ある種の割当て問題における解法について[†]

岩 根 雅 彦[††] 佐 藤 文 孝[†††]

有限個の相異なる値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して，それぞれの度数を $f_1, f_2, \cdots, f_n$ とする度数分布が与えられているとする．この分布を m クラスに分割するとき，おのおののクラスに属する x_i の最大値で，そのクラスを代表させるものとする．それぞれのクラスごとの度数の和とクラスの代表値との積和を目的関数とし，この目的関数を最小にするような分割を求める問題に対して，総当たり組合せ法より少ない計算量で解を得る方法について考察した．分布をあるクラスに分割したときの最適解の持つ諸性質を調べて定理とし，この定理により $(m-1)$ クラスから m クラスに分割したときの最適解の存在範囲を明らかにした．そして，最適解の存在範囲を限定することにより，$O(m\cdot n^2)$ の組合せ計算で最適解を求める解法を提案した．

1. まえがき

組合せ最適化問題は，有限個の要素を持つ集合の中で，ある拘束条件下で目的関数を最適化するような解を見つける問題である．この種の問題は，対象とする組合せ数の有限性からすべての組合せについて調べることにより必ず解が得られる．しかし，計算機の能力を考えたとき，能率のよいアルゴリズムの開発が必要である．計算量の理論[1)~4)]の発展に伴って種々のアルゴリズムが開発されてきている．

組合せ最適化問題の一種に，n 種類の大きさの異なった物体がそれぞれ f_i 個存在するものとし，この物体を一個ずつ別々に $m(m\ll n)$ 種類の立方体の容器に入れるとき，全体の大きさが最小となるように容器の大きさを決定する問題がある．この問題の具体的な例として，マイクロプログラム制御計算機のマシンサイクル時間の最適化問題[5)]がある．これは，マイクロプログラムを構成している各マイクロ命令の実行時間とその実行頻度からマイクロプログラムの実行時間を最小にするように数種類のマシンサイクル時間を決定する問題である．x_i をマイクロ命令実行時間，f_i をマイクロ命令実行時間 x_i で実行されるマイクロ命令の実行頻度，n をマイクロ命令実行時間の種類とすると理想的なマイクロプログラム実行時間 μ_n は次式となる．

$$\mu_n=\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot x_i \qquad (1)$$

しかし，n が大きい場合，n 種類のマシンサイクルを実現することは現実的でない．そこで，n 種類のマイクロ命令実行時間 x_i の中から m 種類 $(m\ll n)$ のマシンサイクル時間 X_j を選ぶ．マイクロ命令実行時間 x_i を持つマイクロ命令は，x_i よりも大きいマシンサイクル時間の中で最小のマシンサイクル時間 X_j で実行される．このときの実行時間 μ_m は次式となる．

$$\mu_m=\sum_{j=1}^{m}(X_j\cdot\sum_{k} f_k^{(j)}),\quad X_j=\mathrm{Max}_{i}(x_i^{(j)}) \qquad (2)$$

ここで，$x_i^{(j)}$ はマシンサイクル時間 X_j で実行されるマイクロ命令実行時間，$f_i^{(j)}$ はマイクロ命令実行時間 $X_i^{(j)}$ で実行されるマイクロ命令の実行頻度である．そこで，m が与えられたとき，実行時間 μ_m を最小にするように X_j を決定することが問題である．

本論文では，この種の組合せ最適化問題に対して，総当たり組合せ法よりはるかに少ない計算量で最適解を求める解法について考察する．

2. 諸 定 理

有限個の相異なる値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して，それぞれの度数を $f_1, f_2, \cdots, f_n (f_i>0)$ とする度数分布を考える．特に断らない限り $x_1<x_2<\cdots<x_n$ とする．この分布を $m(m\ll n)$ クラスに分割したときのクラスの標識を分割ベクトル $\boldsymbol{x}_j^{(m)}$，それぞれのクラスの度数を度数ベクトル $\boldsymbol{f}_j^{(m)}$ で表わすと

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{x}_j^{(m)}=(x_{j1}, x_{j2}, \cdots, x_{jm}),\\ \boldsymbol{f}_j^{(m)}=(f_{j1}, f_{j2}, \cdots, f_{jm}).\end{array}\right\} \qquad (3)$$

ただし，$x_{ji}\in\{x_k\}$,

† A Fast Algorithm for A Kind of Assignment Problems by MASAHIKO IWANE (Department of Information and Control Engineering, Toyota Technological Institute) and FUMITAKA SATO (Ome Works, Toshiba Corporation).

†† 豊田工業大学制御情報工学科
††† 東京芝浦電気(株)青梅工場

$$f_{ji}=\sum_{l\in S_{ij}} f_l,$$

$$S_{ji}=\{l\,|\,x_{ji-1}<x_l\leq x_{ji}\}.$$

このとき目的関数 μ は次式で与えられる．

$$\mu=\boldsymbol{f}_j{}^{(m)}\cdot\boldsymbol{x}_j{}^{(m)} \tag{4}$$

目的関数 μ が最小となるように分割ベクトル $\boldsymbol{x}_j{}^{(m)}$ を選んだときの分割ベクトルを最適分割ベクトル $\boldsymbol{x}^{(m)}$, $\boldsymbol{x}^{(m)}$ に対する度数ベクトルを最適度数ベクトル $\boldsymbol{f}^{(m)}$ と呼ぶことにする．

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{x}^{(m)}&=(x_1{}^{(m)}, x_2{}^{(m)}, \cdots, x_m{}^{(m)}),\\ \boldsymbol{f}^{(m)}&=(f_1{}^{(m)}, f_2{}^{(m)}, \cdots, f_m{}^{(m)}).\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

そうすると最適分割ベクトル $\boldsymbol{x}^{(m)}$ に対する目的関数値 $\mu^{(m)}$ は次式となる．

$$\mu^{(m)}=\underset{j_1, j_2, \cdots, j_m}{\mathrm{Min}}\ \boldsymbol{f}_j{}^{(m)}\cdot\boldsymbol{x}_j{}^{(m)}=\boldsymbol{f}^{(m)}\cdot\boldsymbol{x}^{(m)}. \tag{6}$$

