ショートノート

条件数の近似評価について[†]

——最適な有限要素分割を定める問題に関連して——

瀬口靖幸[††] 冨田佳宏[†††] 橋本 親[††††]

機械計算にともなう計算誤差を最小にするような有限要素分割を定めるには，条件数を最小にするような分割を求めればよい．この逆問題を解く過程では条件数を反復して計算しなければならないので，大次元連立方程式の場合には，計算コストの点から，その解を求めることは実際上できなくなってしまうほどである．このため計算努力の少なくてすむ条件数の近似式を用いる必要があるが，ここでは主としてコレスキ分解にもとづく近似式の精度を調べ，それが厳密な最小条件数の条件を比較的よく近似することなど，近似式の挙動について得られたいくつかの知見を具体的な計算例を挙げて示す．

1. まえがき

計算機の発達にともなって有限要素法が複雑な工学問題の解析手法として広く用いられ，計算時間などに制限を設けない場合，かなりの精度で解が得られている．ところが，それらに制約が加えられると，要素分割の良否が解の精度を大きく左右することが知られており，最良な解を得るための要素分割法の確立が急がれている．全ポテンシャルエネルギを最小化することに基礎を置いた弾性有限要素法に限定すると，種々の要素分割パターンについて，解を求める過程で最小化されたポテンシャルエネルギの値のうちより小さい値を与える分割を選べばよいとする基準で，より好ましい分割パターンを選択しようとする試みが行われ[1),2)]，著者らも，同じ節点数に限定した場合，分割パターンによってかなりの精度の改善がみられることを報告した[3)]．

いっぽう，機械計算で有限要素解を求める場合，解の相対誤差は行列の条件数に依存するとして，条件数があまり大きくならない分割法を推奨する考え方が行われてきた．前者の場合を離散化誤差に対する基準とすれば，後者は計算誤差に対する基準ということがいえよう．実際の計算では，どちらの意味でも最適な分割というのは一般的に存在しないので，これら2つの基準をなるべくより好ましい方向で満足する要素分割を採用せざるをえない．このことに対して，著者らは簡単な2目的最適化手法によって妥協解を求めることを試み，興味あるいくつかの基礎資料を示した[3)]．ここでは，この問題に付随して得られた条件数と要素分割に関するごく基本的ないくつかの結果を報告し，数値的側面に興味ある有限要素解析者の参考としたい．

2. 最小条件数基準による分割とその問題点

このノートのみで議論を進めることができるように，文献 3) に示された内容をまずかいつまんで述べよう．

多元連立一次方程式

$$\boldsymbol{Ku}=\boldsymbol{P} \tag{1}$$

に対して，入力データの誤差を $\Delta\boldsymbol{K}, \Delta\boldsymbol{P}$ としたとき，計算機内の計算は

$$(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K})(\boldsymbol{u}+\Delta\boldsymbol{u})=\boldsymbol{P}+\Delta\boldsymbol{P} \tag{2}$$

となるから，出力データの相対誤差をノルムで評価すると

$$\frac{\|\Delta\boldsymbol{u}\|}{\|\boldsymbol{u}\|}\leq C\left(\frac{\|\Delta\boldsymbol{K}\|}{\|\boldsymbol{K}\|}+\frac{\|\Delta\boldsymbol{P}\|}{\|\boldsymbol{P}\|}\right) \tag{3}$$

ただし，Cは条件数で

$$C=\|\boldsymbol{K}\|\cdot\|\boldsymbol{K}^{-1}\| \tag{4}$$

となることはよく知られている[4)]．

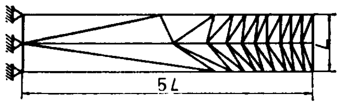
条件数Cは，正値対称な $\boldsymbol{K}$ に対して l_2 ノルムを採用すると，固有値 λ_i により

$$C=\max_i \lambda_i(\boldsymbol{K})/\min_i \lambda_i(\boldsymbol{K}) \tag{5}$$

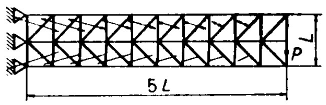
---

† Note on Approximate Formulae of Condition Number (Relating to Optimum Finite Element Discretization) by YASUYUKI SEGUCHI, YOSHIHIRO TOMITA (Faculty of Engineering, Kobe University), and SHIN HASHIMOTO (Fuji Electric Co., Ltd.).

