Halley 法による複素数の累乗根の計算について†

佐藤　幸平††

König は Newton 法を一般化して，代数方程式の単根に常に $N(\geqq 2)$ 次収束する反復公式を与えているが，反復の1ステップの所要時間を考慮すると，$N=3$ の場合すなわち Halley 法だけが実用に耐え，方程式の次数が4以上ならば Newton 法より平均1～5% 速く計算できる．特殊な方程式に対しては $N=5, 7$ でも Newton 法より速いことがあるが Halley 法には及ばない．また方程式 $x^n-a=0$ に対する Halley 法は，特に計算が速く，Newton 法の 1.19倍以上，平均1.58倍ていどの速度を有するだけでなく，最終的に収束する数列を（初めの数項の観察結果から）誤って非収束と判断してしまう機会が Newton 法より遥かに少ない利点がある．

1. まえがき

筆者はさきに本誌上で複素数の累乗根および逆数を求める有理反復法について論じ，その中で，Newton 法と比べて実用的に勝るのは3次収束の Halley 法だけで，後者は前者の約 1.06 倍の計算速度を有するという意味のことを述べた[7]．ところが実際に電子計算機で実験すると，Halley 法は Newton 法の約1.5倍の平均速度を有するのみならず，5次収束の反復法も Newton 法よりは速い平均速度を有することが知られた．この食い違いは，複素数の除算には乗算の約2倍の計算時間を要することを先の議論では無視していたためと考え，その点を修正して評価し直すと，ほぼ実験どおりの結果が得られた．ここにその訂正結果を記すとともに，前稿で割愛した数値例と大域的考察を付記する．

2. 反復法の一般論と König の公式

「関数 φ による反復法」すなわち“$z_{n+1}=\varphi(z_n)$ ただし n は自然数”で表わされる操作を $It[\varphi]$ と略記する．φ の不動点 x に収束するような $It[\varphi]$ の出発点全体の集合の開核を $U(x)$，$U(x)$ の成分を x に至る**収束領域**と呼ぶ．$U(x)\neq\emptyset$ のとき，x に至る収束領域のうち x に接触するものを $D_0(x)$ と記して**直接収束領域**と呼ぶ[4]．$D_0(x)$ 以外の収束領域を**間接収束領域**と呼ぶ．$x\in D_0(x)$ のとき x を φ の**安定不動点**，安定不動点でない φ の不動点を φ の**不安定不動点**と呼ぶ[6]．

φ が2次以上の複素有理関数ならば，φ の不安定不動点が存在し，$U(x)\neq\emptyset$ となる x が何個存在しても $\partial U(x)=E'$ は x によらず，E' 上にはすべての不安定不動点に至る $It[\varphi]$ の出発点が至る所稠密に含まれることが知られている[4]．

有理方程式 $f(z)=0$ の根 x は，König の式

$$\varphi(N, z)=z+(N-1)\left(\frac{1}{f(z)}\right)^{(N-2)}\Big/\left(\frac{1}{f(z)}\right)^{(N-1)} \tag{1}$$

$(N\geqq 2)$ の安定不動点で，x が単根ならば $It[\varphi]$ は x の近くで N 次収束，重根ならば1次収束する[3]．

$It[\varphi(2, z)]$ は Newton 法，$It[\varphi(3, z)]$ は Halley 法と呼ばれる．f が n 次整式のとき，$\varphi(N, z)$ の次数は $Nn/2$ 以上 $Nn-N-n+2$ 以下である．

3. 累乗根および逆数を求める反復法

特に $f(z)=z^n-a$ $(a\neq 0)$ の場合の $\varphi(N, z)$ を $\Phi(n, N, z)$ と書くことにすれば，

$$\Phi(n, 2, z)=\frac{(n-1)z^n+a}{nz^{n-1}} \tag{2}$$

$$\Phi(n, 3, z)=\frac{(n-1)z^n+(n+1)a}{(n+1)z^n+(n-1)a}\cdot z \tag{3}$$

$$\Phi(n, 4, z)=\frac{z[(n^2-1)z^{2n}+2(2n^2+1)az^n+(n^2-1)a^2]}{(n+1)(n-1)z^{2n}+4(n^2-1)az^n+(n-1)(n-2)a^2} \tag{4}$$

