

## 自由節点のスプライン関数を用いた補間について†

吉本 富士市\*\*

未知の1価関数  $f(x)$  からサンプリングされた離散的なデータ  $(x_k, y_k) (k=0, 1, \dots, N)$  を補間する場合、スプライン関数がよく用いられているが、たいてい節点を標本点に固定しているため、データがまばら（スパース）などときには、補間曲線が“こぶ”をもったり振動することが多い。

本論文は、この問題を解決するため、自由節点のスプライン関数  $S(x)$  を用いて補間を行うアルゴリズムを提案している。 $S(x)$  は、 $m$  階 ( $m \geq 4$ ) のB-スプラインの線形結合で表現し、内部の節点は重ねない。したがって、 $S(x)$  は  $C^{m-1}$  級のなめらかさをもった関数である。補間の“よさ”を測るため、基準関数として Akima の方法による簡単な補間関数  $A(x)$  を用いる。また、補間曲線  $S(x)$  が“こぶ”をもったり振動したりするのを防ぐため、データの2階差分商  $d_i (i=0, 1, \dots, N-2)$  と2次導関数  $f''(x)$  の関係を考察し、次のような節点の評価規準を提案している。

節点の評価規準： $d_i d_{i+1} < 0$  のときにのみ区間  $(x_{i+1}, x_{i+2})$  において変曲点を1つもつ  $S(x)$  の中で、 $\max\{|S(x) - A(x)|; x_0 \leq x \leq x_N\}$  を最小にするものが最もよい節点をもつ。

この評価規準を用いた補間のアルゴリズムを述べ、その有効性を示す例を挙げている。

## 1. ま え が き

未知の1価関数  $f(x)$  から、サンプリングにより、標本点  $x_0 < x_1 < \dots < x_N$  の上で関数値  $y_k (k=0, 1, \dots, N)$  が得られているものとする。このデータを、スプライン関数を用いて補間する問題を考える<sup>1)</sup>。

スプライン関数を用いた補間については、すでに多くの研究があるが<sup>2)</sup>、これまでに扱われているものはほとんど節点を標本点に固定した場合（固定節点のスプライン補間と呼ぶことにする）である。しかし、節点と標本点を一致させなくても補間は可能であり、Schoenberg-Whitney の条件を満たすようにすれば一意的に補間できる<sup>3)</sup>。したがって、この条件を満たす範囲内で節点を“自由”にする（変数として扱う）と一層柔軟なスプライン関数となり、このスプライン関数を用いた補間（自由節点のスプライン補間と呼ぶことにする）の方が固定節点のスプライン補間よりも“広い範囲のデータ”に対してよい補間を得られる可能性が大きい<sup>4), 5)</sup>。それにもかかわらず、このような（未知の関数からのサンプリングにより得られたデータに対する）自由節点のスプライン補間は、これまでにほとんど研究されていないようである。この理由は、自由節点のスプライン補間の場合、よい節点の決定がきわめてむずかしいからであると思われる。

一般に、データが十分にサンプリングされている場合には、固定節点のスプライン補間でも、よい結果を得ることができる。しかし、まばら（スパース）なデータの場合には、固定節点のスプライン補間では補間曲線が振動したり、“こぶ”をもつことが多い<sup>6), 7)</sup>。この振動や“こぶ”のない補間曲線を得るために、(i)  $C^1$  級の3次の区分的多項式を用いる方法<sup>6), 7)</sup>、(ii) 張力をかけたスプライン関数を用いる方法<sup>8), 9)</sup>、(iii) 追加の節点を用いる方法<sup>10), 11)</sup>などが考えられている。(i)は、3次の多項式に限定し、節点で関数と1次微係数のみ連続にすることにより、通常のスプライン関数（3次のとき2次微係数まで連続）よりも一層局所的な性質をもつようにしている。これは、なめらかさを犠牲にして柔軟さを増大し、よい補間曲線を得ようとしているとみなすことができる。(ii)は、張力を用いて3次のスプライン関数を双曲線関数を含んだ形のスプライン関数に変形することにより柔軟さを増大したものである。したがって、補間関数値を多数回求める場合には計算量が多いという欠点がある。(iii)は、節点の数が増大するために、補間関数を記憶するのに必要な記憶容量が増加するという問題がある。

本論文では、節点を“自由”にすることにより、なめらかさを犠牲にせず、追加の節点も用いず、かつ区分的多項式（3次に限定しない）のままで、すなわち通常のスプライン関数による補間で節点を自由にするだけで、よい補間を得る方法を提案する。

† On the Interpolation Using a Spline Function with Free Knots by FUJICHI YOSHIMOTO (Akashi Technological College).