†† 神戸大学工学部システム工学科
††† 神戸大学工学部機械工学科
†††† 富士電機製造(株)



（a） 最小条件数の分割パターン $C=12705$



（b） 初期分割パターン $C=25659$

図 1 最小条件数の分割パターンと初期分割パターンの比較
Fig. 1 Comparison of discretization patterns.

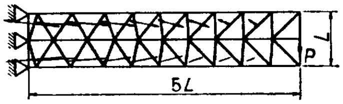


図 2 最小ポテンシャルエネルギの分割
Fig. 2 Discretization pattern of Minimum potential energy, $C=40759$.

となるが，この計算は多大の計算努力を要求するので，

$$C\cong\Sigma d_{ii}\cdot\Sigma 1/d_{ii} \qquad (6)$$

なる近似式を用いることとする．ここで，d_{ii}は$\boldsymbol{K}$をコレスキ分解したときの対角行列の第i番目の成分で，この近似式は文献 5) で精度評価が行われ，よい近似を与えるとされているものである．

式(6)による最小条件数基準を，要素分割の位相を変えずに節点座標のみを移動させる問題に適用した例がいくつかあるが，そのうち片持はりに対する結果を初期要素分割とともに**図 1** に示す．**図 2** は同じ例に対するポテンシャルエネルギ最小基準に対する結果であるが，これらの結果は，2つの基準にトレードオフがあることを示しており，2目的最適化による妥協解の必要性を示唆しているものと考える．しかし，この例では条件数に関する環境は良好で，その改善は1桁以内であり，ポテンシャルエネルギ基準が大きく影響するから，2目的最適化に選好順序を持ちこむとよい．ただ，実際の大規模構造では，条件数の立場はこの例にくらべてより悪化することが考えられるから，その場合に離散化誤差のみに着目する分割が必ずしもよいといえないことを暗に示したのが文献 3) であった．

ここで問題となるのは，条件数基準の計算に用いられた式(6)の近似表示が，はたして同じ分割位相のうちで条件数を最小にする節点座標を定める問題の妥当な解を与えるかということである．以下では，これらについてごく限られた範囲ではあるが，具体的ないくつかの考察を加えてみたい．

3. 条件数の近似計算式の精度評価

同じ位相の範囲内で節点座標を移動させて条件数を最小にするような最適要素分割の条件は，線形弾性構造に対する式(5)により，移動させる節点座標値のベクトルを$\boldsymbol{x}$とすれば

$$\partial C/\partial \boldsymbol{x}=0 \qquad (7)$$

で与えられる．この条件で節点座標を定めるには固有値の計算を必要とするが，計算コストの点から，固有値を直接求める必要のない条件数の近似表示があれば都合がよい．すでに述べたように式(6)はその1つとして文献 5) で検討されたもので，行列の次数を種々変化させたとき，Hilbert, Pascal, Frank および具体的な単純構造の剛性行列について精度評価が行われている．そこで，ここでは別に次の行列

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} N & N-1 & N-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ N-1 & N & N-1 & \cdots & 4 & 3 & 2 \\ N-2 & N-1 & N & \cdots & 5 & 4 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & N & N-1 & N-2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & N-1 & N & N-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & N-2 & N-1 & N \end{bmatrix} \qquad (8)$$

について，式(6)の近似表示と

$$C\cong T_r(\boldsymbol{K})\cdot T_r(\boldsymbol{K}^{-1})/N \qquad (9)$$

による条件数を真の条件数と比較したものを**図 3** に示す．ここで，Nは行列$\boldsymbol{K}$の次数，$T_r(\boldsymbol{K})$は$\boldsymbol{K}$のトレースである．すべての領域においてコレスキ分解にもとづく式(6)は真の条件数を高く，式(9)は低く評価しており，条件数の絶対量そのものを問題にしないと