最適分割ベクトル $\boldsymbol{x}^{(m)}$ を求めるにあたって，すべての分割ベクトル $\boldsymbol{x}_j{}^{(m)}$ について目的関数を評価し，最小となる μ に対応した分割ベクトル $\boldsymbol{x}_j{}^{(m)}$ を最適分割ベクトル $\boldsymbol{x}^{(m)}$ にする方法がある．この方法では目的関数 μ を ${}_{n-1}\mathrm{C}_{m-1}$ 回評価する必要があり，n が大きいときは実用的でないので，もっと少ない計算量で最適分割ベクトル $\boldsymbol{x}^{(m)}$ を算出する解法が必要となる．このための準備を次に行う．

（定理1） 区間 $x_1\leq x_i\leq x_n$ の分布を m クラスに分割したときの最適分割ベクトルを $\boldsymbol{x}^{(m)}=(x_1{}^{(m)}, \cdots, x_m{}^{(m)})$ とする．部分区間 $x_p{}^{(m)}<x_i\leq x_q{}^{(m)}$ $(p<q<m)$ の分布を $(q-p)$ クラスに分割したときの最適分割ベクトルは $\boldsymbol{x}^{(q-p)}=(x_{p+1}{}^{(m)}, x_{p+2}{}^{(m)}, \cdots, x_q{}^{(m)})$ である．

（証明） 定義より

$$\begin{aligned}\mu^{(m)}=&x_1{}^{(m)}\cdot\sum_{j\in S_1} f_j+\cdots+x_p{}^{(m)}\cdot\sum_{j\in S_p} f_j\\ &+x_{p+1}{}^{(m)}\cdot\sum_{j\in S_{p+1}} f_j+\cdots+x_q{}^{(m)}\cdot\sum_{j\in S_q} f_j\\ &+x_{q+1}{}^{(m)}\cdot\sum_{j\in S_{q+1}} f_j+\cdots+x_m{}^{(m)}\cdot\sum_{j\in S_m} f_j\\ S_k=&\{j\,|\,x_{k-1}{}^{(m)}<x_j\leq x_k{}^{(m)}\}\end{aligned} \tag{7}$$

部分区間 $x_p{}^{(m)}<x_i\leq x_q{}^{(m)}$ の分布を $(q-p)$ クラスに分割したときの最適分割ベクトルを $\boldsymbol{x}^{(q-p)''}=(x_{p+1}{}^{(q-p)''}, \cdots, x_{q-1}{}^{(q-p)''}, x_q{}^{(q-p)''})$ と仮定する．

ただし，$x_{p+1}{}^{(q-p)''}\neq x_{p+1}{}^{(m)}$, $x_{p+2}{}^{(q-p)''}\neq x_{p+2}{}^{(m)}$, $\cdots$, $x_q{}^{(q-p)''}\neq x_q{}^{(m)}$ の少なくとも一つは成立するものとする．

$$\begin{aligned}\mu^{(q-p)''}=&x_{p+1}{}^{(q-p)''}\cdot\sum_{j\in S_{p+1}''} f_j+x_{p+2}{}^{(q-p)''}\cdot\\ &\sum_{j\in S_{p+2}''} f_j+\cdots x_{q-1}{}^{(q-p)''}\cdot\sum_{j\in S_{q-1}''} f_j\\ &+x_q{}^{(q-p)''}\cdot\sum_{j\in S_q''} f_j\\ S_k''=&\{j\,|\,x_{k-1}{}^{(q-p)''}<x_j\leq x_k{}^{(q-p)''}\}\end{aligned} \tag{8}$$

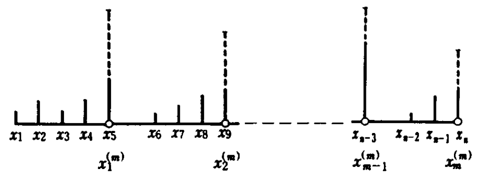

図1 $\boldsymbol{n}$ クラスの分布と $\boldsymbol{m}$ クラスの分布の関係

Fig. 1 Relation between distribution of class $\boldsymbol{n}$ and that of class $\boldsymbol{m}$.

部分区間 $x_p{}^{(m)}<x_i\leq x_q{}^{(m)}$ の分布を $(q-p)$ クラスに分割する分割ベクトルの一つとして $\boldsymbol{x}^{(q-p)'}=(x_{p+1}{}^{(m)}, x_{p+2}{}^{(m)}, \cdots, x_q{}^{(m)})$ を考える．この分割ベクトルに対する目的関数の値を $\mu^{(q-p)'}$ とすると，

$$\begin{aligned}\mu^{(q-p)'}=&x_{p+1}{}^{(m)}\cdot\sum_{j\in S_{p+1}} f_j+x_{p+2}{}^{(m)}\cdot\sum_{j\in S_{p+2}} f_j+\cdots\\ &+x_{q-1}{}^{(m)}\cdot\sum_{j\in S_{q-1}} f_j+x_q{}^{(m)}\cdot\sum_{j\in S_q} f_j.\end{aligned} \tag{9}$$

仮定より，

$$\mu^{(q-p)''}<\mu^{(q-p)'}. \tag{10}$$

次に，区間 $x_1\leq x_i\leq x_n$ の分布を m クラスに分割したときの分割ベクトルの一つとして $\boldsymbol{x}^{(m)'}=(x_1{}^{(m)}, \cdots, x_p{}^{(m)}, x_{p+1}{}^{(q-p)''}, \cdots, x_q{}^{(q-p)''}, x_{q+1}{}^{(m)}, \cdots, x_m{}^{(m)})$ を考え，この分割ベクトル $\boldsymbol{x}^{(m)'}$ に対する目的関数値を $\mu^{(m)'}$ とする．

$$\begin{aligned}\mu^{(m)'}=&x_1{}^{(m)}\cdot\sum_{j\in S_1} f_j+\cdots+x_p{}^{(m)}\cdot\sum_{j\in S_p} f_j\\ &+x_{p+1}{}^{(q-p)''}\cdot\sum_{j\in S_{p+1}''} f_j+\cdots\\ &+x_q{}^{(q-p)''}\cdot\sum_{j\in S_q''} f_j+x_{q+1}{}^{(m)}\cdot\sum_{j\in S_{q+1}} f_j+\cdots\\ &+x_m{}^{(m)}\cdot\sum_{j\in S_m} f_j.\end{aligned} \tag{11}$$

(7), (8), (9), (10), (11) より $\mu^{(m)'}<\mu^{(m)}$.