\*\* 明石工業高等専門学校

## 2. B-スプラインによる補間

データ  $(x_k, y_k)$  ( $k=0, 1, \dots, N$ ) を, (内部の) 節点  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  をもつ  $m$  階 ( $m-1$  次) のスプライン関数  $S(x)$  を用いて補間する<sup>1), 12)</sup> (図 1).  $S(x)$  の  $m+n$  個のパラメータは, 次の補間条件

$$S(x_k) = y_k \quad (k=0, 1, \dots, N) \quad (1)$$

により決定される. このとき, 一意に補間できるためには, データの数  $(N+1)$  = 補関数  $S(x)$  のパラメータの数  $(m+n)$  となり, Schoenberg-Whitney の条件<sup>9)</sup>

$$x_{i-1} < \xi_i < x_{i+m-1} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

が成り立つ必要がある. 図 1 に示すように, 節点  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  は標本点  $x_0, x_1, \dots, x_N$  と一致しなくてもよい. スプライン関数を用いた補間をこのように考えると, 固定節点のスプライン補間のとき必要な端条件がいらなくなる利点がある.

$S(x)$  の基底関数として  $m$  階 ( $m-1$  次) の B-スプラインを用いることにする. すべての必要な基底関数を作るためには,  $2m$  個の付加節点  $\xi_{1-m} \leq \xi_{2-m} \leq \dots \leq \xi_0 \leq x_0; x_N \leq \xi_{n+1} \leq \xi_{n+2} \leq \dots \leq \xi_{n+m}$  を導入しなければならない. こうすると, 区間  $[\xi_0, \xi_{n+1}]$  において

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n+m} c_i N_{mi}(x) \quad (3)$$

と表わされる. ここに,  $N_{mi}(x)$  は  $m$  階 ( $m-1$  次) の正規化された B-スプラインである. また,  $c_i$  ( $i=1, 2, \dots, n+m$ ) は式 (1) により決定されるパラメータである.  $N_{mi}(x)$  は

$$N_{mi}(x) = (\xi_i - \xi_{i-m}) M_{mi}(x) \quad (4)$$

で定義される. ここに,  $M_{mi}(x)$  は  $(y-x)_{+}^{m-1}$  の,  $y$  に関する  $m$  階の差分商である. ただし,  $y$  は  $\xi_{i-m}, \xi_{i-m+1}, \dots, \xi_i$  の値をとる. また,

$$(y-x)_{+}^{m-1} = \begin{cases} (y-x)^{m-1} & (y-x > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (y-x \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (5)$$

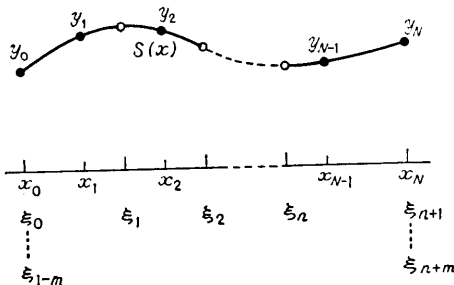


図 1 スプライン関数  $S(x)$  による補間

Fig. 1 Interpolation by the spline function  $S(x)$ .

を意味する.  $N_{mi}(x)$  は局所的な台をもつという性質があり

$$N_{mi}(x) \begin{cases} > 0 & (\xi_{i-m} < x < \xi_i) \\ = 0 & (x \leq \xi_{i-m}, \xi_i \leq x) \end{cases} \quad (6)$$

となる. さきほど述べた Schoenberg-Whitney の条件は, 各データ点  $(x_k, y_k)$  を支持する B-スプラインが 1 つずつ必要である, という事に相当する. B-スプラインの値は, 差分商を用いて計算すると計算量が多く, また桁落ちを生じやすいので, 次の de Boor-Cox のアルゴリズムにより計算する<sup>1)</sup>.

$$M_{r,j}(x) = \frac{(x - \xi_{j-r}) M_{r-1,j-1}(x) + (\xi_j - x) M_{r-1,j}(x)}{\xi_j - \xi_{j-r}} \quad (r=2, 3, \dots, m). \quad (7)$$

この漸化式の出発値は

$$M_{1,j}(x) = \begin{cases} (\xi_j - \xi_{j-1})^{-1} (\xi_{j-1} \leq x < \xi_j) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (8)$$

である.

式 (3) を式 (1) へ代入すると, 未知数  $c_i$  ( $i=1, 2, \dots, n+m$ ) に関する連立一次方程式

$$\sum_{i=0}^{n+m} c_i N_{mi}(x_k) = y_k \quad (k=0, 1, \dots, N) \quad (9)$$

を得る. これを行列表現により

$$A c = y \quad (10)$$

と表わすと, 係数行列  $A$  は, 式 (6) の性質から, 各行においてただか  $m$  個の 0 でない要素をもち, 帯の幅が  $2m-1$  の帯行列となる. 式 (9) の解を式 (3) へ代入すると, (ある内部の節点の組に対する) 補関数  $S(x)$  を決定できる.

節点は, 条件  $\xi_{i-m} < \xi_i$  ( $i=1, 2, \dots, n+m$ ) を満たしさえすれば, Schoenberg-Whitney の条件を満足する範囲内のどこに置いててもよい. したがって, 多重節点とすることも可能であり,  $S(x)$  の各つなぎ目において連続性をいろいろ変えることができる<sup>1)</sup>. ただし, 本論文では,  $C^2$  級以上のなめらかさをもつ補関曲線を得ることにして, 内部の節点は重ねないものとする.