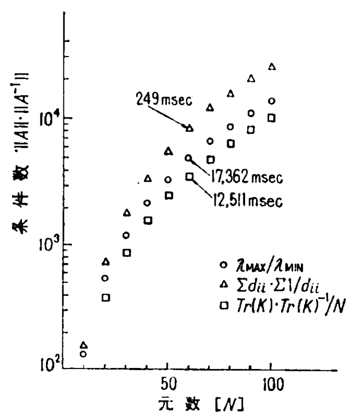


図 3 条件数の近似式の評価 [FACOM 230-38/OS II/VS]
Fig. 3 Estimation of approximate formulae for condition number [COMPUTER FACOM 230-38/OS II/VS].

き，どちらも連立方程式の相対的な性質の評価に使えるが，計算時間の点でコレスキ分解にもとづく近似条件数はすぐれているとする文献 5) の結論を追認することができる．

さて，上述の結論は同じ位相のもとで，節点座標を最適な方向に移動させる問題において，コレスキ分解の条件数近似式がよい結果を与える保証をするものではない．いいかえると，式(6)を用いて計算された最適点は，真の条件数の最適点と一致するかを調べる必要がある．そこで前例の片持はりのモデルに対して，条件数として近似式(6)を用いた場合得られた最適要素分割パターンを，真の条件数によるそれと比較したものを**図 4, 5** に示す．図 4 では要素数が 24 と 40 の場合に対して得られた最適要素分割パターンが示されて

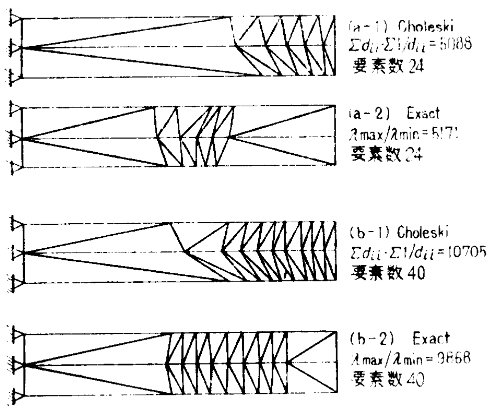


図 4 最小条件数の分割パターンの比較

Fig. 4 Optimum finite element discretization based upon condition number. Choleski and exact correspond to choleski approximation and exact estimation of condition number respectively.

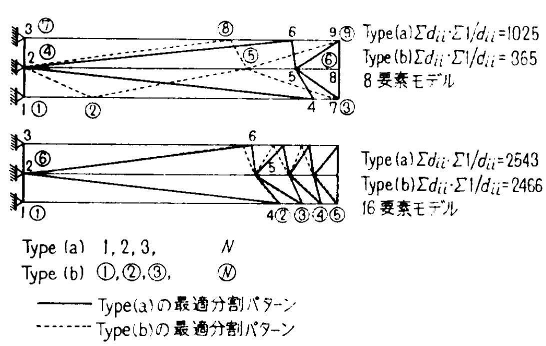


図 5 節点番号付けを変えたときの最小条件数の分割パターン

Fig. 5 Optimum finite element discretization pattern based upon condition number for different numbering.

おり，要素数が増加すると近似式(6)による最適要素分割パターンが真の条件数による最適要素分割パターンに全体的に類似していくことが推察される．要素節点の番号付けを変えると，それによって条件数が変化し，式(6)による条件数の近似度が変化することが考えられる．図 5 は節点番号付けが異なる場合の式(6)による最適要素分割のふるまいを示したもので，要素数がある程度多くなると最適要素分割パターンの変動が小さくなり，節点番号付けによる影響が少なくなることがわかる．

同じことを示すより大域的なふるまいは，より簡単な要素分割に対して計算例示することができる．**図 6** は片持はりの図示の分割に対して，中央のメッシュまでの距離 l を L から $3L$ まで変化させたときの式(6)による近似条件数 C_A と厳密な条件数 C_E の挙動を比較したもので，C_A の大域的最小点は C_E のそれとよく一致していることを示している．