これは $\mu^{(m)}$ が最小であることに反し，矛盾である．ゆえに，部分区間 $x_p{}^{(m)}<x_i\leq x_q{}^{(m)}$ の分布を $(q-p)$ クラスに分割したときの最適分割ベクトルは $\boldsymbol{x}^{(q-p)'}=(x_{p+1}{}^{(m)}, x_{p+2}{}^{(m)}, \cdots, x_q{}^{(m)})$ である．（証明終）

（補助定理1） 部分区間 $x_p\leq x_i\leq x_q$ の分布を m クラス $(m<q-p)$ に分割したときの最適分割ベクトルを $\boldsymbol{x}^{(m)}=(x_1{}^{(m)}, x_2{}^{(m)}, \cdots, x_m{}^{(m)})$ とする．拡張区間 $x_p\leq x_i\leq x_r$ $(r>q)$ の分布を m クラスに分割したときの最適分割ベクトルを $\boldsymbol{x}^{(m)'}=(x_1{}^{(m)'}, x_2{}^{(m)'}, \cdots, x_m{}^{(m)'})$ とすると，$x_{m-1}{}^{(m)}\leq x_{m-1}{}^{(m)'}$ が成立する．

（証明） 定義より最適分割ベクトル $\boldsymbol{x}^{(m)}$, $\boldsymbol{x}^{(m)'}$ に対する目的関数値を $\mu^{(m)}$, $\mu^{(m)'}$ とする．

$$\begin{aligned}\mu^{(m)}=&x_1{}^{(m)}\cdot\sum_{j\in S_1} f_j+x_2{}^{(m)}\cdot\sum_{j\in S_2} f_j+\cdots\\ &+x_m{}^{(m)}\cdot\sum_{j\in S_m} f_j.\end{aligned} \tag{12}$$

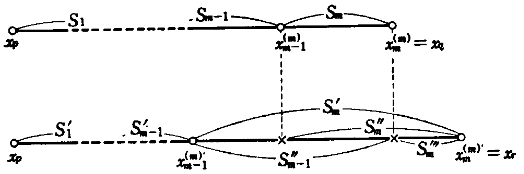

図 2 拡張区間における最適分割ベクトルの仮定
Fig. 2 Assumed classification for extended range.

$$\mu^{(m)'}=x_1^{(m)'}\cdot\sum_{j\in S_1'}f_j+x_2^{(m)'}\cdot\sum_{j\in S_2'}f_j+\cdots$$
$$+x_m^{(m)'}\cdot\sum_{j\in S_m}f_j+x_m^{(m)'}\cdot\sum_{j\in S_m'}f_j.$$
$$S_k=\{j\,|\,x_{k-1}^{(m)}<x_j\leq x_k^{(m)}\},$$
$$S_k'=\{j\,|\,x_{k-1}^{(m)'}<x_j\leq x_k^{(m)'}\}. \qquad (13)$$

$x_{m-1}^{(m)'}<x_{m-1}^{(m)}$ と仮定する．区間 $x_p\leq x_i\leq x_r$ の分布をmクラスに分割したときの分割ベクトルの一つを $\boldsymbol{x}^{(m)''}=(x_1^{(m)},\cdots,x_{m-1}^{(m)},x_m^{(m)'})$ とし，$\boldsymbol{x}^{(m)''}$ に対する目的関数値を $\mu^{(m)''}$ とする．

$$\mu^{(m)''}=x_1^{(m)}\sum_{j\in S_1}f_j+\cdots+x_{m-1}^{(m)}\cdot\sum_{j\in S_{m-1}}f_j$$
$$+x_m^{(m)'}\cdot\sum_{j\in S_m''}f_j.$$
$$S_m''=\{j\,|\,x_{m-1}^{(m)}<x_j\leq x_m^{(m)'}\} \qquad (14)$$

一方，目的関数 $\mu^{(m)'}$ は，次のように変形できる．

$$\mu^{(m)'}=x_1^{(m)'}\cdot\sum_{j\in S_1'}f_j+\cdots+x_{m-1}^{(m)'}\cdot\sum_{j\in S_{m-1}'}f_j$$
$$+x_m^{(m)'}\cdot\Big(\sum_{j\in S_{m-1}''}f_j+\sum_{j\in S_m'''}f_j\Big)$$
$$=x_1^{(m)'}\cdot\sum_{j\in S_1'}f_j+\cdots+x_{m-1}^{(m)'}\cdot\sum_{j\in S_{m-1}'}f_j$$
$$+x_m^{(m)}\cdot\sum_{j\in S_{m-1}''}f_j$$
$$+(x_m^{(m)'}-x_m^{(m)})\cdot\sum_{j\in S_{m-1}''}f_j$$
$$+x_m^{(m)'}\cdot\sum_{j\in S_m'''}f_j$$
$$S_{m-1}''=\{j\,|\,x_{m-1}^{(m)'}<x_j\leq x_m^{(m)}\}$$
$$S_m'''=\{j\,|\,x_m^{(m)}<x_j\leq x_m^{(m)'}\} \qquad (15)$$

一方，$(x_1^{(m)},x_2^{(m)},\cdots,x_m^{(m)})$ は，$x_p\leq x_i\leq x_q$ の分布をmクラスに分割したときの最適分割ベクトルであるので次式が成立する．

$$x_1^{(m)}\cdot\sum_{j\in S_1}f_j+\cdots+x_{m-1}^{(m)}\cdot\sum_{j\in S_{m-1}}f_j$$
$$+x_m^{(m)}\cdot\sum_{j\in S_m}f_j<x_1^{(m)'}\cdot\sum_{j\in S_1'}f_j+\cdots$$
$$+x_{m-1}^{(m)'}\cdot\sum_{j\in S_{m-1}'}f_jx+x_m^{(m)}\cdot\sum_{j\in S_{m-1}''}f_j \qquad (16)$$

ところで，$x_r=x_m^{(m)'}>x_q=x_m^{(m)}$，また，$x_{m-1}^{(m)'}<x_{m-1}^{(m)}$ と仮定したのであるから，

$$\sum_{j\in S_m}f_j<\sum_{j\in S_{m-1}''}f_j$$

が成立する．すると

$$(x_m^{(m)'}-x_m^{(m)})\cdot\sum_{j\in S_{m-1}''}f_j$$
$$>(x_m^{(m)'}-x_m^{(m)})\cdot\sum_{j\in S_m}f_j. \qquad (17)$$

