ショートノート

増山氏の組合せ問題について†

一 松 信††

λ を正の整数（$\geqq 2$），$p=3\lambda-1$ とする．増山元三郎[1]は $\{1,\cdots,p-1\}$ をそれぞれ λ, λ, $\lambda-2$ 個からなる集合 A, B, C に分割し，$A\cup(A-C)=B-^{*}B$ であるようにせよ，という組合せ問題を提出した．ここに $X-Y$ は，すべての $x\in X$, $y\in Y$ の対に対する合計 $\sharp(X)\cdot\sharp(Y)$ 個の要素 $x-y(\mathrm{mod}\ p)$ からなる多重集合であり，$-^{*}$ は $x\neq y$ である対に限ることを意味する．計算機による全数探索により[2]，$\lambda=4$ の場合，これが不可能なことが知られていた．ここでは $\lambda=5$, 6, 7 の場合にやはり不可能なことを報告する．

1. 問題とこれまでの経過

問題は要旨中に述べたが，厳密に定式化する．

正の整数 n に対して $\boldsymbol{N}_n=\{1,2,\cdots,n\}$ とおく．$\lambda\geqq 2$, $p=3\lambda-1$ として，

（1） $\boldsymbol{N}_{p-1}=A\cup B\cup C$, $A=\{a_1,\cdots,a_\lambda\}$

$B=\{b_1,\cdots,b_\lambda\}$, $C=\{c_1,\cdots,c_{\lambda-2}\}$

と分割する．ともに $\lambda(\lambda-1)$ 個の要素からなる集合

（2） $P=\boldsymbol{N}_\lambda\times\{\{0\}\cup\boldsymbol{N}_{\lambda-2}\}$

$Q=\{(i,j)\,|\,i,j\in\boldsymbol{N}_\lambda;\ i\neq j\}$

を作り，写像 $f:P\to\boldsymbol{N}_{p-1}$, $g:Q\to\boldsymbol{N}_{p-1}$ を次のように定義する：

（3） $f(i,0)=a_i$, $f(i,j)=a_i-a_j(\mathrm{mod}\ p)$

$(i=1,\ \cdots,\ \lambda;\ j=1,\ \cdots,\ \lambda-2)$

$g(i,j)=b_j-b_i(\mathrm{mod}\ p)(i,j=1,\cdots,\lambda;\ i\neq j)$

ただし $x-y(\mathrm{mod}\ p)$ は，p を法として $x-y$ と合同な代表値を，$\boldsymbol{N}_{p-1}$ 中から選ぶという意味であり，

if $x>y$ **then** $x-y$ **else** $x-y+p$

と同じことである．

さて同一個数の要素からなる集合 P, Q の間の1対1対応 h，詳しくいうと全単射 $h:P\to Q$ を作り，

（4） $f=g\circ h$

であるようにできるか？ これが要旨中に述べた

（5） $A\cup(A-C)=B-^{*}B$

という式の厳密な意味である．具体的な解釈としては，写像 f, g を，その像を並べた多重集合（同一の値の要素があってもまとめない）で表現し，適当に並べかえて全体として同一になるかを問うものである．

これは元来は直交配列を構成する問題から派生したものであり[1]，その場合には p が素数でなければならない．しかし上述のような純粋の組合せ問題とすれば，λ が奇数のときにも意味がある．

$\lambda=2$ の場合は，ただちに

$A=\{1,4\}$, $B=\{2,3\}$, $C=\phi$

およびここで A, B を交換したもの，という2組の解のみが存在することがわかる．$\lambda=3$ の場合は，全数検査も容易だが，理論的な考察によっても，全体で次の4組の解があることが簡単にわかる．

$A=\{1,2,7\}$, $B=\{3,5,6\}$, $C=\{4\}$

$A=\{1,6,7\}$, $B=\{2,3,5\}$, $C=\{4\}$

および上記でそれぞれ A, B を交換した2組．

増山元三郎[1]は，$\lambda=4$ の場合を問題にした．うまい理論的考察がきかず，3,150 通りの全数検査が当時の計算機での手頃な演習問題だった．4グループが独立に探索し[2]，解がないことが確かめられた．当時の計算機では，$\lambda=6$（全数 1,681,680 通り）の探索は不可能に近かったが，筆者は最近勤務先に導入された DECSYSTEM-2020 により，$\lambda=4$ の再検討のほか，$\lambda=5$, 6, 7 の場合にも解がないことを確かめた．

2. プログラムの工夫

著者のプログラムは，素朴な検査だが，1つだけ次の工夫（論文[2]の一部で使用済）を加えた．

定理 A, B, C の要素の和をそれぞれ a, b, c とする．もし条件がみたされれば，次の必要条件が成立する：

（6） $2a+c\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)$

（7） $2b+c\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)$

証明 $B-^{*}B$ の要素は，p を法とした b_j-b_i と b_i-b_j の対からなり，この両者の代表数の和は p だ

† On a Combinatorial Problem of Masuyama by SIN HITOTUMATU (Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University).

