4D-01

表面張力による液滴の変形と双対多面体の関係について

笠　晃一
福岡工業大学 情報工学部

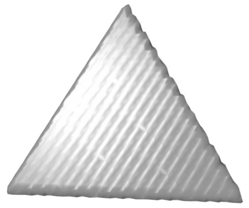
1．はじめに

流体力学の分野で液滴振動という現象が知られている．これは，無重力空間内に置かれた水滴などの液滴が表面張力により変形し，液滴の形が振動するというものである．２次元における液滴振動の研究が多いが，３次元における液滴振動についても調査されており，数値シミュレーションも実施されている [1]．しかしながら，これらの研究は液滴の幾何学的形状に焦点を当てたものではなく，解析的な研究は液滴振動の周期や振幅を求めるために，また数値シミュレーションは表面張力が正しく計算されているかどうかを検査するために実施されている．

液滴振動を幾何学的な視点から観察すると新しい知見が得られる可能性がある．たとえば，数値シミュレーションによれば，２次元における正方形の液滴は近似的に元の正方形を 45° 回転させた形状へと変形し，その後ほぼ元の正方形の形状へと復帰する [2]．つまり近似的にではあるが，正方形から別の正方形へと変形し，その後元の正方形に戻る．３次元の場合には，さらに興味深い現象が生ずる．これも数値シミュレーションの一例であるが，立方体の形状の液滴は近似的に正８面体の形状へと変形し，その後またほぼ元の立方体の形状へと戻る [1]．すなわち，この場合には液滴は立方体と正８面体の間を振動することになる．ところで，幾何学的な観点からすると立方体と正８面体は互いに双対関係にある．つまり，一方が他方の双対多面体になっている．ここに，双対多面体とは，簡単に言えば多面体の面と頂点を入れ替えたときにできる多面体のことである．

我々は，この双対性に興味を持ち，正多面体や半正多面体を初期値として持つ液滴の表面張力による変形について数値シミュレーションを実施した．つまり，正多面体や半正多面体も双対多面体を持っているが，液滴がこれらの双対多面体へと変形するかどうかの調査を行った．なお，数値シミュレーションには VOF 法を使用した．これは空間を小さいセルに分割して，各セルにおける液体の割合を０から１までの数値を用いて表し，セルの面を通過する液体の量を計算することで，液体表面の時間発展を求めるというものである．VOF 法は液体の体積が保存されるという特長を持っており，計算の進行に伴い液体の体積が減少するということはない．これに対し，空間を格子で分割し各格子点における液体の割合を計算するという手法もあり，こちらは液体の体積の保存が保証されないが，マーチングキューブ法などの可視化手法が用意されており，コンピュータグラフィックスで使用しやすいという特長がある．しかし，VOF 値で表された液体表面の可視化手法についてはほとんど研究がなされておらず，マーチングキューブ法を代用しているのが実情である．本研究ではこの点も考慮し，VOF 値で表現された液体表面を可視化するための手法も提案している．

The relation between deformation of liquid drops and dual polyhedrons
Koichi Ryu
Fukuoka Institute of Technology


(a) マーチングキューブ法のみによる表示

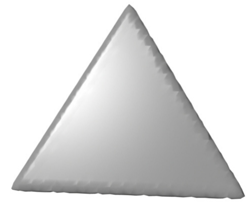

(b) 提案手法による表示

図１　正四面体の液滴に対するレンダリング結果

2．VOF 値の可視化

VOF 値に対しマーチングキューブ法を用いたときの問題点の一つは，平面で構成される液滴に筋状の模様が発生するというものである．図 1(a) に正四面体の形状の液滴に対するレンダリング結果を示す．この問題に対する対応策の一つとして，VOF 法における液面の再構築を利用することが考えられる．

VOF 法では VOF 値，すなわち各セルにおける液体の割合を使用して液面の再構築を行う．液面の再構築には PLIC と呼ばれる手法が使用されることが多いが，これは液面を平面によって近似するというものである．すなわち，VOF 値を用いて勾配ベクトルを計算し，この勾配を単位ベクトル化して平面の法線として使用する．また，VOF 値自身により平面の位置を決定する．これを各セルごとに実行するため，再構築された液面は一般的に不連続な面となり，このままではコンピュータグラフィックスに使用することは不可能である．

そこで，平面の位置として平均値を使用することを考える．ただし，格子点の近傍の法線の標準偏差が大きいときには VOF 値を使用して液面を生成することにする．このようなハイブリッド的な手法を用いるのは，法線の標準偏差が大きいと再構築面を使用する方法では表面に凹凸が発生するためである．以上のことから，次のようなアルゴリズムを使用して液面の生成を試みた．