補関数  $S(x)$  の  $j$  次微係数は, 次の式により簡単に計算できる<sup>13)</sup>.

$$S^{(j)}(x) = (m-1) \dots (m-j) \sum_i c_i^{(j)} N_{m-j,i}(x). \quad (11)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} c_i^{(0)} &= c_i, \\ c_i^{(j)} &= (c_{i+1}^{(j-1)} - c_i^{(j-1)}) / (\xi_i - \xi_{i-m+j}), \quad j > 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

である. また,  $S(x)$  の定積分も容易に計算できることを付記する<sup>1), 12)</sup>.

### 3. 節点の評価規準

$S(x)$  は、データが十分にサンプリングされていると、節点の位置の影響をあまり受けない。したがって、このときには内部の節点を、たとえば

$$\xi_i = \begin{cases} \{x_{i-1+(m-1)/2} + x_{i-1+(m+1)/2}\} / 2 & m \text{ が奇数のとき,} \\ x_{(2i+m-2)/2} & m \text{ が偶数のとき} \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

とし、その他の節点は両端の標本点  $x_0, x_N$  に重ねるとよい。

しかし、データがまばら（スパース）な場合には、 $S(x)$  の形は、内部の節点  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  の位置によって大きく変わる<sup>1), 4)</sup>。したがって、何らかの“規準”を用いて、“節点のよい位置”を求めなければならない。 $S(x)$  はデータのもとにある関数  $f(x)$  に近いほどよいのであるが、本論文では  $f(x)$  は未知とした。一般に、測定データの補間をはじめ、 $f(x)$  は未知の場合が多い。ゆえに、 $S(x)$  のよさを測るために  $f(x)$  を利用することはできない。

そこで、 $f(x)$  のかわりに Akima の方法<sup>6)</sup> による補間 ( $A(x)$  とする) を用いて  $S(x)$  のよさを測り、目で見たととき好ましい補間曲線を得ることとする。“目で見たととき好ましい補間曲線”という表現はあいまいさを含んでいるが、 $f(x)$  が未知の場合には、ほかに適当な尺度がないからである。まず、 $\max |S(x) - A(x)|$  をできるだけ小さくすることを考えよう。 $A(x)$  は1回計算するだけでよい。また、 $A(x)$  は簡単に計算でき、多くの場合に目で見たととき好ましい補間曲線を与えるという特長がある。しかし、1.で述べたように、 $A(x)$  は  $C^1$  級の区分的3次多項式であるので、微係数や2次微係数が重要な場合には好ましくない。一方、 $S(x)$  は、その次数を3次以上にして内部の節点を重ねなければ  $C^2$  級以上にできるので、微係数や2次微係数が大切な場合に  $A(x)$  よりもよい結果を与える可能性があることを注意しておきたい (5.の計算例参照)。

さて、ところが  $\max \{|S(x) - A(x)|; x_0 \leq x \leq x_N\}$  を最小とする補間は、必ずしも目で見たととき好ましい補間曲線とならず、そのような補間が  $f(x)$  に近いとはかぎらない。特に、まばら（スパース）なデータの場合には  $S(x)$  の傾きのゆるいところにしばしば“こぶ”（ふらつき）が表われる。これは、 $S(x)$  の傾きの

急なところで  $A(x)$  との差を無理に小さくしようとするために生ずるものと思われる。したがって、この場合には  $S(x)$  は目で見たととき好ましい補間曲線になっていない。この問題を解決するために、まず次の定理を考えよう。

【定理】<sup>14)</sup> データのもとにある真の関数  $f(x)$  が  $C^j$  級ならば、

$$f[x_i, \dots, x_{i+j}] = f^{(j)}(\lambda) / j! \quad (14)$$

となる  $\lambda$  が区間  $(x_i, x_{i+j})$  の中に存在する。ここに、 $f[x_i, \dots, x_{i+j}]$  は、データ  $(x_k, y_k)$  ( $k=i, \dots, i+j$ ) に関する  $j$  階の差分商である。

証明は文献<sup>14)</sup>を参照されたい。式 (14) の左辺を  $d_i$  と書くことにする。この定理によれば、 $d_i$  の各符号の変化に対応して  $f^{(j)}(x)$  にも符号の変化がなければならないことになる。ここでは  $j=2$  の場合を考えよう。すなわち、2階差分商と2次微係数との関係を用いて変曲点がどこに入るべきかを検討し、節点の評価規準を定めることにする。

いま、図2のようなデータが与えられていると、 $d_i < 0, d_{i+1} > 0, d_{i+2} < 0$  となるので、定理によれば、 $f''(x)$  は区間  $(x_i, x_{i+2})$  の中のどこかで負、区間  $(x_{i+1}, x_{i+3})$  の中のどこかで正、区間  $(x_{i+2}, x_{i+4})$  の中のどこかで負とならなければならない、ということになる。つまり、区間  $(x_i, x_{i+3})$  および  $(x_{i+1}, x_{i+4})$  の中に変曲点が少なくとも1つずつ必要になる。これらの区間の端の方に変曲点が入ることは少ないと思われる。また、変曲点の数が多すぎることは  $f(x)$  が振動することを意味するので、余分な変曲点<sup>10)</sup> はなくする必要がある。そこで、両端の区間を除いて  $(x_{i+1}, x_{i+2})$  および  $(x_{i+2}, x_{i+3})$  に変曲点が1つずつ必要であると考えことにする (図2参照)。

本論文では、3次以上のスプライン関数 ( $m \geq 4$ ) を用いることにする。このとき、 $S(x)$  は  $C^2$  級である。

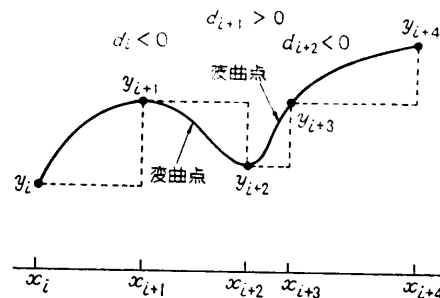


図2 2階差分商の符号の変化

Fig. 2 The change of signs of the second divided differences.

