

正多面体における Magic Graph の構成

杉山 雅英 (会津大学)

1. まえがき グラフに対する整数列の定和配置問題 Magic Graph [1, 2, 3] について本論文では正多面体での構成結果について述べる。

2. Magic Graph と magic sum

Graph はグラフ G の頂点と辺のノードに連続した $1 \sim n$ の数をただ一度だけ配置し各辺毎の数の和が一定になるものであり、その一定値 S を定和 (magic sum) とよぶ。頂点・辺・面・辺に置くノードの数を v, e, f, m とすると用いる数は $n = me + v$ であり、位数とよぶ。 $1 \sim n$ の数字の配置とその定和との組を (L, S) で表す。

グラフ G の頂点 i の次数を d_i , 頂点ノード i に配置する数を x_i , 和を $\tilde{X} = \sum_{i=1}^v (d_i - 1)x_i, X = \sum_{i=1}^v x_i$ とする。定和 S は定和方程式 (1) を満す。

$$e \cdot S = \sum_{i=1}^v (d_i - 1)x_i + \frac{n(n+1)}{2} = \tilde{X} + N. \quad (1)$$

正多面体のグラフ G は regular ($d_i = d$) であるので $\tilde{X} = (d-1)X$ となる。 S の最大・最小は X の最大・最小で与えられることが分かる。表 1 に示すように正多面体は正 4 面、6 面、8 面、12 面、20 面体に限られる。

表 1: 正多面体の頂点、辺、面の個数と次数

正多面体	頂点 (v)	辺 (e)	面 (f)	次数 (d)
4	4	6	4	3
6	8	12	6	3
8	6	12	8	4
12	20	30	12	3
20	12	30	20	5

正多面体に対して Magic Graph が構成できないことを示す以下の性質 1 が得られている。さらに図 1 ~ 5 に示す平面グラフ表示の正多面体 ($m = 2$) の構成例から [4] で述べた漸化的構成法を用いて性質 2 が得られる。

性質 1 Magic Graph の非存在

辺に置くノードの個数を m とする。

1. 正多面体において m が奇数の時、最小・最大配置解は存在しない [4]。
2. 正 4, 12, 20 面体において m が奇数の時、定和配置解は存在しない。

性質 2 Magic Graph の存在

正多面体において m が偶数の時、定和配置解は存在する。特に最小・最大配置解は必ず存在する。

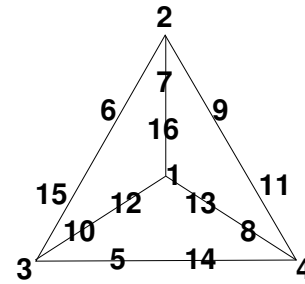


図 1: 正 4 面体の最小定和配置の例 ($n = 16, S_{\min} = 26$)

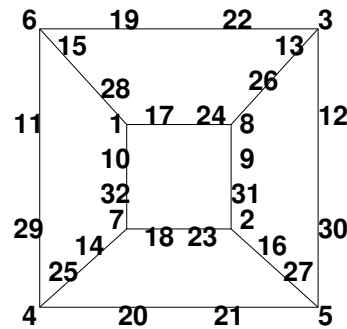


図 2: 正 6 面体の最小配置の例 ($n = 32, S_{\min} = 50$)

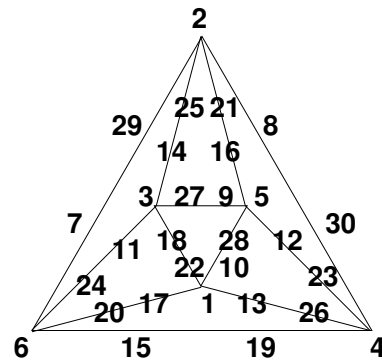


図 3: 正 8 面体の最小配置の例 ($n = 30, S_{\min} = 44$)

正 6, 8 面体において m が奇数の時、定和配置解が存在するかについては未解決である。最小・最大配置解が存在するのは m は偶数に限定されるので $\ell = \frac{m}{2}$ とする。正多面体の最小・最大定和 S_{\min}, S_{\max} は式 (2) で

* Magic Graph Construction in Polyhedrons, M. Sugiyama (The Univ. of Aizu)

与えられ、それらには常に大小関係 (3) が成り立つ。

$$\begin{cases} S_{\min}^{(4)} = 12\ell^2 + 9\ell + 5, & S_{\max}^{(4)} = 12\ell^2 + 25\ell + 5 \\ S_{\min}^{(6)} = 24\ell^2 + 17\ell + 9, & S_{\max}^{(6)} = 24\ell^2 + 49\ell + 9 \\ S_{\min}^{(8)} = 24\ell^2 + 13\ell + 7, & S_{\max}^{(8)} = 24\ell^2 + 49\ell + 7 \\ S_{\min}^{(12)} = 60\ell^2 + 41\ell + 21, & S_{\max}^{(12)} = 60\ell^2 + 121\ell + 21 \\ S_{\min}^{(20)} = 60\ell^2 + 25\ell + 13, & S_{\max}^{(20)} = 60\ell^2 + 121\ell + 13 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} S_{\min}^{(4)} < S_{\min}^{(8)} < S_{\min}^{(6)} < S_{\min}^{(20)} < S_{\min}^{(12)} \\ S_{\max}^{(4)} < S_{\max}^{(8)} < S_{\max}^{(6)} < S_{\max}^{(20)} < S_{\max}^{(12)} \end{cases} \quad (3)$$

