6J-01

フィードバック独立点集合問題の計算複雑性 *

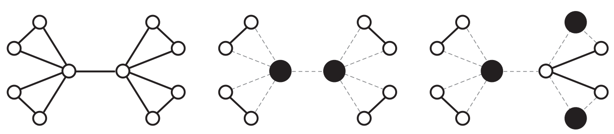
田村 祐馬 †,1,2, 伊藤 健洋 ‡ 1, 周 暁 § 1

[1] 東北大学 大学院情報科学研究科
[2]JST, ERATO, 河原林巨大グラフプロジェクト

1　はじめに

点集合 V と（無向）辺集合 E からなるグラフを $G=(V,E)$ と書く．G から点部分集合 $V' \subseteq V$ を削除すると，残るグラフが森となるとき，V' は G の**フィードバック点集合**と呼ばれる．例えば，図 1(b) は図 1(a) のグラフのフィードバック点集合である．**フィードバック点集合問題**とは，与えられたグラフに対し，最小サイズのフィードバック点集合を求める問題である．本稿では，グラフ G に対する最小のフィードバック点集合の大きさを $\mathsf{OPT}_{\mathrm{FVS}}(G)$ と表記する．フィードバック点集合は任意のグラフ $G=(V,E)$ に対して存在し，特に $\mathsf{OPT}_{\mathrm{FVS}}(G) \leq |V|-2$ であることに注意されたい．この問題にはオペレーティングシステムにおけるデッドロックの解消を始めとした多彩な応用が存在し，グラフ理論における中心的な問題として 40 年以上研究が行われている．

近年，フィードバック点集合問題に対する新たな知見を得るために，フィードバック独立点集合問題が文献 [2] にて提案された．グラフ $G=(V,E)$ の点部分集合 $I \subseteq V$ において，I に含まれるどの 2 点も隣接しないとき，I は G の**独立点集合**と呼ばれる．G のフィードバック点集合 V' が独立点集合であるとき，V' は G の**フィードバック独立点集合**と呼ばれる．したがって，



(a)　(b)　(c)

図 1: (a) 入力グラフ G，(b) G のフィードバック点集合，(c) G のフィードバック独立点集合．

図 1(c) は図 1(a) のグラフのフィードバック独立点集合であるが，図 1(b) はフィードバック独立点集合ではない．従来のフィードバック点集合と違い，フィードバック独立点集合が存在しないグラフもあることに注意しよう．**フィードバック独立点集合問題**とは，与えられたグラフにフィードバック独立点集合が存在するか判定し，存在する場合には最小サイズのフィードバック独立点集合を求める問題である．本稿では，グラフ G に対する最小のフィードバック独立点集合の大きさを $\mathsf{OPT}(G)$ と表記する．ただし，G にフィードバック独立点集合が存在しないとき，$\mathsf{OPT}(G)=+\infty$ とする．

フィードバック独立点集合問題は，最大次数 4 の平面二部グラフですら NP 困難であるため，文献 [2] では解サイズをパラメータとした固定パラメータ容易性が示されている．一方で，入力グラフの構造を利用して計算容易性を明らかにする研究も行われており，木幅制限グラフや弦グラフ，コグラフに対しては線形時間で解けることが知られている [3]．

本稿では，フィードバック独立点集合に関して，より詳細な計算困難性と近似可能性の解析を与える．まず，与えられたグラフ G にフィードバック独立点集合が存在するかどうか，すなわち $\mathsf{OPT}(G) \neq +\infty$ であるかどうか判定する問題は NP 完全であることを示す．次に，$\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ の仮定の下では，任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対し，平面二部グラフにおいて多項式時間 $n^{1-\varepsilon}$ 倍近似アルゴリズムは存在しないことを示す．ここで，n はグラフの点数である．最後に，最大次数 Δ の二部グラフに対し，多項式時間 $(\Delta-1)$ 倍近似アルゴリズムを提案する．

2　存在判定問題の NP 完全性

本節では，入力グラフにフィードバック独立点集合が存在するか判定する問題を扱う．具体的には，以下の定理を与える．

定理 1 最大次数 4 の平面三部グラフ G に対し，$\mathsf{OPT}(G) \neq +\infty$ であるかの判定は NP 完全である．

*Complexity of the Independent Feedback Vertex Set Problem
†Yuma Tamura
‡Takehiro Ito
§Xiao Zhou
[1]Graduate School of Information Sciences, Tohoku University
[2]JST, ERATO, Kawarabayashi Large Graph Project

定理 1 は，NP 完全であることが知られているハミルトン閉路問題から，本問題への多項式時間帰着を構築することによって証明できる．ここでは，詳細は省略する．

3 近似可能性

本節では，まず以下の近似困難性を示すが，その証明は省略する．

定理 2 ε を任意の正の実数とする．$\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ の仮定の下では，フィードバック独立点集合問題に対する多項式時間 $n^{1-\varepsilon}$ 倍近似アルゴリズムは平面二部グラフでさえ存在しない．ここで，n は入力グラフの点数である．