(15), (16), (17) 式より

$$\mu^{(m)'}>x_1^{(m)}\cdot\sum_{j\in S_1}f_j+\cdots+x_m^{(m)}\cdot\sum_{j\in S_m}f_j$$
$$+(x_m^{(m)'}-x_m^{(m)})\cdot\sum_{j\in S_m}f_j+x_m^{(m)'}\cdot\sum_{j\in S_m'''}f_j$$
$$=x_1^{(m)}\cdot\sum_{j\in S_1}f_j+\cdots+x_{m-1}^{(m)}\cdot\sum_{j\in S_m}f_j$$
$$+x_m^{(m)'}\cdot\sum_{j\in S_m}f_j+x_m^{(m)'}\cdot\sum_{j\in S_m'''}f_j$$
$$=x_1^{(m)}\cdot\sum_{j\in S_1}f_j+\cdots+x_{m-1}^{(m)}\cdot\sum_{j\in S_{m-1}}f_j$$
$$+x_m^{(m)'}\cdot\sum_{j\in S_m''}f_j$$

(14)式より右辺は $\mu^{(m)''}$ そのものである．
ゆえに $\mu^{(m)'}>\mu^{(m)''}$．

これは最適分割ベクトル $\boldsymbol{x}^{(m)'}$ に対する目的関数値 $\mu^{(m)'}$ よりも小さい目的関数値 $\mu^{(m)''}$ を与える分割ベクトル $\boldsymbol{x}^{(m)''}$ が存在することを意味しており矛盾である．よって，$x_{m-1}^{(m)}\leq x_{m-1}^{(m)'}$ が成立する．
（証明終）

（補助定理 2） 部分区間 $x_p\leq x_i\leq x_q$ の分布を m クラスに分割したときの最適分割ベクトルを $\boldsymbol{x}^{(m)}=(x_1^{(m)},x_2^{(m)},\cdots,x_m^{(m)})$ とする．拡張区間 $x_s\leq x_i\leq x_q$ $(s<p)$ の分布を m クラスに分割したときの最適分割ベクトルを $\boldsymbol{x}^{(m)'}=(x_1^{(m)'},x_2^{(m)'},\cdots,x_m^{(m)'})$ とすると $x_1^{(m)'}\leq x_1^{(m)}$ が成立する．（証明略）

（補助定理 3） 部分区間 $x_p\leq x_i\leq x_q$ の分布を m クラスに分割したときの最適分割ベクトルを $\boldsymbol{x}^{(m)}=(x_1^{(m)},x_2^{(m)},\cdots,x_m^{(m)})$ とする．短縮区間 $x_p\leq x_i\leq x_r$ $(r<q)$ の分布をmクラスに分割したときの最適分割ベクトルを $\boldsymbol{x}^{(m)'}=(x_1^{(m)'},x_2^{(m)'},\cdots,x_m^{(m)'})$ とすると $x_{m-1}^{(m)'}\leq x_{m-1}^{(m)}$ が成立する．（証明略）

（補助定理 4） 部分区間 $x_p\leq x_i\leq x_q$ の分布を m クラスに分割したときの最適分割ベクトルを $\boldsymbol{x}^{(m)}=(x_1^{(m)},x_2^{(m)},\cdots,x_m^{(m)})$ とする．短縮区間 $x_s\leq x_i\leq x_q$ $(s>p)$ の分布を m クラスに分割したときの最適分割ベクトルを $\boldsymbol{x}^{(m)'}=(x_1^{(m)'},x_2^{(m)'},\cdots,x_m^{(m)'})$ とすると $x_1^{(m)}\leq x_1^{(m)'}$ が成立する．（証明略）

（定理 2） 区間 $x_1\leq x_i\leq x_n$ の分布を m クラスに分割したときの最適分割ベクトルを $\boldsymbol{x}^{(m)}=(x_1^{(m)},x_2^{(m)},\cdots,x_m^{(m)})$ とする．同区間の分布を $(m+1)$ クラスに分割したときの最適分割ベクトルを $\boldsymbol{x}^{(m+1)}=(x_1^{(m+1)},x_2^{(m+1)},\cdots,x_{m+1}^{(m+1)})$ とすると，

$$x_1^{(m+1)}\leq x_1^{(m)}\leq x_2^{(m+1)}\leq\cdots\leq x_{m-1}^{(m+1)}$$
$$\leq x_{m-1}^{(m)}\leq x_m^{(m+1)}<x_m^{(m)}=x_{m+1}^{(m+1)}$$

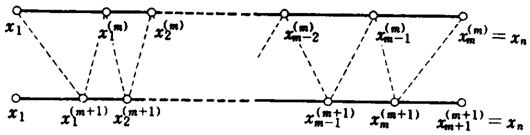

図 3 最適分割ベクトル $\boldsymbol{x}^{(m)}$ と $\boldsymbol{x}^{(m+1)}$ との関係
Fig. 3 Relation between $\boldsymbol{x}^{(m)}$ and $\boldsymbol{x}^{(m+1)}$.

が成立する．

（証明） 部分区間 $x_1 \le x_i \le x_m^{(m+1)}$ の分布を m クラスに分割したときの最適分割ベクトルは定理1より

$\boldsymbol{x}^{(m)\prime}=(x_1^{(m+1)}, x_2^{(m+1)}, \cdots, x_m^{(m+1)})$.

また，$x_m^{(m+1)} < x_m^{(m)}$ は明らかである．

$x_1 \le x_i \le x_m^{(m+1)}$ は $x_1 \le x_i \le x_m^{(m)}$ の短縮区間であるので，補助定理3より $x_{m-1}^{(m+1)} \le x_{m-1}^{(m)}$ が成立する．すると，$x_1 \le x_i \le x_{m-1}^{(m+1)}$ は $x_1 \le x_i \le x_{m-1}^{(m)}$ の短縮区間となる．補助定理3より $x_{m-2}^{(m+1)} \le x_{m-2}^{(m)}$ が成立する．$x_{m-3}^{(m+1)}, x_{m-4}^{(m+1)}, \cdots, x_1^{(m+1)}$ について，同様な議論を続けていくと，$x_{m-3}^{(m+1)} \le x_{m-3}^{(m)}$, $x_{m-4}^{(m+1)} \le x_{m-4}^{(m)}, \cdots, x_1^{(m+1)} \le x_1^{(m)}$ となる．

次に，部分区間 $x_1^{(m+1)} < x_i \le x_{m+1}^{(m+1)}$ の分布を m クラスに分割したときの最適分割ベクトルは定理1より，

$\boldsymbol{x}^{(m)\prime\prime}=(x_2^{(m+1)}, x_3^{(m+1)}, \cdots, x_{m+1}^{(m+1)})$.

