

## Magic Graph の代数的考察

杉山 雅英 (会津大学)

**1. まえがき** グラフに対する整数列の定和配置問題 Magic Graph [1, 2, 3] について本論文では弱定和性を述べその代数的性質を考察する。

### 2. Magic Graph と magic sum

Magic Graph はグラフ  $G$  の頂点と辺のノードに連続した  $1 \sim n$  の数を割り当て各辺毎の数の和が一定になるものであり、その一定和  $S$  を定和 (magic sum) とよぶ。頂点・辺・辺に置くノードの個数を  $v, e, m$  とすると用いる数は  $n = me + v$  である。  $1 \sim n$  の数字の配置とその定和との組を  $(L, S)$  で表す。

**2.1 定和方程式と定和の計算** グラフ  $G$  の頂点  $i$  の次数を  $p_i$ , ノード  $i$  に配置する数を  $x_i$ , 和を  $\tilde{X} = \sum_{i=1}^v (p_i - 1)x_i, X = \sum_{i=1}^v x_i$  とする。定和  $S$  は定和方程式 (1) を満たす。

$$e \cdot S = \sum_{i=1}^v (p_i - 1)x_i + \frac{n(n+1)}{2} = \tilde{X} + N. \quad (1)$$

$G$  が regular の場合は  $\tilde{X} = (p-1)X$  となる。図1は3角形 ( $m = 1$ ) において、左では頂点に  $1, 2, 3 (S = 9)$ , 右は  $4, 5, 6 (S = 12)$  を定和配置する例である。

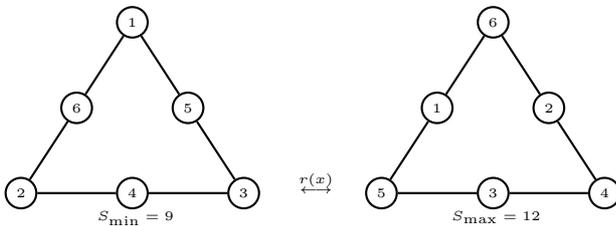


図 1: 3 角形への定和配置の例 ( $v = e = 3, m = 1$ )

### 3. アフィン変換による定和構造の変換 [4]

**3.1 双対定和構造**  $1 \sim n$  が定和配置可能であればアフィン変換  $r(x) = -x + n + 1$  を用いて昇順降順変換しても定和配置可能である。  $G$  への二つの配置  $L, L'$  が  $r(x)$  で相互変換できるときその配置を双対と定義し  $(L, S) \iff (L', S')$  で表す。図1の左の最小配置  $(L_{\min}, S_{\min})$  と右の最大配置  $(L_{\max}, S_{\max})$  は変換  $r(x) = 7 - x$  で双対であり、一般に  $(L_{\min}, S_{\min}) \iff (L_{\max}, S_{\max})$  である。  $(L, S) \iff (L', S')$  であるとき各々の定和は  $S + S' = (n + 1)(m + 2)$  を満たす。さらに双対の定和  $S, S'$  を実現する配置は同一個数である。

\* Algebraic study on Magic Graphs, M. Sugiyama (The Univ. of Aizu)

**3.2  $\mathbf{Z}_n$  のアフィン変換と弱定和構造** 剰余環  $\mathbf{Z}_n$  上でのアフィン変換  $f(x) = ax + b (a, b \in \mathbf{Z}_n)$  は値域を変化させず整数の範囲  $[1, n]$  で閉じて変換できかつ弱定和性 (各辺での和に対して  $\mathbf{Z}_n$  での等号が成り立つこと) が成り立つ。ただし  $0$  と  $n$  とを同一視する。  $n$  と互いに素な数の集合  $S_n$  は位数  $\varphi(n)$  の有限可換群である。ここで  $\varphi(n)$  はオイラーの  $\varphi$  関数である。  $S_n$  の性質を用いて  $\mathbf{Z}_n$  のアフィン変換に関して、  $a$  が  $n$  と互いに素 ( $a \perp n$ ) であれば  $f(x)$  は1対1であり、  $f(x)$  は必ず逆写像を持つ。これより  $\mathbf{Z}_n$  の1対1アフィン変換の集合  $F_n$  は位数  $n\varphi(n)$  の非可換群になる。アフィン変換後の定和は式 (2) を満たす。

$$S' = aS + b(m + 2). \quad (2)$$

図1の3角形 ( $m = 1$ ) の最小配置  $L_{\min}$  から定和配置が構成できる変換  $f(x)$  とその定和  $S$  の組み合わせは  $(x, 9), (x + 3, 12), (5x + 1, 12), (5x + 4, 9)$  の4個で、得られる定和は  $(9, 12)$  のみである。図2に示す別の定和配置  $L_0$  からは6個の変換で得られる定和は  $(10, 11)$  である。従って一つの配置から実現可能な全ての定和を持つ配置を生成できるわけではない。