以上の議論では，式(3)右辺の解の相対誤差は，同じ入力データの誤差ならば，条件数が小さいほど小さいとする考え方が前提としてあったが，式(3)の不等式関係では一般的にこの考え方は成立しない．しかし，具体的な例についてこの前提を検証することはできる．

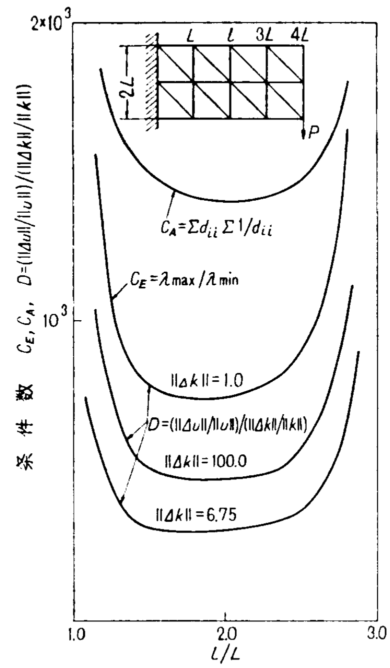


図 6 条件数と D 値のふるまい

Fig. 6 Behaviors of condition numbers and D-value.

前例の片持はりに対して，剛性行列のみに操作的に既知の誤差を混入させて

$$\frac{\dfrac{|\Delta \boldsymbol{u}|}{|\boldsymbol{u}|}}{\dfrac{|\Delta \boldsymbol{K}|}{|\boldsymbol{K}|}}=D \tag{10}$$

を計算し，C_E および C_A と比較したものを同じ図6に示す．図中，$\|\Delta \boldsymbol{K}\|=1$ および100の場合は $\boldsymbol{K}$ の対角成分のみに均等にそれぞれ1および100の誤差を混入（このとき，$l=2L$ に対して $\|\boldsymbol{K}\|=1.34\times 10^5$ である）したもの，$\|\Delta \boldsymbol{K}\|=6.75$ は，0から10までの一様乱数をなるべくランダムに行列全成分にわりふったもののD値である．

C_A, C_E および D 値のふるまいと最小点はよく一致しているから，最小条件数基準をとる根拠はこの場合明白であり，一般の場合にも同じ位相で節点座標を移動させる最適分割に関するかぎり，最小条件数は計算誤差の点から望ましいことになっている場合が多いことを推論させるものである．

4. むすび

有限要素法の要素分割のパターンの選択の問題は，選択が適切に行われたときは解の改良効果が著しいだけに，もし，選択基準の評価計算が容易であれば，実用上今後重要な問題となるであろうし，数値解析上も興味深い．ところがこれまであまり具体的資料が提出されていなかったので，最近の著者らの一考察，文献3)に付随して得られた，条件数を最小にする分割パターンの観点から，有限要素解析者の参考のために，ごく限られた基礎的なものであるが，いくつかの事例を示してみた．ここでの一応の結論は次のようなものである．条件数を小さくする分割パターンは，丸めや打切りなど計算に際して混入する誤差を小さくするパターンであることに対する期待を容認するものであり，式(6)の近似表示は，分割パターン選択問題に対しても使用に耐えるものと思われる．

図6の関係の計算については，神戸大大学院の田中正夫君の手をわずらわした．記して謝意を表したい．

参考文献

1) McNeice, G. M. and Marcal, P. V.: Optimization of Finite Element Grids Based on Minimum Potential Energy, Trans. ASME, Ser. B, Vol. 95, p. 186-190 (1973).
2) Prager, W.: A Note on the Optimal Choice of Finite Element Grids, Comput. Math. Appl. Mech. Engng., Vol. 6, pp. 363-366 (1975).
3) 瀬口，冨田，橋本：ポテンシャルエネルギと条件数の2目的最適化にもとづく有限要素分割，機論，Vol. 44, No. 378, pp. 452-459 (1978).
4) Ortega, J. M.: Numerical Analysis (A Second Cource), Academic Press (1972).
5) 川面，三輪：構造解析における連立一次方程式の演算誤差，第25回応用力学連合講演会講演論文抄録集，pp. 383-384 (1975).

(昭和53年6月22日受付)
(昭和54年2月13日採録)