また，$x_1 \le x_1^{(m+1)}$ は明らかである．

$x_1^{(m+1)} < x_i \le x_{m+1}^{(m+1)}$ は，$x_1 \le x_i \le x_m^{(m)}$ の短縮区間であるので，補助定理 4 より，$x_1^{(m)} \le x_2^{(m+1)}$ が成立する．すると，$x_2^{(m+1)} < x_i \le x_{m+1}^{(m+1)}$ は $x_1^{(m)} < x_i \le x_m^{(m)}$ の短縮区間となる．補助定理4より $x_2^{(m)} \le x_3^{(m+1)}$ が成立する．$x_4^{(m+1)}, x_5^{(m+1)}, \cdots, x_m^{(m+1)}$ についての同様な議論を続けていくと，$x_3^{(m)} \le x_4^{(m+1)}$, $x_4^{(m)} \le x_5^{(m+1)}, \cdots, x_{m-1}^{(m)} \le x_m^{(m+1)}$ となる．

ゆえに，$x_1^{(m+1)} \le x_1^{(m)} \le x_2^{(m+1)} \le x_2^{(m)} \le x_3^{(m+1)} \le \cdots \le x_{m-1}^{(m+1)} \le x_{m-1}^{(m)} \le x_m^{(m+1)} < x_m^{(m)} = x_{m+1}^{(m+1)}$ が成立する． （証明終）

（系1） 区間 $x_1 \le x_i \le x_n$ の分布を m クラスに分割したときの最適分割ベクトルを $\boldsymbol{x}^{(m)}=(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots, x_m^{(m)})$ とする．部分区間 $x_p^{(m)} < x_i \le x_r$, ($x_q^{(m)} \le x_r < x_{q+1}^{(m)}$) の分布を $(q-p)$ クラスに分割したときの最適分割ベクトルを $\boldsymbol{x}^{(q-p)}=(x_{p+1}^{(q-p)}, x_{p+2}^{(q-p)}, \cdots, x_q^{(q-p)})$ とすると $x_{p+1}^{(m)} \le x_{p+1}^{(q-p)} \le x_{p+2}^{(m)} \le \cdots \le x_{q-1}^{(q-p)} \le x_q^{(m)} \le x_q^{(p-q)} = x_r$ が成立する．

（証明略）

（系2） 区間 $x_1 \le x_i \le x_n$ の分布を m クラスに分割したときの最適分割ベクトルを $\boldsymbol{x}^{(m)}=(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots, x_m^{(m)})$ とする．部分区間 $x_s \le x_i \le x_q^{(m)}$, ($x_{q-1}^{(m)} < x_s \le x_p^{(m)}$) の分布を $(q-p)$ クラスに分割したときの最適分割ベクトルを $\boldsymbol{x}^{(q-p)}=(x_{p+1}^{(q-p)}, x_{p+2}^{(q-p)}, \cdots, x_q^{(q-p)})$ とすると，$x_{p+1}^{(q-p)} \le x_{p+1}^{(m)} \le x_{p+2}^{(q-p)} \le \cdots \le x_{q-1}^{(q-p)} \le x_{q-1}^{(m)}$ が成立する． （証明略）

（系3） 区間 $x_1 \le x_i \le x_n$ の分布を m クラスに分割したときの最適分割ベクトルを $\boldsymbol{x}^{(m)}=(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots, x_m^{(m)})$ とする．部分区間 $x_p^{(m)} < x_i \le x_r$, ($x_{q-1}^{(m)} \le x_r \le x_q^{(m)}$) の分布を $(q-p)$ クラスに分割したときの最適分割ベクトルを $\boldsymbol{x}^{(q-p)}=(x_{p+1}^{(q-p)}, \cdots, x_q^{(q-p)})$ とすると，$x_{p+1}^{(q-p)} \le x_{p+1}^{(m)} \le x_{p+2}^{(q-p)} \le \cdots \le x_q^{(q-p)} = x_r \le x_b^{(m)}$ が成立する． （証明略）

（系4） 区間 $x_1 \le x_i \le x_n$ の分布を m クラスに分割したときの最適分割ベクトルを $\boldsymbol{x}^{(m)}=(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots, x_m^{(m)})$ とする．部分区間 $x_s \le x_i \le x_q^{(m)}$, ($x_p^{(m)} \le x_s < x_{p+1}^{(m)}$) の分布を $(q-p)$ クラスに分割したときの最適ベクトルを $\boldsymbol{x}^{(q-p)}=(x_{p+1}^{(q-p)}, x_{p+2}^{(q-p)}, \cdots, x_q^{(q-p)})$ とすると，$x_{p+1}^{(m)} \le x_{p+1}^{(q-p)} \le x_{p+2}^{(m)} \le \cdots \le x_{q-1}^{(m)} \le x_{q-1}^{(q-p)} \le x_q^{(m)} = x_q^{(q-p)}$ が成立する．

（証明略）

3. 解 法

定理2より，分布を m クラスに分割したときの最適分割ベクトルが判れば，$(m+1)$ クラスに分割したときの最適分割ベクトルの範囲が限定できるので，この性質を利用した手順を次に述べる．

[手順 I]

区間 $x_1 \le x_i \le x_n$ の分布を j クラスに分割したときの最適分割ベクトルを $\boldsymbol{x}^{(j)}=(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \cdots, x_j^{(j)})$ とし，同区間を $(j+1)$ クラスに分割したときの分割ベクトルを $\boldsymbol{x}_i^{(j+1)}=(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots x_{i_{j+1}})$ とする．

（I） $1 \to j$ とする．$x_1^{(1)}=x_n$.

