5M-02

分類写像によって定義される魔方陣の部分集合の数え上げについて

山田穂高 † 山本修身 ‡
名城大学理工学研究科情報工学専攻 † 名城大学理工学部情報工学科 ‡

1 はじめに

本稿では $n \times n$ の魔方陣 [1]（これを n 次の魔方陣と呼ぶ）の個数の数え上げについて考える．5 次までの魔方陣の個数は，1 桁目まで正確に数え上げられている．6〜20 次の魔方陣については，正確な個数は知られていないが，誤差 1% 以内で求められている．概数についてはマルコフ連鎖モンテカルロ法を用いて計算されている [2] [3]．本稿では，6 次の魔方陣の厳密な個数の数え上げを目指して，効率的な n 次の魔方陣の数え上げ手法について考える．

特に，並列的に数え上げること，および，探索範囲を削減することを念頭に，探索範囲を分割することを考える．本稿では分割方法として魔方陣の集合から適当な集合への写像，分類写像を考えた．

分類写像を用いることにより，事前に探索範囲をまとめ，確実に魔方陣が存在しない部分を削除することができ，探索範囲を大きく減らすことができた．また，6 次の魔方陣についても，バックトラックでの数え上げでは数日動かしても 1 つも見つけられなかったが，7 つ以上の整数を固定する分類写像の像の内，魔方陣を含むと判明している像に対して同じプログラムで数え上げを行ったところ，像の特徴を持つ魔方陣を数時間で数えきることができた．

しかし，像の個数や 1 つの像の計算に要する時間が大きいことから，総数をすべて計算することは今のところできていない．

2 魔方陣の定義

まず本節では，魔方陣を以下のように定義し，その基本的性質について述べる．

定義 1 n 次の魔方陣とは，1 から n^2 の整数を $n \times n$ の格子状に並べたもののうち，それぞれの行，列，対角線についての整数の和がすべて等しい配置のことである．

このとき，以下の性質が成り立つ．

性質 1 n 次魔方陣に対して，

(1) 各列，行，対角線上の要素の和は，$n(n^2+1)/2$ となる．
(2) ある配置から，90° 回転，および，反転させた配置は，元の配置を含め 8 つ存在し，常に異なる配置となる．
(3) ある配置から，中心から対となる行同士，および列同士を同時に入れ替えた配置は，魔方陣の性質を保持する．

ここで，性質 1-(1) の和のことを魔法和，性質 1-(2) の配置のことを対称形，性質 1-(2) と性質 1-(3) によって得られる異なる配置のことを共役と呼ぶ．性質 1-(3) の操作を図 1 に示した．行，列について合計が魔法和を維持しているのは明らかであり，対角線についても行と列を同時に入れ替えることによって，魔法和を維持できていることがわかる．

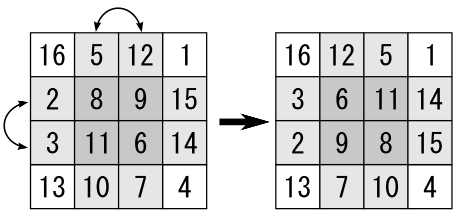

図 1 性質 1-(3) の一例

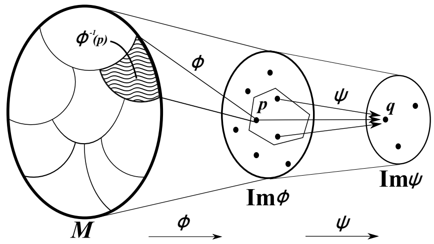

図 2 分類写像のイメージ

魔方陣の個数を言う場合，一般的に対称形を同じ 1 つの魔方陣として扱うが，本稿では対称形をそれぞれ別の魔方陣として区別する．また，性質 1-(3) については n によって入れ替えられる列の個数が異なり，かつ，操作によって同じ配置になることもある．さらに，性質 1-(2) と性質 1-(3) 間でも同じ配置があるため，共役の個数は単純な計算で求めることはできない．表 1 に各次数の魔方陣に対する共役の個数を示した．この表から $k = 1, 2, \ldots$ のとき，次数 $2k$ と $2k+1$ において共役が同じ個数であることがわかる．

3 分類写像

分類写像は魔方陣を分類するために用いる写像のことである．分類写像を用いた場合，魔方陣の総数 X は以下の式で求められる．

$$X = \sum_{p \in \mathrm{Im}\phi} |\phi^{-1}(p)| \tag{1}$$

ここで，ϕ は分類写像，p は ϕ による像を表す．つまり，あらかじめ p を全て求めておけば，式 (1) を用いることで魔方陣の総和を求めることができる．図 2 は分類写像のイメージである．

分類写像としてはいくつかのものが考えられるが，本稿では，

表 1 各次数の魔方陣に対する自明な共役の個数．

次数 n	2	3	4	5	6	7	8
自明な共役の個数	8	8	32	32	192	192	1,536

On Enumeration of Subsets of Magic Squares by Classification Mapping
† Hodaka Yamada, Division of Information Engineering, School of Science and Technology, Meijo University
‡ Osami Yamamoto, Department of Information Engineering, Faculty of Science and Technology, Meijo University

16			
			15
			14

図 3　図 1 の左図に分類写像を用いた場合の像

表 2　魔方陣の次数 n と分類写像において固定する整数の個数 m に対する像の個数.

n \ m	1	2	3	4	5
4	2	12	105	1,005	7,110
5	4	34	477	7,911	115,965
6	2	17	302	8,103	239,835

特定の m 個の整数がどのマスに存在するか，によって分類する分類写像に焦点を当てた.