ゆえに、 $S(x)$  が  $f(x)$  のよい近似関数となる ( $S(x)$  が目で見たとき好ましい補間曲線となる) ためには  $d_i$  の符号の変化に対応して  $S''(x)$  も符号を変えていなければならない。すなわち、 $d_i d_{i+1} < 0$  となるとき、区間  $(x_{i+1}, x_{i+2})$  において  $S(x)$  は変曲点を1つもたねばならない。以上の議論に基づき、節点の評価規準を次のように設定する。

【節点の評価規準】  $d_i d_{i+1} < 0$  のときにのみ区間  $(x_{i+1}, x_{i+2})$  において変曲点を1つもつ補間関数  $S(x)$  の中で、 $\max\{|S(x) - A(x)|; x_0 \leq x \leq x_N\}$  を最小にするものが最もよい節点をもつ (したがって、このとき最もよい補間となる) とする。

#### 4. アルゴリズム

アルゴリズムの概要は次のようになる。

ステップ 1: 補間すべきデータ  $(x_k, y_k)$  ( $k=0, 1, \dots, N$ ) を入力する。

ステップ 2: 補間関数  $S(x)$  の次数を決める。これにより節点の数は自動的に決まる。

ステップ 3: データの2階差分  $d_i$  ( $i=0, 1, \dots, N-2$ ) を計算する。ただし、 $|d_i|$  がきわめて小さい場合には  $d_i \equiv 0$  とおく。これは、計算誤差のため  $d_i = 0$  となるべきものがそのようにならないのをさけるためである。

ステップ 4:  $d_i d_{i+1} < 0$  となる区間、すなわち変曲点が必要な区間  $(x_{i+1}, x_{i+2})$  をすべてみつける。ただし、たとえば図3のように  $d_i = 0$  となる区間がある場合には、その区間のすぐ両側の0でない2階差分  $d_{i-1}, d_{i+2}$  の符号を調べ、それらが異なれば、 $|d_{i-1}|, |d_{i+2}|$  のうちの大きい方の区間  $(x_{i+2}, x_{i+3})$  へ変曲点が必要となるようにする。これは、図3において  $d_{i+1} = 0$  を  $d_{i+1} = \varepsilon$  (正の数) とみなすことに相当する。

ステップ 5: 区間  $[x_0, x_N]$  を  $L$  等分し、 $t_0 = x_0, t_1, \dots, t_L = x_N$  とおく。ここに、 $t_i = t_{i-1} + (x_N - x_0)/L$  である。  $L$  は、ステップ10の  $R$  が  $R \equiv \max\{|S(x) - A(x)|; x_0 \leq x \leq x_N\}$  となるほど、十分大きくする。

ステップ 6: Akima の方法<sup>6)</sup> を用いて与えられたデータを補間し、 $t_i$  ( $i=0, 1, \dots, L$ ) での補間値を求め、反復数  $I$  を1にセットする。

ステップ 7: 一様乱数を利用して、Schoenberg-Whitney の条件 (式 (2)) を満たすランダムな節点  $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n$  を作る。付加節点は両端  $x_0, x_N$  に固

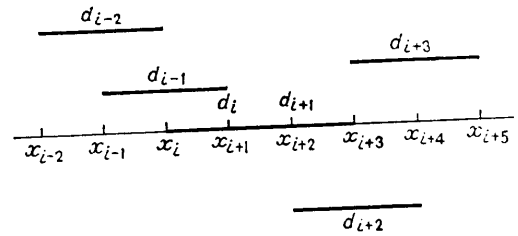


図3 2階差分が0となる例 ( $|d_{i+2}| > |d_{i-1}|$  なので、区間  $(x_{i+1}, x_{i+2})$  に変曲点が必要)

Fig. 3 Example of the second divided differences some of which are equal to zero. (An inflection point is needed in the interval  $(x_{i+1}, x_{i+2})$ , because  $|d_{i+2}| > |d_{i-1}|$ .)