3. 正多面体の定和 剰余環 \mathbf{Z}_n 上のアフィン変換 $f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbf{Z}_n$, a と n とは互いに素) を用いて初期定和配置から他の定和配置を生成できる [5]。さらに定和の値は \mathbf{Z}_n のイデアル $d\mathbf{Z}_n$ ($d = (m+2, n)$) による剰余類を用いてクラスタリングされ表2に示すようにクラスタ数 c が決定できる。ここで辺に置くノードの数 $m = 2$ であり、 $\wp(S)$ は式 (4) で与えられる。

$$\wp(S) = \bigcup_{a \perp n} \langle aS \rangle = \bigcup_{a \perp d} \langle aS \rangle = \bigcup_{i=1}^{\varphi(d)} \langle a_i S \rangle \quad (4)$$

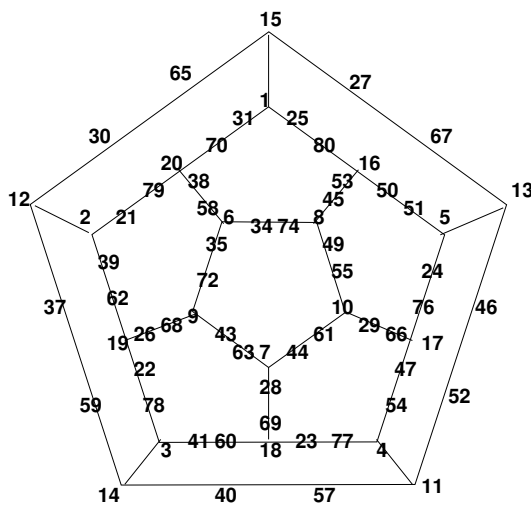


図 4: 正 12 面体の最小配置の例 ($n = 80, S_{\min} = 122$)

正 4 面体で構成できている定和は $26, 34, 42 \in \wp(2)$, $27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41 \in \wp(1)$, $28, 32, 36, 40 \in \wp(0)$ である。これらは下線の定和を持つ定和構造 (L, S) から \mathbf{Z}_n でのアフィン変換を用いて生成した。 $S = 26$ は図 1 に示した最小定和の配置である。 $\wp(2)$ に属する $S = 30, 38$ はまだ構成できていない。三角形 ($m = 2$) において全数探索 [6] を用いて $S = 18, 22$ を持つ定和配置が存在しないことが示されているのと同様に存在しない可能性もある。表 2 に示すように正多面体の位数 n は大きいので全数探索での定和配置生成には膨大な時間がかかって実現できていない。正 6 面体で構成で

きている定和は $50, 66, 82 \in \wp(2)$, $51, 65, 67, 81 \in \wp(1)$, $52, 64, 68, 80 \in \wp(0)$ で $S = 50$ は図 2 に示した最小定和配置に対応する。実現可能性のある 33 個の定和に対してまだ 11 個しか構成できていない。3つのクラスタ $\wp(0), \wp(1), \wp(2)$ の異なる初期定和配置を与える必要があるのかについて未解決である。正 8, 12, 20 面体で構成できている定和は各々 $44, 62, 80 \in \wp(0)$, $122, 162, 202 \in \wp(2)$, $98, 146, 194 \in \wp(2)$ のみである。下線の定和は図 3, 4, 5 に示した最小定和である。

表 2: 正多面体の定和のクラスタリング結果

正多面体	位数 (n)	最大公約数 (d)	クラスタ	
			個数 (c)	クラスタ表示
4	16	4	3	$\wp(0), \wp(1), \wp(2)$
6	32	4	3	$\wp(0), \wp(1), \wp(2)$
8	30	2	2	$\wp(0), \wp(1)$
12	80	4	3	$\wp(0), \wp(1), \wp(2)$
20	72	4	3	$\wp(0), \wp(1), \wp(2)$

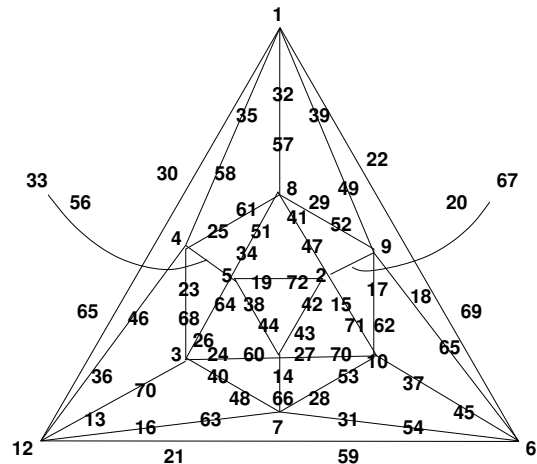


図 5: 正 20 面体の最小配置の例 ($n = 72, S_{\min} = 98$)

4. むすび 正多面体における Magic Graph の構成を述べた。今後はまだ得られていない定和の実現性について検討する。

参考文献

- [1] A. M. Marr, W. D. Wallis, Magic Graphs. Second edition, Birkhuser/Springer, New York. (2013)
- [2] 杉山, グラフへの整数配置問題, 情報処理学会, 3C-2 (2014-03).
- [3] 杉山, Magic Graph の代数的考察, 情報処理学会, 6A-02 (2015-03).
- [4] 杉山, グラフへの整数列の定和配置問題, IPSJ 東北支部研究会, 13-7-A2-4 (2014-03).
- [5] 杉山, アフィン変換を用いた Magic Graph の生成, 電気関係学会東北支部連合大会, 2G21 (2014-08).
- [6] 杉山, グラフ探索による Magic Graph の生成, IPSJ 東北支部研究会, 2014-akita, No.9 (2014-12).