（II） $x_1 \le x_{i_1} \le x_1^{(j)}$, $x_1^{(j)} \le x_{i_2} \le x_2^{(j)}, \cdots, x_{j-1}^{(j)} \le x_{i_j} < x_j^{(j)}$ を満たす $x_{i_k}(k=1, 2, \cdots, j)$ 及び $x_{i_{j+1}}=x_n$ を取り出し，目的関数 μ を計算し，μ が最小となる分割ベクトル $\boldsymbol{x}_i^{(j+1)}$ を選び最適分割ベクトル $\boldsymbol{x}^{(j+1)}=(x_1^{(j+1)}, x_2^{(j+1)}, \cdots, x_{j+1}^{(j+1)})$ とする．

（III） $j+1 \to j$ とし（II）を $j=m-1$ まで繰返し $\boldsymbol{x}^{(m)}$ を得る．

（定理3） $\boldsymbol{x}^{(j)}(j=1, 2, \cdots, m)$ が唯一つ存在する場合手順 I は高々 $\sum_{j=1}^{m-1}(\lfloor(n-1)/j\rfloor+1)^j$ の組合せ計算で最適分割ベクトル $\boldsymbol{x}^{(m)}$ が求まる．

（証明） 集合 $\{x_k\}$ の部分集合 $X_l^{(j)}(l=1, 2, \cdots, j)$

を考える.

$$\left.\begin{array}{l} X_l^{(j+1)}=\{x_i \mid x_{l-1}^{(j)}\leq x_i\leq x_l^{(j)}\} \\ \qquad x_0^{(j)}=x_1,\ (l=1,2,\cdots,j_{-1}) \\ X_j^{(j+1)}=\{x_i \mid x_{j-1}^{(j)}\leq x_i< x_n\} \\ X_{j+1}^{(j+1)}=\{x_n\} \end{array}\right\} \quad (18)$$

定理2より，$(j+1)$ クラスに分割したときの最適分割ベクトルの各要素は，それぞれの部分集合 $X_l^{(j+1)}$ の要素になっている．すなわち，$x_1^{(j+1)}\in X_1^{(j+1)}$, $x_2^{(j+1)}\in X_2^{(j+1)},\cdots,x_{j+1}^{(j+1)}\in X_{j+1}^{(j+1)}$. そこで部分集合 $X_l^{(j+1)}$ の要素の数を p_l とし，各部分集合 $X_l^{(j+1)}$ から，$(j+1)$ クラスにおける最適分割ベクトルの候補を取り出す組合せ数は次式で与えられる.

$$\left.\begin{array}{l} N_{j+1}=p_1\cdot p_2\cdot\cdots p_j\cdot p_{j+1} \\ \text{また,}\quad \sum_{k=1}^{j} p_k=n+j-1,\quad P_{j+1}=1. \end{array}\right\} \quad (19)$$

よって $N_{j+1}\leq(\lfloor(n-1)/j\rfloor+1)^j$ となり $j=2,3,\cdots,m$ と分割していく組合せ数は，$N=\sum_{j=1}^{m-1}N_{j+1}\leq\sum_{j=1}^{m-1}(\lfloor(n-1)/j\rfloor+1)^j$ となる.　(証明終)

手順Ｉでは，２クラスに分割したときの最適分割ベクトルから３クラスに分割したときの最適分割ベクトルを求めるという具合に，クラス数の小さい順に，逐次最適分割ベクトルを求め，最終的に所要の最適分割ベクトルを求めた．定理２に基づいて，j クラスに分割した場合の最適分割ベクトルを利用して $(j+1)$ クラスに分割した場合の最適分割ベクトルの各要素の存在範囲を限定することによって，総当たり組合せ法に比較すると計算量を減少させることができた．次に，計算量をさらに減少させるための準備を行う.

(系５)　区間 $x_1\leq x_i\leq x_n$ の分布を m クラスに分割したときの最適分割ベクトルを $\boldsymbol{x}^{(m)}=(x_1^{(m)}, x_2^{(m)},\cdots,x_m^{(m)})$ とする．$x_{j-1}^{(m)}\leq x_k\leq x_j^{(m)}$ を満たすある x_k が区間 $x_1\leq x_i\leq x_n$ の分布を $(m+1)$ クラスに分割したときの最適分割ベクトル $\boldsymbol{x}^{(m+1)}$ の要素であるための必要十分条件は,「区間 $x_1\leq x_i\leq x_l$, $(x_j^{(m)}\leq x_l\leq x_{j+1}^{(m)})$ を，$(j+1)$ クラスに分割する最適分割ベクトル $\boldsymbol{x}^{(j+1)}=(x_1^{(j+1)}, x_2^{(j+1)},\cdots,x_j^{(j+1)},x_l)$ の要素 $x_j^{(j+1)}$ が x_k であるような x_l が存在し，かつ x_l が最適分割ベクトル $\boldsymbol{x}^{(m+1)}$ の要素である」ことである

(証明)　x_k が最適分割ベクトル $\boldsymbol{x}^{(m+1)}$ の要素であるとすると定理２より $x_k=x_j^{(m+1)}$ である．x_l として $x_{j+1}^{(m+1)}$ を選ぶと定理１より部分区間 $x_1\leq x_i\leq x_l$ の分布を $(j+1)$ クラスに分割したときの最適分割ベクトルの要素の一つが x_k であることは明らかである.

次に，x_l が最適分割ベクトル $\boldsymbol{x}^{(m+1)}$ の要素であるとすると定理２より $x_l=x_{j+1}^{(m+1)}$ である．さて，部分区間 $x_1\leq x_i\leq x_{j+1}^{(m+1)}$ の分布を $(j+1)$ クラスに分割したときの最適分割ベクトル $\boldsymbol{x}^{(j+1)}$ の要素 $x_j^{(j+1)}$ (すなわち x_k) が最適分割ベクトル $\boldsymbol{x}^{(m+1)}$ の要素の一つでないと仮定する．すると $\boldsymbol{x}^{(m+1)}$ の要素 $x_j^{(m+1)}$ を x_k で置き換えて作った新しい分割ベクトル $\boldsymbol{x}^{(m+1)\prime}$ に対する目的関数の値が，$\boldsymbol{x}^{(m+1)}$ に対する目的関数の値より小さくなることを，定理１の証明と同様に示すことができる．これは矛盾であるので，x_k は最適分割ベクトル $\boldsymbol{x}^{(m+1)}$ の要素の一つである.　(証明終)

