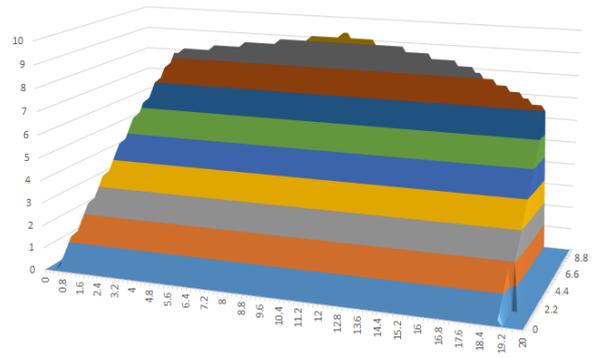


図4 非多様体における有限要素補間

6. おわりに

本研究では、有限要素補間をネットワーク時空間へと拡張した新たな補間法を提案した。一定の条件内においてはかなりの有効性があり、非多様体においても有限要素補間を行うことが可能であることが分かった。

今後は地価データのような実際に存在している実データに対する調査が必要であると考えられる。

7. 参考文献

- [1]塩出志乃:”逆距離加重法によるネットワーク空間上での点補間に関する研究,”Theory and Applications of GIS, pp.33-41, Vol.13, NO.1 (2004).
- [2]小川銀次:”自然近傍補間の時空間ネットワークへの拡張,”(2010).
- [3]飯島大智:”ネットワーク時空間におけるドロネーグラフとその補間への応用,”(2011).
- [4]杉原厚吉:”なわばりの数理モデル(ボロノイ図からの数理工学入門),”共立出版,(2009).