†† 京都大学数理解析研究所

から，要素全体の和は p の倍数となる．ゆえに

$$\sum_i a_i+\sum_{i,j}(a_i-c_j)=(\lambda-1)a-\lambda C$$

も p の倍数である．これを3倍し，$p=3\lambda-1$ に注意すれば，(6)をうる．他方

$$a+b+c=1+\cdots+(p-1)=p(p-1)/2$$

だから，$2a+2b+2c=p(p-1)$ は p の倍数である．これと (6) を組合せて (7) をうる(証明終り)．

そこで N_{p-1} からまず λ 個の組合せ A を作り，(6)をみたす c を求める．残りから $\lambda-3$ 個の組合せ $(c_1, \cdots, c_{\lambda-3})$ を作り，全体の和が c になるように $c_{\lambda-2}$ を定めて，$C=\{c_1,\cdots,c_{\lambda-2}\}$ とおく，$c_{\lambda-2}$ が A の要素と重複したり，0になったり，c の要素の大小の順序がそろわなければ，それを捨てて次の $\{c_1, \cdots, c_{\lambda-3}\}$ に進む．

組合せの生成は普通の方法による[3]．毎回可能な限り，a_λ を1つ増す．$a_\lambda=p-1$ に達していたら

$$a_j=p-1-\lambda+j\ (j=i+1,\cdots,\lambda)$$
$$a_i<p-1-\lambda+i$$

である i を探し，a_i を1つ増し，以下順次

(8)　$a_j=a_{j-1}+1\ (j=i+1,\cdots,\lambda)$

とおく．最初のセットは $a_i=i\ (i=1,\cdots,\lambda)$ だが，これも $i=1$，$a_1=0$ として，(8) を利用した．もし $i=0$ となったら完了だが，確認のために $i=1$ (または指定した値)になるごとに，探索完了の出力をした．

多重集合同志の比較は次のようにした：

I (最初の方法)　$A\cup(A-C)$. $B-{}^*B$ の各要素を小さい方からソートして，比較する．

II (改良法)　長さ $p-1$ の配列を用意する．最初は0とする．$x\in A\cup(A-C)$ については，x 番目に1を加え，$B-{}^*B$ の要素に対しては1を減ずる．最後にこの配列の全要素の絶対値を集計する．

III (最後の方法)　II と同一であるが，B を先に作れば，$B-{}^*B$ は C に依存しないので，$B-{}^*B$ に対する記録を固定し，C, A を作って比較する．

なお $\lambda=7$ に対しては，全体の検査を一度に実行するのが困難だったので，B の最初の数個 $b_1, \cdots, b_\mu$ $(\mu\leqq4)$ を入力し，その部分を固定して，一回の探索を，B について約千種以下に限るよう分割した．

3. 結　果

$\lambda=4$, 5, 6, 7 のいずれについても解はなかった．$\lambda>3$ に対しては，解が存在しないと予想される．

I と III との速度改善比較を**表1**に示す．**表2**は確認のため，IIIの方式により最後に残った差の絶対値の和 S がある限界以下の組合せを出力させ，S の値が最小である組の個数を数えたものである．

表 1　大体の所要時間

Table 1　At proximate computing time.

λ	I の方式	III の方式 (解がないことのみ)
4	10 秒	2 秒
5	55 秒	15 秒
6	10 分	2.5 分

表 2　S 最小の組の調査

Table 2　Survey of the classes with minimum S.

λ	S の最小	その組数	所要時間*
4	4	28	10 秒
5	6	616	1 分
6	6	1,391	6 分
7	4	226	90 分

* 所要時間は印刷も含む CPU 時間総計の概略値である．表1も同様，実際の経過時間は，この数倍を要する．

表 3　$\lambda=4$ の全数検査

Table 3　Total survey for $\lambda=4$.

S	2	4	6	8	10	12	14	16	≧18	合計
組数	300	480	1,260	690	300	90	0	30	0	3,150

表3は付加条件 (6), (7) を除き，$\lambda=4$ の場合の全組合せ 3,150 通りについて，和 S の値による分類を求めたものである．$S=2$ という一字違いの組合せの一例は，$A=\{1,5,6,8\}$，$B=\{3,4,7,9\}$，$C=\{2,10\}$ である．

$\lambda=8$ の場合は，全数検査はしていないが，数千組の予備テストにより，S の最小値は6であって，$S=0$ である解はやはり存在しないと予想している．

4. む す び

結果的には，20 年間の計算機の進歩の比較に留まったが，算法の改良の重要性を痛感した．

参 考 文 献

1) 増山元三郎：巡回差集合による直交配列表の生成，数理科学総合研究班第4班第3分科会，第2回資料 (1959).
2) 池野信一他：巡回差集合による直交配列表の生成に関する問題について，第1回プログラミング・シンポジウム報告集，pp. 203-220 (1960).
3) Knuth, D. E.: The art of programming, Vol. 1, Wiley, 1969, 改訂版 1977；日本語訳1，基本算法，サイエンス社 (1976).

(昭和 55 年 1 月 10 日受付)
(昭和 55 年 9 月 18 日採録)