等となる．一般に $n=2$ ならば Φ は N 次関数であり，$3\leqq N\leqq n+1$ ならば $n(N-2)+1$ 次関数である．

a が正実数のとき，実軸の右半分は $It[\Phi]$ における $D_0(\sqrt[n]{a})$ に含まれる（第5節参照）．N が大きければ，出発点が D_0 内にある限り少々目的地から離れていても $It[\Phi]$ は急速に $a^{1/n}$ に収束する（**表1**参照）．

† On Halley's Iteration Applied to the Calculation of Radicals of a Complex Number by Kohei Sato (Department of Mathematical Engineering and Instrumentation Physics, Faculty of Engineering, The University of Tokyo).

†† 東京大学工学部計数工学科

表 1 König の式より得られる，$\sqrt{a}$ に N 次収束する反復法 $It[\Phi(a, N, z)]$ の計算例

Table 1 Examples of iteration by $\Phi(2, N, z)$ derived from König's formula, The iteration converges to the square root of a positive constant a (here, $a=2$) so far as the real part of z is positive.

k	$\Phi^k(2, 2, 10)$	$\Phi^k(2, 3, 10)$	$\Phi^k(2, 4, 10)$	$\Phi^k(2, 5, 10)$
0	10.	10.	10.	10.
1	5.1	3.5099338	2.7460384	2.3113607
2	2.7460784	1.6504752	1.4442381	1.4165057
3	1.7371988	1.4155100	1.4142136	1.4142236
4	1.4442381	1.4142136	1.4142136	1.4142136
5	1.4145217	1.4142136		
6	1.4142136			
7	1.4142136			

一方 $f(z)=1/z-a$ ($a\neq 0$) に対する $\varphi(N, z)$ を $\psi(a, N, z)$ と書くことにすれば

$$\psi(a, N, z)=z\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k\binom{N}{k+1}(az)^k \qquad (5)$$

である．この整式の安定不動点は $1/a$ と ∞ で，原点と $2/a$ とを結ぶ線分を直径とする円の内側が $It[\psi]$ における $U(1/a)=D_0(1/a)$，外側が $U(\infty)=D_0(\infty)$ となる[7]．このように U がただ1個の領域より成るとき，U を**完全収束領域**と呼ぶ[4]．完全収束領域の他の例は $n=2$ に対する $It[\Phi]$ の，2個の安定不動点 $\pm\sqrt{a}$ を結ぶ線分の垂直2等分線で境された両半面である[7]．

4. 計算能率の比較

König の式による反復法は，N を大きく取るならば方程式の単根の近傍から出発する限り，きわめて急速に収束するが，例えば f が n 次整式の時，1ステップの計算が通常 $Nn+O(n^2)$ 個の乗算を含むことを考えると，実用的に有利とはいえない．$N=2$ の場合すなわち Newton 法と比べれば，同程度の精度改良に要するステップ数は平均 $1/\log_2 N$ だから，$2\log_2 N>N$ でなければ，Newton 法の方がまし，ということになる．この不等式は $N=3$ の場合すなわち Halley 法に対してのみ満足される．

n 次方程式に対する Newton 法と Halley 法をもう少し詳しく比較してみる．$\varphi(2, z)$ は最悪の場合，$2n-3$ 個の乗算と1個の除算を含み，$\varphi(3, z)$ は最悪の場合 $3n-3$ 個の乗算と1個の除算を含む．したがっていま除算1回の計算時間が乗算2回に等しいと仮定するならば Halley 法と Newton 法の計算速度比は平均

表 2 n 次方程式に対する Halley 法と Newton 法とのの計算速度比．$r(n)$ は最悪の場合，$\tilde{r}(n)$ は n 乗根計算の場合の理論的計算速度比，$L(n)$ は n 乗の計算に要する最小乗算数を表わす

Table 2 Theoretical evaluation of the speed of Halley's method relative to that of Newton's method. We have $r(n)$ in the worst case and $\tilde{r}(n)$ in the binomial case. $L(n)$ means the least number of multiplications necessary to obtain z^n from z. (Cf. formulae (6)(7).)