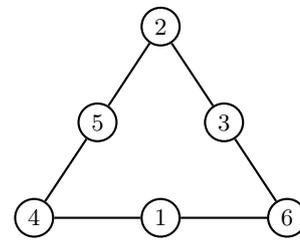


図 2: 3 角形への定和配置  $L_0$   
 $m = 1, n = 6, S = 11$

図3の3角形 ( $m = 2$ ) の最小配置  $L_{\min}$  から得られる定和は  $(17, 19, 20, 21, 23)$  である。全数探索で  $S = 18, 22$  の配置は存在しない [5] ので実現できる全ての定和を持つ構造を一つの配置から得られた。

**3.3  $\mathbf{Z}_n$  の定和構造のクラスタリング** グラフに対してアフィン変換で他の定和配置を生成する場合に3角形  $m = 1$  では異なる二つの初期定和配置が、  $m = 2$  の時は最小配置のみから全ての定和を生成できた。グラフ  $G$  に対して  $M_n$  を定和配置の集合、  $M_n^w$  を弱定和配置の集合、  $P_n$  を全ての順列の集合とすると包含関係  $M_n \subset M_n^w \subset P_n$  が成り立つ。  $(L, S)$  から変換  $f(x) = ax + b$  で  $(L', S')$  が得られるとする。  $a \perp n$  であれば  $ax + b$  は

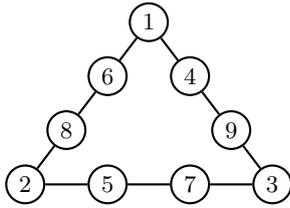


図 3: 3 角形への最小定和配置  
 $m = 2, n = 9, S_{\min} = 17$

逆写像  $g(x) = a'x + b'$  を持ち  $(L', S')$  から変換  $a'x + b'$  で  $(L, S)$  が得られる。この関係を  $(L, S) \leftrightarrow (L', S')$  で表す。関係  $\leftrightarrow$  は  $M_n, M_n^w$  の同値関係であるので  $M_n, M_n^w$  は  $\leftrightarrow$  で同値類に分類できる。任意のアフィン変換  $f(x) = ax + b \in F_n$  ( $a \perp n, a, b \in \mathbf{Z}_n$ ) に対して  $f(M_n) \subset M_n$  は成り立たないが  $f(M_n) \subset M_n^w$  が成り立つ。即ち  $M_n$  で閉じていないが  $M_n^w$  に対しては閉じている。アフィン変換  $f(x) = ax + b \in F_n$  に対しては弱定和配置の集合  $M_n^w$  の方が安定である。そこで

$$\aleph(L)^w = \{L' \in M_n^w \mid (L, S) \leftrightarrow (L', S')\}.$$

と定義すると  $|\aleph(L)^w| = n\varphi(n)$  であり  $M_n^w$  は  $\aleph(L)^w$  を用いて disjoint にクラスタリングできることになる。

$$M_n^w = \bigcup_i \aleph(L_i)^w, \quad \aleph(L_i)^w \cap \aleph(L_j)^w = \phi. \quad (3)$$

$L \in M_n^w$  の弱定和  $S$  に対して式 (2) を用いて任意のアフィン変換  $f(x) = ax + b \in F_n$  で得られる弱定和の集合  $\varphi(S)$  は式 (4) で与えられる。

$$\begin{aligned} \varphi(S) &= \{aS + (m+2)b \mid a \perp n \text{ かつ } a, b \in \mathbf{Z}_n\} \\ &= \bigcup_{a \perp n} \{aS + (m+2)b \mid b \in \mathbf{Z}_n\}. \end{aligned} \quad (4)$$