（1）格子点を 1 つ選択し，この格子点に隣接する $2\times2\times2$ 個のセルの中に液面を含むセル，つまり $0 < \mathrm{VOF} < 1$ を満足するセルがあるかどうか検査する．

（2）もしあれば，その格子点を中心とする $4\times4\times4$ 個のセルについて，再構築面を持つセルに対し再構築面の法線の標準偏差を計算する．

（3）標準偏差がある一定値 σ_t 以下であれば，この格子点に隣接する $2\times2\times2$ 個のセルのうち再構築面を持つセルに対して再構築面から格子点までの符号付き距離を計算し，その平均値を格子点に与える．さもなければ，格子点に隣接するセルの VOF 値の平均を求め，符号付き距離との整合性を取るために一次式によるスケーリングを実施した上で格子点の値とする．

（4）上の処理をすべての格子点に対して実行してから，マーチングキューブ法より液面を生成する．

このアルゴリズムを正四面体の形状の液滴に対して適用した結果を図 1(b) に示す．筋状の模様は発生していないことが確認できる．

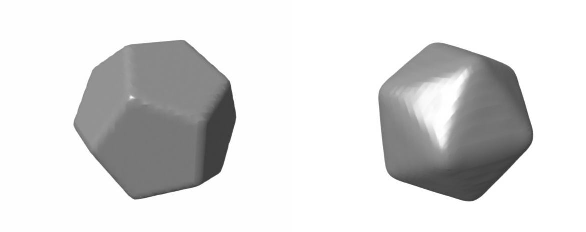
3．正多面体と半正多面体の液滴振動

多面体のうちすべての面が正多角形で，しかも頂点の形状がすべて合同なものを一様多面体というが，このうち凸で正多面体でないものを半正多面体という．半正多面体は全部で 13 種類ある [3].

多面体に対し，辺で接する面の重心同士を線分で結んだときにできる多面体をこの多面体の双対多面体という．正多面体の双対多面体は正多面体になる．一方，半正多面体の双対多面体はアルキメデス双対と呼ばれるが，これは本来の双対多面体ではなく，そのアルキメデス双対の面の中心を結んだとき，元の半正多面体になるような多面体のことである．

我々は正多面体と半正多面体およびアルキメデス双対のすべてについて，この形状を持つ液滴を作成し，表面張力による形状の変化を観察した．正十二面体の場合の例を図 2 に示す．その結果次のようなことが分かった．

（1）程度の差はあるが，ほぼすべての多面体について双対多面体への近似的な遷移が観察された．近似的というのは，遷移後の双対多面体の辺



(a) 正十二面体の初期値　(b) 変形後の正二十面体

図 2　正多面体の表面張力による変形の例

が鋭いエッジにならないという意味である．つまり，双対多面体の隣り合う面はなめらかな曲面により接続されていた．

（2）特に半正多面体の場合，アルキメデス双対は本来の双対ではないが，アルキメデス双対への遷移を確認することができた．

（3）頂点の立体角が小さい多面体では，双対多面体の頂点付近が丸みを帯びていた．これは，多面体の頂点の立体角が小さいと，双対多面体の頂点の立体角も小さくなり，さらに双対多面体の辺が丸みを帯びるのが原因と考えられる．

（4）頂点の立体角が大きい多面体では，隣り合う面の境界が不明瞭になることが多い．頂点の立体角が大きいと，双対多面体の立体角も大きくなり，２つの面がなす角度が 180°に近くなる．これに加えて双対多面体の辺は丸みを帯びるため，辺が不明瞭になるのだと考えられる．

4．おわりに

VOF 値を可視化する試みと，これを使用した正多面体などの形を持つ液滴の振動のシミュレーションについて述べた．

液滴振動では，変形前の多面体の頂点の立体角が小さくても大きくても結果として得られる双対多面体の精度が悪くなる．原因はともに遷移後の双対多面体の辺が鋭いエッジにならないからであるが，これが数値シミュレーションの際の空間の分割精度が不足しているためか，それとも液滴の持つ本来の性質のためなのかはさらなる調査が必要である．

参考文献

[1] 松本昌明, 棚橋隆彦 : 表面張力対流の数値解析 , 日本計算工学会論文集 , Vol.2001(2001), 論文番号 20010031.

[2] J. U. Brackbill, D. B. Kothe and C. Zemach : A Continuum Method for Modeling Surface Tension, Journal of Computational Physics, Vol.100, pp.335-354 (1992).

[3] 一松信：正多面体を解く，東海大学出版会 (1983).