ここで，この分類写像における像 p の求め方を説明する．まず，m 個の整数がどのマスに配置されているか，という分類写像なので，m 個の整数としてどの整数を用いるかを決める必要がある．ここで，整数を配置した際に魔法和を超えた列が存在する場合，その像は魔方陣を 1 つも含まないことは明白であり，数え上げを行う対象から除外することができる．よって，より多くの像を除外できるように，配置する m 個の整数は，n^2 から 1 ずつ減らしたものを使用する．図 3 に図 1 の左の魔方陣に対して，$m = 3$ の分類写像を用いた場合の像を示す.

また，共役は像についても考えることができ，共役関係にある像から数え上げられる魔方陣の個数は等しい．なので，共役の内 1 つの像についてのみ数え上げを行い，共役の個数との積は共役の像全てから数え上げられる魔方陣の個数と等しい．よって，共役関係にある像の内 1 つの像のみを数え上げの対象として，それ以外の像は削除することができる．これを考慮すると，式 (1) は以下のように書き換えられる.

$$X = \sum_{q \in \mathrm{Im}\psi} |\psi^{-1}(q)||\phi^{-1}(p)| \tag{2}$$

ここで，ψ は共役関係の内 1 つを取り出す関数で，q はその取り出された像である．ただし共役の数は，m の値が小さい内は性質 1-(2) と性質 1-(3) の操作を行った際に，同じ配置になる場合が多く，表 1 の値よりも少ない場合がある.

さらに，魔法和を超える列が存在する場合はその像を削除する．魔方陣の次数 n と像に固定する整数の個数 m に対する像の個数を表 2 に示す.

4　分類写像を用いた魔方陣の数え上げ

像は図 3 の様に空マスが残っている形となる．これらの空白に 1 から $n^2 - m$ までの整数を配置していき，定義 1 を満たすものを数え上げていくことで，魔方陣の数え上げを行う.

バックトラックで数え上げを行う場合，全ての行，列，対角線の内，空きマスが少ない列から埋めるように整数を配置していく．なので，像ごとに整数の配置の順序が異なる.

表 3　魔方陣の次数 n と分類写像において固定する整数の個数 m に対する探索範囲の削減率 [%].

m \ n	1	2	3	4	5
4	87.5	95.0	96.9	97.7	98.6
5	84.0	94.3	96.5	97.4	98.2
6	94.4	98.7	99.3	99.4	99.5

表 4　5 次の魔方陣に対して各配置する整数の個数 m による魔方陣を有さない像の個数.

m	1	2	3	4	5
魔方陣を 1 つも含まない像の個数	0	0	15	810	23,400
像全体の個数	4	34	477	7,911	115,965

5　分類写像を用いた効果

共役や魔法和について考慮しない場合，像の個数は ${}_{n^2}P_m$ となる．これと表 2 から，探索範囲の削減率は表 3 のようになる．これは，対称形のみを考える場合の削減率 87.5% よりも大きい．また，m が奇数よりも偶数のときの方が削減率が大きいことから 6 次の魔方陣においてより効果があることもわかる.

実際に，6 次の魔方陣において配置する整数の個数 m を 7 以上とした場合に，魔方陣が存在していると判明している像に対してバックトラックで数え上げを行ったところ，数時間で数えきることができた．このことから，探索範囲内の魔方陣の密度を上げられていることがわかる.

6　まとめと今後の課題

本稿では魔方陣の数え上げの前準備として探索範囲をある条件で分類し，共役や魔法和などで像を削減する方法について考えた．それによって探索範囲を，対称形のみを考える場合よりも多く削減することができ，実際に 6 次の魔方陣に対して，魔方陣がが存在していることが判明している像について，バックトラックにより数時間でその像の特徴を持つ魔方陣を数え上げることができた.

しかし，魔方陣全体を数え上げると考えるといくつか課題が残っている．まず，1 つの像に対して数時間かかっており，6 次の魔方陣において $m = 7$ の場合の像が $196,663,320$ 個があることから，まだ現実的な時間で求めることは難しい.

次に，魔法和だけでは削除しきれていない，魔方陣を有さない像が存在すること．現在数え上げられる最大の次数として 5 次の魔方陣に対して各配置する整数の個数 m について魔方陣を有さない像の個数を表 4 に示した．これについては，現在確率を求め，それに閾値を設けることで振り分ける方法について模索中である.

今後，これらの問題について解決策を考えていく必要がある.

参考文献

[1] Levitin, A. and Levitin, M：*Algorithmic Puzzles*. Oxford University Press，NewYork，2011.

[2] Pinn, K., and Wieczerkowski, C.: Number of magic squares from parallel tempering Monte Carlo. *Int. J. Mod. Phys. C*, vol. 9, Issue 4, pp. 541-546, 1998.

[3] Trump, W.:Number of classic magic squares. www.trump.de/magic-squares/normal.htm,2016.