$S$  から得られる弱定和の集合  $\varphi(S)$  を  $S$  で生成される弱定和クラスターと呼ぶことにする。 $b \in \mathbf{Z}_n$  であるので第 2 項の要素の集合は  $I = (m+2)\mathbf{Z}_n$  で剰余環  $\mathbf{Z}_n$  の単項イデアルであり、 $m+2, n$  の最大公約数を  $d = (m+2, n)$  とすると  $(m+2)\mathbf{Z}_n = d\mathbf{Z}_n = (d)$ ,  $(|(m+2)\mathbf{Z}_n| = n/d)$  が成り立つ。さらに  $\{aS + (m+2)b \mid b \in \mathbf{Z}_n\} = aS + (m+2)\mathbf{Z}_n$  と変形できるので右辺は  $\mathbf{Z}_n$  のイデアル  $I$  による剰余類  $\langle aS \rangle = aS + I$  に一致し、その異なる剰余類の個数は  $d$  で与えられるので  $\langle aS \rangle$  は  $\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \dots, \langle d-1 \rangle$  のいずれかに一致する。従って弱定和クラスター  $\varphi(S)$  は式 (5) のように剰余類  $\langle aS \rangle$  の和集合に一致する。

$$\varphi(S) = \bigcup_{a \perp n} \langle aS \rangle. \quad (5)$$

また剰余類  $\langle i \rangle$  に対して  $\langle i \rangle = \langle i+d \rangle$  であるので弱定和クラスター  $\varphi(S)$  について  $\varphi(S) = \varphi(S+d)$  が成り立

つ。異なる剰余類は共通部分を持たない集合であるので  $S$  で生成される弱定和クラスターは一致するか共通部分を持たない。特に  $S = 0$  の時  $\langle aS \rangle = \langle 0 \rangle = (m+2)\mathbf{Z}_n$  であるので  $\varphi(0) = \langle 0 \rangle$  である。

図 1 及び図 2 の 3 角形において  $k = 3, m = 1, n = 6$  の時は  $d = (m+2, n) = 3$  で、 $n = 6$  と互いに素な数は  $a = 1, 5$  のみであり、 $\ell = n/d = 2$  であるので

$$I = (m+2)\mathbf{Z}_n = 3\mathbf{Z}_6 = (3) = \{0, 3\} = \langle 0 \rangle,$$

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi(0) &= \langle 0 \rangle = \{0, 3\} \\ \varphi(1) &= \bigcup_{a \perp n} \langle a \rangle = \langle 1 \rangle \cup \langle 5 \rangle = \langle 1 \rangle \cup \langle 2 \rangle \\ &= \{1, 4\} \cup \{2, 5\} = \{1, 2, 4, 5\} \\ \varphi(2) &= \bigcup_{a \perp n} \langle 2a \rangle = \langle 2 \rangle \cup \langle 10 \rangle = \langle 2 \rangle \cup \langle 1 \rangle. \end{aligned} \right.$$

となり異なる弱定和クラスター数は 2 である。 $9 \equiv 3, 10 \equiv 4, 11 \equiv 5, 12 \equiv 0 \pmod{6}$  であるので図 1 で得られる定和 9, 12 は  $\varphi(0)$  に、図 2 で得られる定和 10, 11 は  $\varphi(1)$  に含まれることになる。図 3 の 3 角形  $k = 3, m = 2, n = 9$  の時は  $d = (4, 9) = 1$  であるので弱定和クラスター数は 1 である。表 1 に  $k$  角形に対して  $m$  を変化した時の弱定和クラスター数を示す。 $k - 2, m$  に対して対称となっている。

表 1:  $k$  角形と  $m$  との組み合わせに対する弱クラスター数

$k$	$m$							
	1	2	3	4	5	6	7	8
3	2	1	1	2	1	1	2	1
4	1	3	1	2	1	3	1	2
5	1	1	2	1	1	1	1	2
6	2	2	1	4	1	2	2	2
7	1	1	1	1	2	1	1	1
8	1	3	1	2	1	3	1	2

**4. むすび** Magic Graph の弱定和クラスターの性質の述べその個数の計算方法を示した。今後は定和のクラスターとの関係について検討する。

参考文献

- [1] A. M. Marr, W. D. Wallis, Magic Graphs. Second edition, Birkhuser/Springer, New York. (2013)
- [2] 杉山, グラフへの整数配置問題, 情報処理学会, 3C-2 (2014-03).
- [3] 杉山, グラフへの整数列の定和配置問題, IPSJ 東北支部研究会, 13-7-A2-4 (2014-03).
- [4] 杉山, アフィン変換を用いた Magic Graph の生成, 電気関係学会東北支部連合大会, 2G21 (2014-08).
- [5] 杉山, グラフ探索による Magic Graph の生成, IPSJ 東北支部研究会, 2014-akita, No.9 (2014-12).