定する。ここに、 $\xi_i - \xi_{i-1} > (x_N - x_0)/L$  ( $i=1, 2, \dots, n+1$ ) となるようにする。この理由は、あまり節点を接近しすぎると、その付近で連続性が悪くなる方向に近づく (2つの節点一致すると、その点で連続性が1次下がる) からである。

ステップ 8: ステップ7で決まった節点を用いて補間を計算し、 $S''(t_i)$  ( $i=0, 1, \dots, L$ ) を求める。

ステップ 9:  $S''(t_i)$  ( $i=0, 1, \dots, L$ ) を調べ、 $S(x)$  に変曲点のある位置 ( $S''(x)$  が  $x$  軸を切る位置) を求め、それらがどの区間に入るか計算する。このとき、 $|S''(t_i)|$  がきわめて小さく、 $|S''(t_i)| < \delta$  となる (たとえば、 $\delta = \max_i |S''(t_i)| / 100$  場合には、 $S''(t_i) = 0$  とみなす。これは、 $S(x)$  に“わずかな変曲点”があるときには、それを変曲点とみなさないことに相当する。この理由は数値実験に基づくもので、“わずかな変曲点”も変曲点であるとする、ステップ10の変曲点のマッチングにおいて  $S(x)$  の変曲点の方が多すぎるからである。したがって、たとえば図4の  $q_0 \sim q_6$  は変曲点とみなさない。同図(b)の  $q_4 \sim q_6$  に対しては、 $|S''(x)| \leq \delta$  となる区間  $\Delta_0$  を2等分する点  $r_0$  を変曲点とみなす。  $q_7, q_8$  に対しても同様に  $|S''(x)| \leq \delta$  となる区間  $\Delta_1$  を2等分する点  $r_1$  を変曲点とみなす。

ステップ 10: ステップ4で計算した“変曲点が必要な区間”と、ステップ9で計算した“ $S(x)$  に変曲点がある区間”を比較する。両者のマッチングがとれれば、このときの  $S(t_i)$  ( $i=0, 1, \dots, L$ ) を計算し、 $R \equiv \max_i |S(t_i) - A(t_i)|$  を求めておき、ステップ11へ行く。そうでなければ、反復数  $I$  を1増加し、 $I$  が最大反復数 (たとえば300) 以内のときステップ7へもどる。  $I$  が最大反復数を越えた場合には、それまでにマ

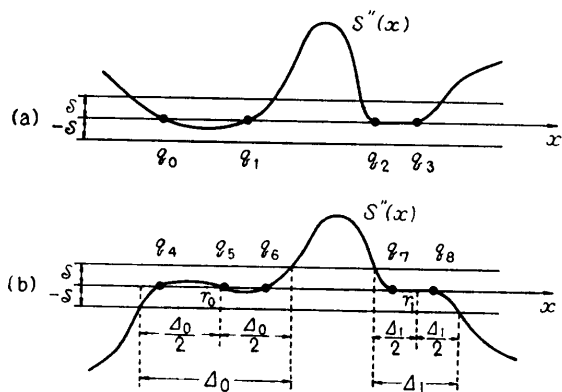


図 4  $S(x)$  の変曲点の決め方

Fig. 4 Determination of the inflection points of  $S(x)$ .

ッチングが取れたものの中で  $R$  を最小にするものを最もよい補間とする。

**ステップ 11:** いままでマッキングが取れたものが  $J$  個 (数値実験によると  $J=20$  程度でよい) になれば, それらの中で  $R$  を最小にするものを最もよい補間とする。そうでなければ,  $I$  を 1 増加してステップ 7 へもどる。

5. 計算例

ここで述べた方法の有効性を示すため, 2つの例題を挙げることにする。以下の図において,  $x$  軸に目印 (┆) をつけているものがあるが, この印は内部の節点の位置である。また, 4. のアルゴリズムで述べた  $L$  は 100 とした。

**例 1** Akima<sup>9)</sup> のデータの場合。3次 ( $m=4$ ) のスプライン関数による補間を計算した結果を図 5, 7, 9, 10, 12 に示す。図 5, 7 は, ここで述べた方法による補間の結果である。図 6, 8 は Akima の方法による補間の結果である。これらの図を比べると,  $S(x)$  は  $A(x)$  と同様によい補間曲線となっているが,  $S''(x)$  と  $A''(x)$  には相当な差があるのがわかる。特に Akima の方法では 2 次導関数に大きな不連続が見られる。図 9 は, 式 (13) による節点の場合である。図 10 は, 内部の節点を等間隔にした場合である。これらの図を見ると, 節点の重要性がよくわかる。図 11 は, よく用いられている 3 次の固定節点のスプライン補間である。端条件は  $S'''(x_0)=S'''(x_N)=0$  とした。この図と図 5 を比べると, 自由節点のスプライン補間の有効性がよくわかる。図 12 は, 3. で述べた定理に基づく変曲点の考慮をすることなく, 単純に  $R=\max_i |S(t_i)-$

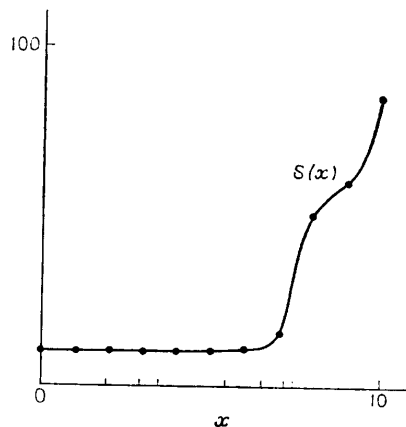


図 5 ここで述べた方法による補間 ( $m=4$ )  
Fig. 5 Interpolation by the method described here ( $m=4$ ).