degree n	$r(n)$	$L(n)$	$\tilde{r}(n)$
2	0.95058	1	1.18872
3	0.99060	2	1.26797
4	1.00861	2	1.58496
5	1.01890	3	1.32080
6	1.02556	3	1.58496
7	1.03023	4	1.35854
8	1.03367	3	1.84912
9	1.03632	4	1.35853
10	1.03842	4	1.58496
∞	1.05664	∞	1.58496

$$r(n)=\frac{(2n-1)\log_2 3}{3n-1} \qquad (6)$$

となる．**表2**に示すように r は，$n=2, 3$ で僅かに1より小，$n=4$ で微かに1より大で，以下徐々に増大して $r(\infty)=1.05664$ に近づいて行く，すなわち3次以下の方程式なら Newton 法で結構，4次より高次の方程式なら Halley 法の方がやや有利ということになる．

以上は最悪の場合どうしの比較であって，特殊な形の f に対しては計算速度比がことなることがある．例えば $It[\Phi(2, N, z)]$ に対して同様の比較を行うと，$N=3$ の場合を筆頭に $N=5, 7$ でも Newton 法よりは良いことが知られる（**表3**参照）．一方，$It[\psi]$ では Halley 法だけが Newton 法より常に速く，理論的速度比は（6）の漸近値 1.05664 に等しい[7]．

実用的な観点から注目に値するのは $It[\Phi(n, 3, z)]$

表 3 König の式による，平方根に N 次収束する反復法と，Newton 法との理論的計算速度比

Table 3 Theoretical evaluation of the average speed of calculation by the iteration of König's formula (1) applied to the case $f(z)=z^2-a$, relative to the speed of Newton's method.

N	speed	N	speed
3	1.1887	7	1.0528
4	1.0000	8	0.9000
5	1.1610	9	0.9510
6	0.9694	$\geqq 10$	<1.0000

の計算速度である．n 乗の計算に必要な最小乗算数を $L(n)$ とすれば，平均計算速度は Newton 法の

$$\bar{r}(n)=\frac{[L(n-1)+3]\log_2 3}{L(n)+3} \qquad (7)$$

倍となる．表2に示すように $\bar{r}(n)$ は $n=2$ に対する 1.1887 より小さくならず，大きな n に対しては漸近値 $\log_2 3=1.58496$ の付近を振動する．

5. 大域的考察

有理反復法が複数個の安定不動点を有するとき，各安定不動点に至る収束範囲の境界（先述の E'）の形状は一般に複雑な非解析曲線であり，$It[\Phi(2, N, z)]$ や $It[\phi]$ のように簡単なのは例外中の例外に属する[4)~6)]．高次方程式に対する Newton 法・Halley 法のごとく安定不動点が3個以上存在すれば，E' 上の各点の近傍に無数の閉曲線が含まれ，主な収束領域の概形を実験的に追跡するだけでも相当な手数を要する[5),6)]．しかしとにかく何らかの方法で，同じ方程式に対する幾通りかの反復解法の E' の概形が知れれば，それらの優劣を計算速度以外の面で比較することが可能となる．

一般に，方程式の根以外の不動点に至る収束領域はないに越したことはなく，あっても狭いほうがよい．また特に根の付近では，間接収束領域の面積が相対的に小さい反復法の方が優れている．間接収束領域から出発した反復法は，理論的には収束しても実際計算上では非収束とみなされる確率が高いからである．

例として同じ方程式 $z^n-a=0$ $(a\neq 0,\ n\geqq 3)$ に対する Newton 法 $It[\Phi(n, 2, z)]$ と Halley 法 $It[\Phi(n, 3, z)]$ の大域的性質を比較する．この両者とも，$a^{1/n}$ 以外の不動点に至る収束領域が存在しないことは容易に確かめられる．一方，E' の概形を実験的に描いて比較すると，Newton 法が原点の付近に大面積の間接収束領域を有するのに対し，Halley 法は原点の付近で間接収束領域の面積が非常に狭く，この対照は n が大きいほど著しくなることが認められる（**図1**参照）．