(系６)　区間 $x_1\leq x_i\leq x_n$ の分布を m クラスに分割したときの最適分割ベクトルを $\boldsymbol{x}^{(m)}=(x_1^{(m)}, x_2^{(m)},\cdots,x_m^{(m)})$ とする．$x_{j-1}^{(m)}\leq x_k\leq x_j^{(m)}\leq x_l\leq x_{j+1}^{(m)}$ なる $x_k, x_l(x_k<x_l)$ をとり，部分区間 $x_1\leq x_i\leq x_k$, $x_1\leq x_i\leq x_l$ の分布をそれぞれ，j クラス，$(j+1)$ クラスに分割する最適分割ベクトルを $\boldsymbol{x}_{(k)}^{(j)}=(x_{1,k}^{(j)}, x_{2,k}^{(j)},\cdots,x_{j,k}^{(j)})$, $\boldsymbol{x}_{(l)}^{(j+1)}=(x_{1,l}^{(j+1)}, x_{2,l}^{(j+1)},\cdots,x_{j+1,l}^{(j+1)})$, それぞれの対応する目的関数値を $\mu_k^{(j)}$, $\mu_l^{(j+1)}$ とする．このとき $x_k=x_{j,l}^{(j+1)}$ なら $\mu_l^{(j+1)}=\mu_k^{(j)}+x_l\cdot\sum_{p\in S_{j+1}^{(l)}}f_p$, $S^{(l)}{}_{j+1}=\{p\mid x_k<x_p\leq x_l\}$ である.

(証明)　定理１より $x_{i,k}^{(j)}=x_{i,l}^{(j+1)}$ $(i=1,2,\cdots,j)$. したがって目的関数の定義より系６が成立することは明らかである.　(証明終)

手順Ｉの(II)では，部分集合 $X_l^{(j+1)}$ の各々から，$(j+1)$ クラスに分割したときの最適分割ベクトルの要素の候補を一つずつ取り出して，そのすべての組合せに対し目的関数を計算していた．系５と系６は部分集合 $X_l^{(j+1)}$ を一つずつ逐次的に取り出し，部分的な評価によって以後の評価対象とすべき候補を限定し計算量を減らすことができることを示している．次に系５と系６を利用した手順を示す.

[手順II]

区間 $x_1\leq x_i\leq x_n$ の分布を j クラスに分割したときの最適分割ベクトル $\boldsymbol{x}^{(j)}$ をもとにして $(j+1)$ クラスに分割したときの最適分割ベクトル $\boldsymbol{x}^{(j+1)}$ を求めることを基本とする．そこで次の手順を $j=1$ から順次 $(m-1)$ まで繰り返すことによって，m クラスに分割したときの最適分割ベクトル $\boldsymbol{x}^{(m)}$ を求める.

(Ｉ)　$1\to l$ とし，$x_1\leq x_i\leq x_l^{(j)}$ (ただし $l=j$ のときは，$x_1\leq x_i<x_l^{(j)}$ をとる) に属する x_i の個数を $P_l^{(j)}$ とする．$P_l^{(j)}$ 個の部分区間 $x_1\leq x_h\leq x_i$ の分布に対して (20) 式より各々の目的関数値 $\mu_i^{(l)}$ を

求める．このときの x_i を $x_i^{(l)}$ と表わし，$P_l^{(j)}$ 組の $(\mu_i^{(l)}, x_i^{(l)})$ を記録する．

$$\mu_i^{(l)} = x_i \cdot \sum_{k\in S_i^{(l)}} f_k$$

$$S_i^{(l)} = \{k \mid x_1 \le x_k \le x_i\} \qquad (20)$$

(II) $l+1\to l$ とする．$l>j$ ならば (III) に進む．$l\le j$ ならば以下の計算を行う．$x_{l-1}^{(j)}\le x_i\le x_l^{(j)}$ (ただし，$l=j$ のときは $x_{l-1}^{(j)}\le x_i< x_l^{(j)}$ をとる) に属する x_i の個数を $P_l^{(j)}$ とする．$P_l^{(j)}$ 個の部分区間 $x_1\le x_k\le x_i$ に対して，各々の最小目的関数値 $\mu_i^{(l)}$ とその $\mu_i^{(l)}$を与える分割の標識 p を(21)式より求める．このときの x_i を $x_i^{(l)}$と表わす．一方，$\mu_p^{(l-1)}$ に対して $x_{p_{l-1}}^{(l-1)}, x_{p_{l-2}}^{(l-2)}, \cdots, x_{p_1}^{(1)}$ がすでに求まっている．そこで $P_l^{(j)}$組の $(\mu_i^{(l)}, x_i^{(l)}, x_{p_{l-1}}^{(l-1)},\cdots, x_{p_1}^{(1)})$ を記録する．そして (II) を繰り返すと，$P_2^{(j)}$ 組の $(\mu_i^{(2)}, x_i^{(2)}, x_{p_1}^{(1)})$，$P_3^{(j)}$ 組の $(\mu_i^{(3)}, x_i^{(3)}, x_{p_2}^{(2)}, x_{p_1}^{(1)}),\cdots$，という具合に記録されていき，$l=j$ の時点には $P_j^{(j)}$ 組の $(\mu_i^{(j)}, x_i^{(j)}, x_{p_{j-1}}^{(j-1)},\cdots, x_{p_1}^{(1)})$ が記録される．

$$\mu_i^{(l)} = \mathop{\mathrm{Min}}_{p\in S_i^{(l-1)\prime}} \Big(x_i\cdot \sum_{k\in S_i^{(l)}} f_k + \mu_p^{(l-1)}\Big)$$

$$S_i^{(l-1)\prime} = \{p \mid x_{l-2}^{(j)} \le x_p \le x_{l-1}^{(j)},\ x_0^{(j)}=x_1\}$$

$$S_i^{(l)} = \{k\mid x_p < x_k \le x_i\} \qquad (21)$$

(III) $x_i\le x_k\le x_n$ の分布に対して，(22)式より最小目的関数値 $\mu^{(j+1)}$ を求める．$\mu^{(j+1)}$ に対して $\mu_p^{(j)}$ が定まるので，すでに求めた $P_j^{(j)}$ 組の $(\mu_i^{(j)}, x_i^{(j)}, x_{p_{j-1}}^{(j-1)},\cdots,x_{p_1}^{(1)})$の中から該当する組を選び，この組に x_n をつけ加えたものが，求める最適分割ベクトル $\boldsymbol{x}^{(j+1)}$ である．

$$\mu^{(j+1)} = \mathop{\mathrm{Min}}_{p\in S_n^{(j)\prime}} \Big(x_n\cdot \sum_{k\in S_n^{(j+1)}} f_k + \mu_p^{(j)}\Big)$$