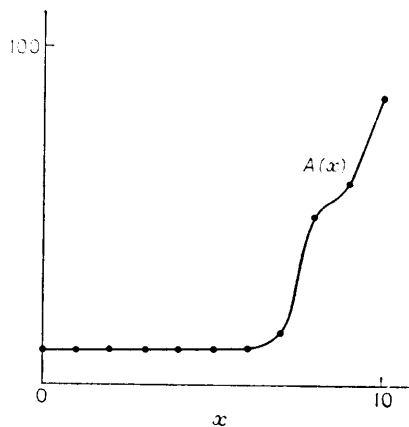


図 6 Akima の方法による補間  
Fig. 6 Interpolation by Akima's method.

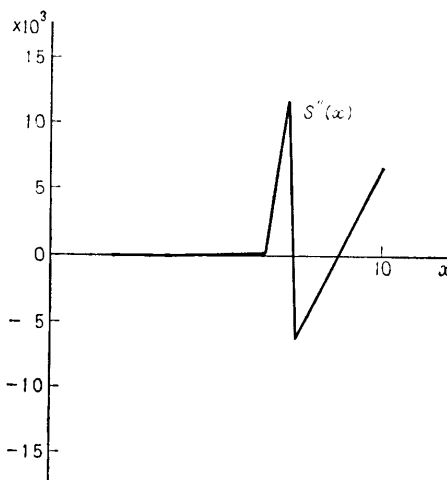


図 7 図 5 に示す補間関数の 2 次導関数  
Fig. 7 Second derivative of the interpolating function shown in Fig. 5.

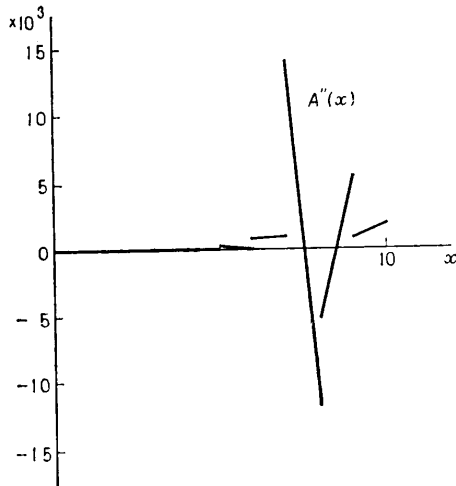


図 8 図 6 に示す補間関数の 2 次導関数  
 Fig. 8 Second derivative of the interpolating function shown in Fig. 6.

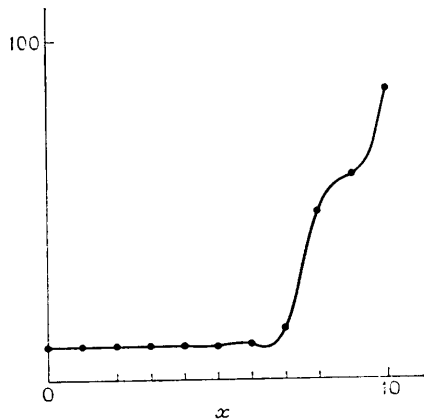


図 9 式 (13) の節点による補間 ( $m=4$ )  
 Fig. 9 Interpolation by use of the knots determined by the eq. (13).

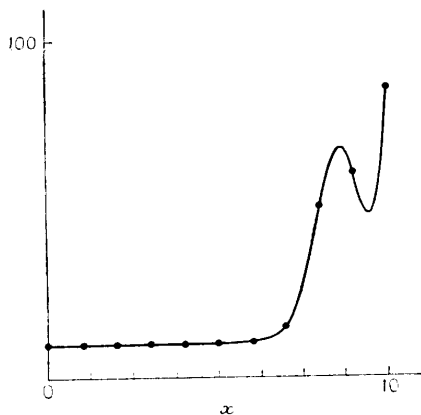


図 10 等間隔な節点による補間 ( $m=4$ )  
 Fig. 10 Interpolation by use of the equally spaced knots.

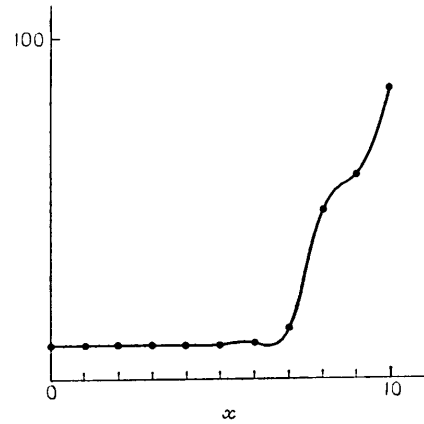


図 11 3 次の固定節点のスプライン補間  
 Fig. 11 Cubic spline interpolation, where the knots coincide with the sample points.

