

45° 系格子パターンに含まれる形式的折り線図の 平坦折り可能性評価手法

松川 剛久† 金森 由博‡ 三谷 純‡

†筑波大学システム情報工学研究科 ‡筑波大学システム情報系

1. はじめに

折り紙は、その幾何学的性質から主に数学の分野で研究されてきた。これらの折り紙の数理に関する研究によって、折り紙の設計理論が確立し、計算機に実装された。近年では計算機の性能の向上によって、限定された折り操作であれば、その操作で得られる折り紙のすべての形が、現実的な時間で列挙することが可能になった。山本らは、図1の4×4の「45°系格子パターン」には259,659,330通りの形式的折り線図[1]（紙の交差を考慮せず山谷の割当てをしないう折り線の配置を記した図）が含まれ、それらを平坦折りすることで得られる形は13,451種あることを示した[2]。つまり、複数の形式的折り線図から同じ形に折り畳まれる場合がある（図2）。しかし、文献[2]で列挙した形式的折り線図は紙の交差を考慮していないため、実際には紙の交差によって、折り畳めない形が存在する可能性がある。

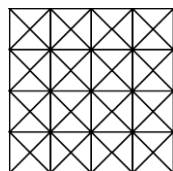


図1 4×4の45°系格子パターン

本研究では、45°系格子パターンに含まれる形式的折り線図が、平坦折り可能であるか評価する方法を提案し、文献[2]で列挙された形13,451種がすべて、実際に紙を折って作成できるものであることを確認した。また、4×4だけではなく、文献[2]と同様の方法で2×2、3×3の45°系格子パターンに含まれる形式的折り線図と平坦折り後の形を列挙し、それらの平坦折り可能性を調べた。その結果、形式的折り線図と平坦

折り後の形の数、2×2ではそれぞれ116、26であり、3×3ではそれぞれ58,530、365であった。また、実山谷系が存在しない形式的折り線図（矛盾のない山谷の割り当てを行うことができない折り線図）を複数見出すとともに、平坦折りできない最小の形式的折り線図を発見した。文献[3]より、一般的な形式的折り線図の平坦折り可能性と実山谷系が存在するか否かの評価はNP困難であることが示されているが、本研究で扱う形式的折り線図は折り線の配置に制限を設けているため、現実的な時間で解が求まった。

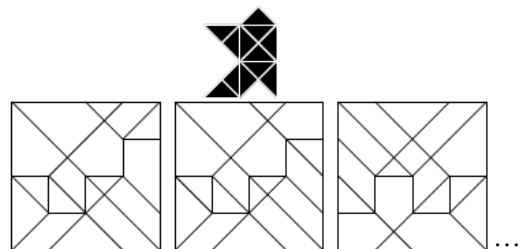


図2 複数の形式的折り線図から同じ形に折り畳まれる例。（上）折り畳まれる形（下）上の形に折り畳まれる形式的折り線図の一部

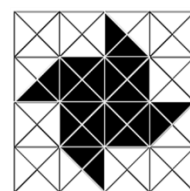


図3 格子パターン上に存在する単位三角形領域から構成される平坦折り形状

2. 平坦折り可能性の判定

形式的折り線図が折り畳み可能であるかは、形式的折り線図を折り線によって複数の多角形（構成面）に分割し、それらが交差しない重なり方が存在するか否かで判定する。

この判定は、単位三角形領域（図3）ごとに含まれる構成面の重なり順序の決定と、複数の単位三角形領域間の整合性に関する2つの問題に分離して行う。なお、図4と5は単位三角形領域ごとに着目した時の構成面の断面図であり、図4の黒丸は単位三角形領域の境界を表している。

Verification of Flat-Foldability of a Formal Crease Patterns on the 45 Degree Grid System

Yoshihisa MATSUKAWA†, Yoshihiro KANAMORI‡, Jun MITANI‡

†Graduate School of Systems and Information Engineering, University of Tsukuba ‡ Information and Systems, University of Tsukuba

2.1. 単位三角形領域ごとの紙の交差

単位三角形領域ごとに含まれる構成面の重なり順序を考えると、紙の交差が生じる重なり方には以下の2通りがある。

- (a) 領域境界で上下に接続する2つの構成面 F_i 、 F_i' の間を別の構成面が横切る(図4左)
- (b) 領域境界で上下に接続する構成面の組が複数存在し、互い違いになる(図4右)