一方で，定理 2 の対比として，本節では次の近似容易性を示す．なお，$\Delta \leq 2$ のグラフに対しては，最適解が多項式時間で計算できることに注意されたい．

定理 3 最大次数 $\Delta \geq 3$ の任意の二部グラフにおけるフィードバック独立点集合問題に対し，多項式時間 $(\Delta - 1)$ 倍近似アルゴリズムが存在する．

本稿の提案するアルゴリズムは，以下の通りである．ただし，グラフ G の点 u に対し，u に隣接している点の集合を $N(u)$ と表す．

Algorithm 1 $(\Delta - 1)$ 倍近似アルゴリズム

入力： 二部グラフ $G = (A, B, E)$
出力： G のフィードバック独立点集合 F

1: 従来のフィードバック点集合問題に対する多項式時間 2 倍近似アルゴリズム [1] を用いて，G のフィードバック点集合 F' を得る
2: $F_A = F' \cap A$，$F_B = F' \cap B$ とし，一般性を失うことなく $|F_A| \leq |F_B|$ と仮定する
3: **while** $N(v) \cap F_B \neq \emptyset$ なる $v \in F_A$ が存在 **do**
4: $\quad F_A \leftarrow F_A \setminus \{v\}$
5: $\quad$ **if** $N(v) \setminus F_B \neq \emptyset$ **then**
6: $\quad\quad$ 任意に $w \in N(v) \setminus F_B$ を選ぶ
7: $\quad\quad F_B \leftarrow (F_B \cup N(v)) \setminus \{w\}$
8: $\quad$ **end if**
9: **end while**
10: $F = F_A \cup F_B$ を出力し，終了

アルゴリズム 1 が，多項式時間で実行できることは容易にわかる．また，F' は G のフィードバック点集合であったから，アルゴリズム 1 の出力 F が G のフィードバック独立点集合であることも容易に示せる．よって，以下では次の不等式を証明する．

$$|F| \leq (\Delta - 1) \cdot \mathsf{OPT}(G). \tag{1}$$

混乱を避けるため，$F_A^0 = F' \cap A$，$F_B^0 = F' \cap B$ とし，アルゴリズム 1 が停止した際の F_A と F_B をそれぞれ F_A^f と F_B^f と表記する．したがって，$F = F_A^f \cup F_B^f$ であり，$F_A^f \subseteq F_A^0$ かつ $F_B^f \supseteq F_B^0$ である．すると，各点 $v \in F_A^0 \setminus F_A^f$ には，アルゴリズム 1 の While ループが実行されている．特に，点 v にアルゴリズムの 6–7 行目が実行された場合だけ，B 側には高々$|N(v)| - 2 \ (\leq \Delta - 2)$ 個の点が新たに加えられる．ここで，$N(v) \cap F_B \neq \emptyset$ であったことを思い出そう．したがって，

$$|F_B^f| \leq |F_B^0| + (\Delta - 2)|F_A^0 \setminus F_A^f|$$

を得る．$F_A^f \subseteq F_A^0$ かつ $\Delta \geq 3$ であったから，

$$\begin{aligned} |F| &= |F_A^f| + |F_B^f| \\ &= (|F_A^0| - |F_A^0 \setminus F_A^f|) + |F_B^f| \\ &\leq |F_A^0| + |F_B^0| + (\Delta - 3)|F_A^0 \setminus F_A^f| \\ &\leq |F'| + (\Delta - 3)|F_A^0|. \end{aligned}$$

$|F_A^0| \leq |F_B^0|$ と仮定したから，$|F_A^0| \leq |F'|/2$．ゆえに

$$|F| \ \leq \ |F'| + \frac{\Delta - 3}{2}|F'| = \frac{\Delta - 1}{2}|F'|.$$

F' は，フィードバック点集合問題に対する 2 倍近似アルゴリズム [1] の出力なので，$|F'| \leq 2 \cdot \mathsf{OPT}_{\mathrm{FVS}}(G)$ が成り立つ．よって，

$$|F| \ \leq \ \frac{\Delta - 1}{2}|F'| \leq (\Delta - 1) \cdot \mathsf{OPT}_{\mathrm{FVS}}(G).$$

G の任意のフィードバック独立点集合は，G のフィードバック点集合でもあるから，$\mathsf{OPT}_{\mathrm{FVS}}(G) \leq \mathsf{OPT}(G)$ を得る．以上より，不等式 (1) が証明できた．

参考文献

[1] V. Bafna, P. Berman, T. Fujito, A 2-approximation algorithm for the undirected feedback vertex set problem, SIAM J. Discrete Mathematics, vol. 12, pp. 289–297 (1999)

[2] N. Misra, G. Philip, V. Raman, S. Saurabh, On parameterized independent feedback vertex set, Theoretical Computer Science, vol. 461, pp. 65–75 (2012)

[3] Y. Tamura, T. Ito, X. Zhou, Algorithms for the independent feedback vertex set problem, IEICE Trans. on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, vol. E98-A, pp. 1179–1188 (2015)