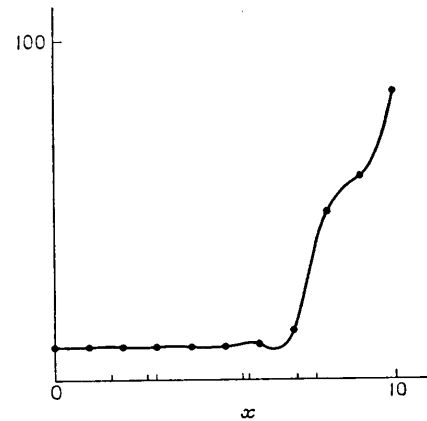


図 12 変曲点を考慮することなく,  $R = \max |S'(t_i) - A'(t_i)|$  を最小にする補間 ( $m=4$ )  
 Fig. 12 Interpolation minimizing  $R = \max |S'(t_i) - A'(t_i)|$ , where the inflection points are not considered.

$A(t_i)$  を最小にするものを求めた場合である。この図と図 5 を比べると、変曲点の考慮の重要性がわかるであろう。

例 2 次の式

$$y_k = f(x_k) = 100 x_k^5 + \frac{1}{0.05 + (x_k - 0.35)^2} \quad (x_k = 0, 0.1, \dots, 1) \quad (15)$$

により与えられるデータの場合、5 次 ( $m=6$ ) のスプライン関数を用いて補間した結果を図 13, 14 に示す。図 13 を見ると、ここで述べた方法は 5 次の場合にもよい結果を与えているのがわかる。図 15 は、Akima の方法による補間の結果である。図 16 は、式 (15) の

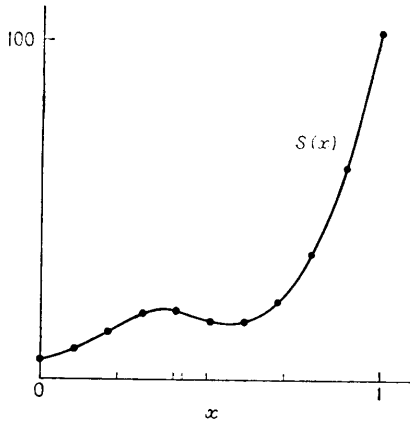


図 13 ここで述べた方法による補間 ( $m=6$ )  
Fig. 13 Interpolation by the method described here ( $m=6$ ).

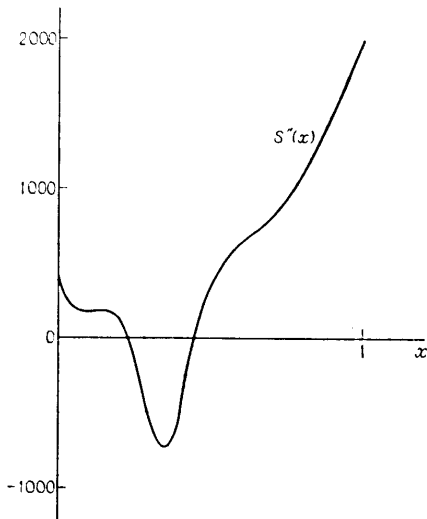


図 14 図 13 に示す補間関数の 2 次導関数  
Fig. 14 Second derivative of the interpolating function shown in Fig. 13.

$f''(x)$  である。これらの図を比べてみると、2 次導関数の形は、Akima の方法よりも、ここで述べた方法の方がよい結果を与えているのがわかる。

なお、これらの例題は、明石高専の電子計算機 FACOM 270-30\* を用いて、単精度で計算した。このために開発したプログラムは、フォートランで書いており、全部で 498 ステップである。このうちの 132 ステップは Akima の方法のプログラムが占めている。Akima の方法のプログラムとしては、文献<sup>16)</sup>の

\* この計算機は、単精度の場合、仮数部 24 ビット、指数部 7 ビットでデータを表現している。したがって、10 進数で約 7 桁の精度をもつ。また、その演算速度は、加減算のとき  $9.5 \mu s$ 、乗算のとき  $20.7 \mu s$ 、除算では  $36 \mu s$  である。

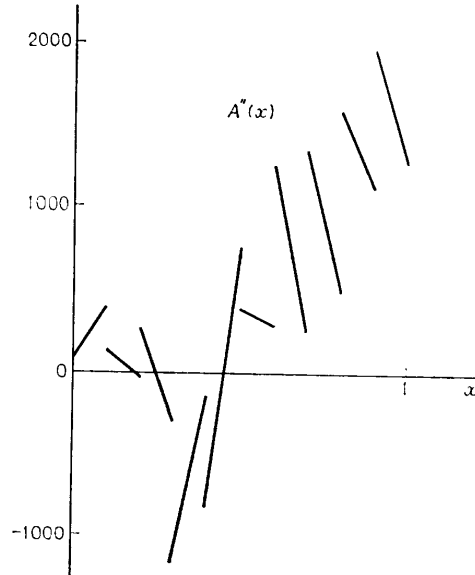


図 15 Akima の方法による補間関数の 2 次導関数。データは図 13 のデータと同じである。  
Fig. 15 Second derivative of the interpolating function by using Akima's method. The data is identical with the one in Fig. 13.