$$S_n^{(j)\prime} = \{p \mid x_{j-1}^{(j)} \le x_p < x_j^{(j)}\}$$

$$S_n^{(j+1)} = \{k\mid x_p < x_k \le x_n\} \qquad (22)$$

(I)では $P_1^{(j)}$ 個の $x_1^{(j+1)}$ の候補を求めているのは明らかである．(II)では，$x_{l-1}^{(j)}\le x_i\le x_l^{(j)}$ に属する $P_l^{(j)}$ 個の x_i を端点にとり，$P_l^{(j)}$ 個の異なった部分区間 $x_1\le x_k\le x_i$ の分布を l クラスに分割するときの各々の最適分割ベクトルを求めている．$l=j$ の時点では，異なった $P_j^{(j)}$ 個の部分区間 $x_1\le x_k\le x_i$，$(x_{j-1}^{(j)}\le x_i< x_j^{(j)})$ の分布ごとに j クラスに分割したときの最適分割ベクトルを求めている．これは $x_1\le x_i\le x_n$ の分布を $(j+1)$ クラスに分割したときの最適分割ベクトルの要素 $x_1^{(j+1)}, x_2^{(j+1)},\cdots, x_j^{(j+1)}$ の候補であることは系5より明らかである．(III)では，端点 x_n が決まることにより最適分割ベクトルの候補の中から最適分割ベクトル $\boldsymbol{x}^{(j+1)}$ を決定していることとは系5，系6より明らかである．

表 1　簡単な数値例

Table 1　An example of distribution.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
f_i	2	6	5	3	1	8	4	7

次に，**表1**で与えられた分布を3グループに分割する例でもって上記手順を説明する．このとき (I)，(II)，(III) が一度実行されて，2グループに分割するときの最適分割ベクトル $\boldsymbol{x}^{(2)}$ が求まっているとする．すなわち，$x_1^{(2)}=x_3=3$，$x_2^{(2)}=8$ である．

(I)より $x_1\le x_i\le x_1^{(2)}=x_3$ の各々の x_i に対して $\mu_i^{(1)}$ を求める．

x_1 : $\mu_1^{(1)}=2$，x_2 : $\mu_2^{(1)}=16$，x_3 : $\mu_3^{(1)}=39$.

(II)より．$x_1^{(2)}=x_3\le x_i< x_2^{(2)}=x_8$ の各々の x_i に対して $\mu_i^{(2)}$ を求める．

x_3 : $\mu_3^{(2)}=\mathrm{Min}\,(35, 31)=31$　: $\boldsymbol{x}_{(3)}^{(2)}=(x_2, x_3)$

x_4 : $\mu_4^{(2)}=\mathrm{Min}\,(58, 48, 51)=48$: $\boldsymbol{x}_{(4)}^{(2)}=(x_2, x_4)$

x_5 : $\mu_5^{(2)}=\mathrm{Min}\,(77, 61, 59)=59$: $\boldsymbol{x}_{(5)}^{(2)}=(x_3, x_5)$

x_6 : $\mu_6^{(2)}=\mathrm{Min}\,(140, 118, 111)=111$

: $\boldsymbol{x}_{(6)}^{(2)}=(x_3, x_6)$

x_7 : $\mu_7^{(2)}=\mathrm{Min}\,(191, 163, 151)=151$

: $\boldsymbol{x}_{(7)}^{(2)}=(x_3, x_7)$

(III)より x_8 に対して $\mu^{(3)}$ を求める．

$\mu^{(3)}=\mathrm{Min}\,(215, 208, 211, 199, 207)=199$

: $\boldsymbol{x}^{(3)}=(x_3, x_6, x_8)$

となり最適分割ベクトル $\boldsymbol{x}^{(3)}=(x_3, x_6, x_8)$ が求まる．

次に $\boldsymbol{x}^{(j)}(j=1,2,\cdots,m)$ が唯一つ存在する場合の手順IIを実行するのに必要とする計算量を評価する．(I) で目的関数 $\mu_i^{(1)}$ を評価する回数は $N_{\mathrm{I}}=P_1^{(j)}$，(II) で目的関数 $\mu_i^{(l)}$ を評価する回数は $N_{\mathrm{II}}=\sum_{i=2}^{j} P_{i-1}^{(j)}\cdot P_i^{(j)}$，(III)で目的関数 $\mu^{(j+1)}$ を評価する回数は $N_{\mathrm{III}}=P_j^{(j)}$ である．そうすると $N=P_1^{(j)}+\sum_{i=2}^{j} P_{j-1}^{(j)}\cdot P_i^{(j)}$，$\sum_{i=1}^{j} P_i^{(j)}=n+j-1$ となる．$j\ll n$ とすると N は $O(n^2)$ となり N が $O(m)$ 回繰り返されるので，目的関数を評価する回数は $O(m\cdot n^2)$ となる．

4. む す び

区間 $x_1\le x_i\le x_n$ の分布を m クラスに分割するとき，目的関数 μ を最小とする最適分割ベクトル $\boldsymbol{x}^{(m)}$

を求める問題について考察を行った．最適分割ベクトルの存在範囲についての性質を調べて定理としてまとめ，それを証明した．これらの定理を利用し，特に解の存在範囲を限定することにより，少ない計算量で最適ベクトルを求める解法を提案した．本解法では$O(m \cdot n^2)$の組合せ計算で最適分割ベクトルが求まることが判明した．この問題に対し，計算量の下界を求めることが今後の課題である．

最後に本研究に対し，激励して下さった京都大学萩原宏教授に感謝いたします．

参考文献

1) Aho, A. V., Hopcroft, J. E. and Ullman, J. D.: The Design and Analysis of Computer Algorithms, Addison-Wesley (1974).
2) Weide, B.: A Survey of Analysis Techniques for Discrete Algorithms, Comput. Surv. Vol. 9, No. 4, pp. 291-313 (1977).
3) 伊理，野崎，野下（編）：計算の効率化とその限界，日本評論社 (1980).
4) 福村晃夫：アルゴリズムとその解析の動向と展望，情報処理，Vol. 21, No. 5, pp. 550-557 (1980).
5) 岩根，佐藤，溝口：マイクロ命令実行時間分布に基づく最適マシンサイクル時間決定法，信学論(D), J 63-D, No. 12, pp. 1050-1057 (1980).

（昭和56年4月15日受付）
（昭和56年11月18日採録）