ショートノート

スタックまたはキューを用いて得られる順列の数について†

仙 波 一 郎††

スタックまたはキューを用いて n 個の要素の列の並べ換えを行う時，得られる順列の数を，両者に共通になりたつ漸化式から導びき，一致することを示す．

1. はじめに

スタックを使って，n 個の要素の列の並べ換えをした時，得られる順列の数 a_n は，いろいろな方法で求められている[1),2)]．スタック（一番最近に挿入された要素が最初に削除される）とキュー（一番最古に挿入された要素がいつでも削除される）は逆の性質を持つにもかかわらず，得られる順列の数は一致する．

この論文では，両者に共通になりたつ漸化式を導びき，それを解いて a_n を求める．

2. 定 義

n 個の要素を $1, 2, \cdots, n$ とし，並べ換えが行われる列を $12\cdots n$ とし入力列とよび，行われた結果を出力列とよぶことにする．スタックを用いた場合の出力列を $s=s_1s_2\cdots s_n$ とし，キューを用いた場合の出力列を $q=q_1q_2\cdots q_n$ とする．

$s_i=n$ を満たす出力列の数を $f_{n,i}(i=1, 2, \cdots, n)$

$q_i=n$ を満たす出力列の数を $g_{n,i}(i=1, 2, \cdots, n)$ とおく．なお，$a_n=f_{n+1,n+1}$ となることを注意しておく．

3. 基本漸化式

$f_{n,i}$ についてつぎの性質がなりたつ．

性質 1

$$f_{n,i}=\sum_{j=1}^{i} f_{n-1,j} \quad (1\leqq i\leqq n-1) \tag{1}$$

$$f_{n,n}=\sum_{j=1}^{n-1} f_{n-1,j} \tag{2}$$

$$f_{1,1}=1 \tag{3}$$

（証明）

（I） $1\leqq i\leqq n-1$ の場合．

$s_j=n-1$ とすると，j の値によって，つぎの2つの場合が考えられる．ただし $s_i=n$．

（イ） $1\leqq j<i$ の場合．

要素 $n-1$ を，$n-1$ 個の要素の入力列の最大要素とみなし，出力列の左から j 番目に並べられたと考えられる．そのような並べ方は $f_{n-1,j}$ 通りある．逆に，そのような並べ方のひとつひとつに対して，スタックを通じて要素 n を左から i 番目に挿入する仕方がただひとつ，自然に決ってしまう．ゆえにこの場合の並べ方は $f_{n-1,j}$ 通りある．

（ロ） $i<j$ の場合．

要素 n が出力列の左から i 番目に並べられると，スタックを通じて並べかえているので，この場合，要素 $n-1$ は出力列の左から $i+1$ 番目，すなわち要素 n の右隣りに必ず並ぶ．

要素 $n-1$ と要素 n はつねに隣接しているのでひとつとみなすと，この場合の並べ方は $f_{n-1,i}$ 通りある．

以上（イ），（ロ）を合計すると（1）を得る．

（II） $i=n$ の場合．

（I）の（イ）の場合だけで（ロ）は起りえないので合計すると（2）を得る．

（3）は明らか． （終）

$g_{n,i}$ についてつぎの性質がなりたつ．

性質 2

$$g_{n,i}=\sum_{j=1}^{i} g_{n-1,j} \quad (1\leqq i\leqq n-1) \tag{4}$$

$$g_{n,n}=\sum_{j=1}^{n-1} g_{n-1,j} \tag{5}$$

$$g_{1,1}=1 \tag{6}$$

（証明）

（I） $1\leqq i\leqq n-1$ の場合．

† On the Numbers of Permutations Obtainable by a Stack or by a Queue by ICHIRO SENBA (Department of Pure and Applied Sciences, College of General Education, University of Tokyo).

†† 東京大学教養学部基礎科学科

$q_j=n-1$ とすると，j の値によって，つぎの２つの場合が考えられる．ただし $q_i=n$.

（イ）　$1\leqq j<i$ の場合.

性質１の（イ）と同様に考えて，$g_{n-1,j}$ 通りの並べ方があることがわかる.

（ロ）　$i<j$ の場合.

要素 n が出力列の左から i 番目に並べられると，キューを通じて並べかえているので，この場合，要素 $n-1$ は必ず出力列の左から n 番目，すなわち出力列の右端に並ぶ．要素 $n-1$ は必ず出力列の右端に並べられているので，この場合，入力列から要素 $n-1$ を取除き，$n-1$ 個の要素が並べかえられて，$q_i=n$ となったと考えられる．そのような並べ方は $g_{n-1,i}$ 通りある.

以上（イ）と（ロ）を合計すると（４）を得る.

（Ⅱ）　$i=n$ の場合.

（Ⅰ）の（イ）の場合だけで（ロ）は起りえないので合計すると（５）を得る.

（６）は明らか.　　　　（終）

性質１,２よりつぎの性質が成立つ.

性質３

$n\geqq 1$ において

$$f_{n,i}=g_{n,i}\quad(1\leqq i\leqq n)$$

4. 順列の数

定理

$n\geqq 1$ において

$$f_{n,i}=\binom{n+i-2}{i-1}-\binom{n+i-2}{i-2}\ (1\leqq i\leqq n)\quad(7)$$

ただし $\binom{n}{k}=0\ (k<0)$ とする.

（証明）　n に関する帰納法で示す.

（Ⅰ）　$n=1$ の場合.

明らか.

（Ⅱ）　$n=k$ まで与式が成立つとする.

（イ）　$i=1$ の場合.

スタックの性質により $f_{k+1,1}=1$.

一方　右辺 $=\binom{k}{0}-\binom{k}{-1}=1$　よって　左辺＝右辺.

（ロ）　$2\leqq i\leqq k$ の場合.

（１）より

$$\begin{aligned}f_{k+1,i}&=\sum_{j=1}^{i}\left\{\binom{k+j-2}{j-1}-\binom{k+j-2}{j-2}\right\}\\&=\sum_{j=1}^{i}\binom{k+j-2}{j-1}-\sum_{j=1}^{i}\binom{k+j-2}{j-2}\\&=\binom{k+i-1}{i-1}-\binom{k+i-1}{i-2}\end{aligned}$$

（ハ）　$i=k+1$ の場合.

$$\begin{aligned}f_{k+1,k+1}&=\sum_{j=1}^{k}\left\{\binom{k+j-2}{j-1}-\binom{k+j-2}{j-2}\right\}\\&=\binom{2k-1}{k-1}-\binom{2k-1}{k-2}\\&=\left\{\binom{2k}{k}-\binom{2k-1}{k}\right\}\\&\quad-\left\{\binom{2k}{k-1}-\binom{2k-1}{k}\right\}\\&=\binom{2k}{k}-\binom{2k}{k-1}\end{aligned}$$

以上より $n=k+1$ において（７）が成立つことが示せた.

（Ⅰ），（Ⅱ）より $n\geqq 1$ において（７）が成立つことが示せた.　　　　（終）

$$a_n=f_{n+1,n+1}$$

であることから

$$\begin{aligned}a_n&=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}\\&=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\end{aligned}$$

を得る.

謝辞　日頃より御指導いただく，本学，清水留三郎助教授に深く感謝致します.

参考文献

1) Knuth, D. E.: Fundamental Algorithms, Addison-Wesley, 2-nd edition pp. 234-239 (1973).
2) 野崎昭弘：計算数学セミナー，日本評論社，東京，pp. 73-79 (1976).

（昭和54年３月８日受付）
（昭和54年６月21日採録）