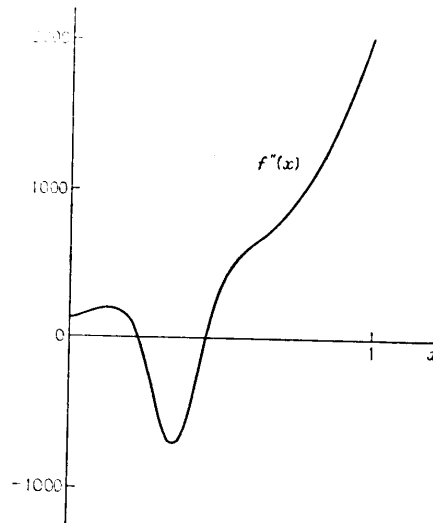


図 16 データのもとにある関数の 2 次導関数 (式(15)の 2 次導関数)  
Fig. 16 Second derivative of the underlying function of data given by the eq.(15).

“INTRPL” を利用した。計算時間は、図 5 を求める場合、約 1 分 13 秒であった。

## 6. あとがき

未知の 1 価関数  $f(x)$  からサンプリングされた離散

的なデータの補間について、自由節点のスプライン関数を用いる場合は、これまでほとんど研究されていなかった。本論文では、この自由節点のスプライン補間について、よい補間を求めるためのアルゴリズムを提案した。このアルゴリズムによれば、固定節点のスプライン補間でよい結果が得られない場合にも、うまくいくことが多い。

しかし、あらゆるデータに対してよい結果が得られるのではなく、限界があることも明らかである。たとえば、基準関数として用いた Akima の方法で、だいたいよい関数形が求まるようなデータでない、よい結果は得られない。また、Akima の方法には座標軸の回転に対して不変でないという性質があるので、ここで述べた方法も同様な性質をもつことになる。したがって、座標軸を回転する必要がある場合には、ここで述べた方法は適していない。しかし、1 価関数の補間では、座標軸の回転はほとんど必要ではないので、この性質は大きな欠点ではない。

5. の計算例で示したように、Akima の方法は微係数や 2 次微係数が重要な場合には適切な補間法ではないが、本論文で述べた方法では、そのような場合にもよい結果を与えるという特長があることに注意したい。

本研究は、データ平滑化の場合の節点の決定問題<sup>15)</sup>において、データの数が少なくなり、ちょうど“データ数=近似関数のパラメータ数”となった場合の問題を扱ったとみなすこともできる。データ数 $\gg$ パラメータ数の場合には統計的な手段により近似のよさを測ることができるが、データ数=パラメータ数の場合(補間の場合)については、近似のよさを測る客観的な規準を作ることが大変むずかしい。この規準についてさらに研究する必要がある。

終りに、日頃ご討論頂く藤井康雄氏(京都大学)、大中幸三郎氏(大阪大学)、都田艶子氏(大阪大学)にお礼申し上げます。

#### 参 考 文 献

- 1) 市田浩三, 吉本富士市: スプライン関数とその応用, シリーズ新しい応用の数学 20, p. 220, 教育出版, 東京 (1979).

- 2) 秦野和郎, 二宮市三: B-spline による補間スプラインの算法, 情報処理, Vol. 19, No. 6, pp. 538-545 (1978), この論文の参考文献も見よ.
- 3) Schoenberg, I. J. and Whitney, A.: On Pólya frequency functions III, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 74, pp. 246-259 (1953).
- 4) 吉本富士市: 変数節点を用いたスプライン補間, 情報処理学会第 20 回全国大会講演論文集, pp. 403-404 (1979).
- 5) 吉本富士市: 自由節点のスプラインによる補間について, 情報処理学会第 21 回全国大会講演論文集, pp. 949-950 (1980).
- 6) Akima, H.: A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures, J. ACM, Vol. 17, pp. 589-602 (1970).
- 7) Fritsch, F. N. and Carlson, R. E.: Monotone piecewise cubic interpolation, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 17, pp. 238-246 (1980).
- 8) Schweikert, D.: An interpolation curve using splines in tension, J. Math. and Phys., Vol. 45, pp. 312-317 (1966).
- 9) Cline, A.: Scalar- and planar-valued curve fitting using splines under tension, Comm. ACM, Vol. 17, pp. 218-220 (1974).
- 10) de Boor, C.: A practical Guide to Splines, p. 392, Springer-Verlag, New York (1978), 16 章を見よ.
- 11) Steven Pruess: Alternative to the exponential spline in tension, Math. of Comp., Vol. 33, pp. 1273-1281 (1979).
- 12) Cox, M. G.: An algorithm for spline interpolation, J. Inst. Math. Appl., Vol. 15, pp. 95-108 (1975).
- 13) de Boor, C.: On calculating with B-splines, J. Approx. Theorey, Vol. 6, pp. 50-62 (1972).
- 14) Isaacson, E. and Keller, H. B.: Analysis of Numerical Methods, p. 541, John Wiley & Sons, New York (1966), pp. 249-250 を見よ.
- 15) 吉本富士市, 市田浩三, 清野 武: 区分的 3 次関数を用いたデータ平滑化—節点の決定について—, 情報処理, Vol. 17, No. 3, pp. 200-206 (1976).
- 16) Akima, H.: Algorithm 433, Interpolation and smooth curve fitting based on local procedures, Comm. ACM, Vol. 15, pp. 914-918 (1972).

(昭和 55 年 9 月 19 日受付)

(昭和 55 年 12 月 18 日採録)