したがって前述の理由により，高次の累乗根の計算に対する Halley 法は，大域的な性質でも Newton 法より実用的に優れていると結論してよい．

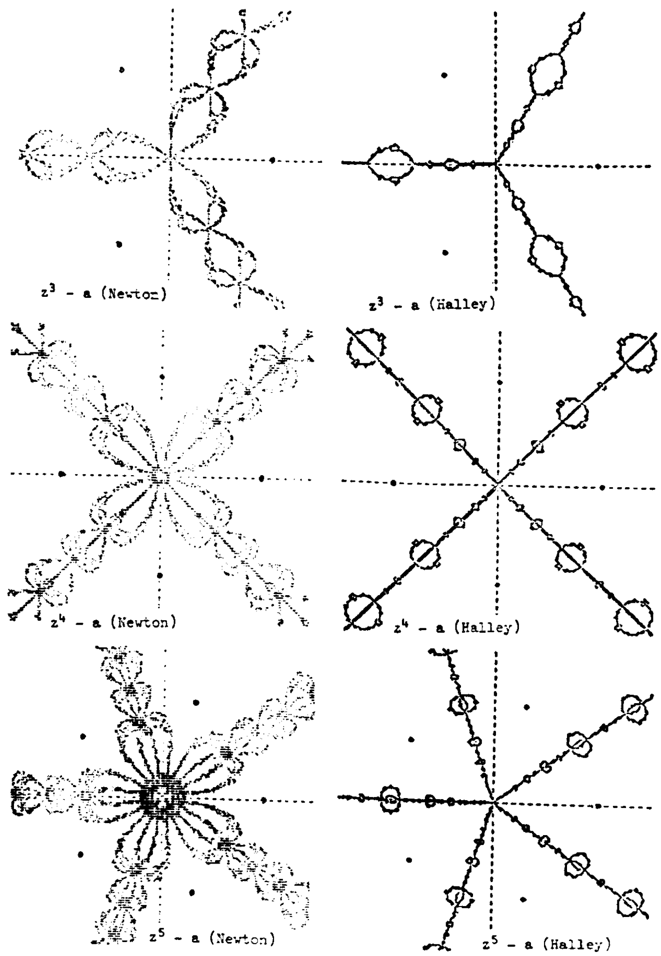

図 1 $z^n-a(a>0)$ の零点を計算する Newton 法と Halley 法の収束領域の比較．零点（n 個の孤立黒点で示されている）を含まない収束領域の相対的な面積は，Halley 法の方が少ないことは，実際計算においても有利と考えられる．

Fig. 1 Convergence regions of Newton's and Halley's methods applied to the calculation of zeros of z^n-a. Zeros are expressed by n dots. Halley's method is preferred because convergence regions without any zero in them occupy less area.

6. あとがき

Halley 法は Newton 法に次いで古い歴史をもつ反復法であるにもかかわらず，意外なほど一般に知られていないが，少なくとも累乗根の計算に関する限り，使われる機会がもっとあっても良いと思う．紙数の都合のため計算速度比の実験結果は省略したが，プログラムは全く簡単で，初歩の演習問題として好適のものである．筆者は東大大型計算センター設置の HITAC システムと手持ちのマイコン TRS-80 の双方で行っ

て大体同様の結果を得た．今後は累乗根以外の代数方程式に対しても大域的性質の比較を行ってみたい．

参 考 文 献

1) Newton, I.: De Analysi per aequationes numero terminoum infinites (1669?), The Mathematical Papers of Isaac Newten, Vol. II. pp. 206-247, Cambridge University Press (1968).
2) Halley, E: Methodus nova, accurata et facilisi …, Phil. Trans, Roy. Soc. London, 18, pp. 136-148 (1694).
3) König, J.: Ein allgemeinen Ausdruck……, Mathematische Annalen, 9, pp. 530-540 (1876).
4) Julia, G.: Mémoires sur l'itérations des fonctions rationelles, Journ. de Math. Pures Appl., 7e série, IV, 1, pp. 2-245 (1918).
5) Sato, K.: Equivalence Class and Invariant Figures…, Memoirs of Numer. Math., No. 5, pp. 1-32 (1978).
6) 佐藤：1変数複素有理反復法の収束範囲の形状について，情報処理，Vol. 19, No. 8, pp. 722-729 (1978).
7) 佐藤：複素数の累乗根および逆数を求める反復法について，情報処理学会論文誌，Vol. 20, No. 1, pp. 91-93 (1979).

(昭和54年11月26日受付)
(昭和55年2月8日採録)