このような状態を排除し、妥当な構成面の重なり順序を、各単位三角形領域について順番に決めていく。

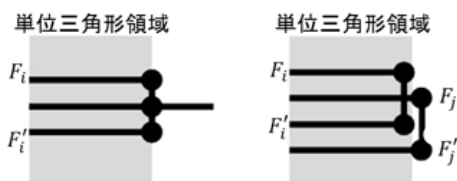


図4 領域境界で紙の交差が生じるケース

2.2. 複数の単位三角形領域間での整合性

図5のように、単位三角形領域 T_A では構成面 F_i が構成面 F_j より上にあるのに対し、異なる単位三角形領域 T_B では構成面 F_j が構成面 F_i より上にある場合、やはり紙の交差が生じてしまう。このような状態を排除するため、各単位三角形領域での妥当な重なり方を深さ優先探索で決定し、複数の単位三角形領域間での整合性が満たされない場合はバックトラックを行うことで、全体で整合性のある多角形の重なり順を決定する。

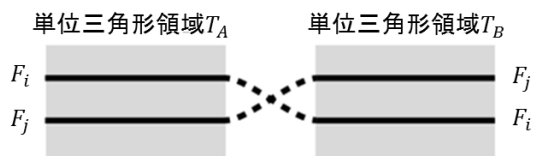


図5 複数の単位三角形領域間での整合性が満たされない重なり方

3. 実山谷系存在可能性の判定

形式的折り線図が平坦折りできない理由には以下の2つがある。

- ・ 実山谷系が存在しない
- ・ 大域的な紙の衝突が生じる

上記の2つは、いずれも紙の交差が原因であるため、2節で述べた方法では、上記のどちらの理由に依るものか判定できない。そこで、平坦折りできない形式的折り線図に対して、以下の方法で実山谷系の存在を判定する。

まず、すべての内部頂点に対して、順番に局所平坦折り可能である山谷の割り当てパターン

を当てはめていく。深さ優先で進め、可能な割り当てが存在しない場合は、バックトラックを行う。全体を通して矛盾の無い山谷の割り当てができない場合には、実山谷系は存在しない。そうでない場合には大域的な紙の衝突が原因で折り畳められないと判定できる。

4. 結果

今回提案した平坦折り可能性の判定法により、13,451種のすべての形が平坦折り可能であることを確認した。また、形式的折り線図の平坦折り可能性を調べていくなかで、平坦折りできない形式的折り線図が発見された。また、実山谷系を持たない形式的折り線図も複数発見された。発見された実山谷系を持たない形式的折り線図の中で、折り線数が最少のものは図6左であった。文献[4]で、Hullらによって、 45° 系格子パターンに限定しない実山谷系を持たない形式的折り線図の折り線数最少のものが示されている(図6右)。図6左で示した形式的折り線図は、 $N \times N$ の 45° 系格子パターンにおける実山谷系を持たない形式的折り線図の折り線数最少のものである。

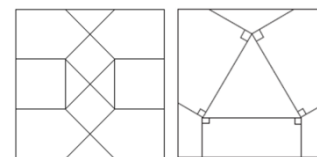


図6 実山谷系を持たない最小の形式的折り線図。左は $N \times N$ の 45° 系格子パターンにおける最小のもの。右は 45° 系格子パターンに限定しないもの。

5. 展望

45° 系格子パターンに含まれる平坦折りできない形式的折り線図の列挙を行う。また、紙の表と裏の色の違いを利用して模様を作る折紙作品がある。実際に折り畳める 45° 系格子パターンに含まれる形式的折り線図では、どのような模様を持った作品が折り畳まれるかを調べていきたい。

参考文献

- [1] 川崎敏和, "バラと折り紙と数学と", 森北出版株式会社, 1998.
- [2] 山本陽平, 三谷純, "45°系パターンから作りだされる平坦折り形状の列挙", 折り紙の科学, Vol.4, No.1, pp.23-33, 2015.
- [3] M. Bern, B. Hayes, "The Complexity of Flat Origami", Proceedings of the Seventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, pp. 175-183, 1996.
- [4] Thomas C. Hull, "On the mathematics of flat origamis", Congressus Numerantium, vol.100, pp. 215-224, 1994.