

## x が小さい場合のベッセル関数 $Y_\nu(x)$ の数値計算†

吉田年雄†† 二宮市三††

第2種ベッセル関数  $Y_\nu(x)$  について、 $\nu \geq 0$  かつ正数  $x$  が小さい場合の新しい数値計算法を提案している。 $Y_\nu(x)$  の定義式  $Y_\nu(x) = (J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)) / \sin \nu\pi$  に、第1種ベッセル関数  $J_\nu(x)$  および  $J_{-\nu}(x)$  の級数展開を代入し、適当に項をまとめ、桁落ちを生ずる部分を所要の精度を有する最良近似式にて計算することにより、 $Y_\nu(x)$  を精度良く、しかも能率的に求めている。たとえば、 $0 \leq \nu \leq 0.5$  では、 $Y_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \{A_k(\nu, x) + B_k(\nu, x)\} / (\sin \nu\pi / \nu)$  により計算を行う。ただし、 $A_k(\nu, x)$  の式に含まれる関数  $(1/\Gamma(k+1-\nu) - \cos \nu\pi / \Gamma(k+1+\nu)) / (k! \nu)$  は、そのまま式どおりに計算を行うと、 $\nu \neq 0$  で桁落ちが生ずる。そこで、この関数に対する最良近似式を新たに作成し、その近似式を用いて計算することにより、その関数値を桁落ちなしで求める。また、 $B_k(\nu, x)$  に含まれる  $\phi_1(\nu, x) = ((x/2)^{-\nu} - 1) / \nu$  および  $\phi_2(\nu, x) = (1 - (x/2)^\nu) / \nu$  は、 $(x/2)^\nu$  が1に近い場合には、右辺の式のとおり計算すると桁落ちが生ずる。そのときには、 $f(t) = (e^t - 1) / t$  なる関数の最良近似式を用いて、 $\phi_1(\nu, x) = -f(-\nu \ln(x/2)) \ln(x/2)$ 、 $\phi_2(\nu, x) = -f(\nu \ln(x/2)) \ln(x/2)$  として計算を行うことにより、 $\phi_1(\nu, x)$  および  $\phi_2(\nu, x)$  を桁落ちなしで求める。このようにすれば、 $Y_\nu(x)$  の値を、精度良く、しかも能率的に計算することができる。

### 1. ま え が き

$\nu$  次の第2種ベッセル関数  $Y_\nu(x)$  は、 $\nu$  次と  $-\nu$  次の第1種ベッセル関数  $J_\nu(x)$  と  $J_{-\nu}(x)$  を用いて次式のように定義される<sup>1)</sup>。

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \quad (1)$$

ただし、次数  $\nu$  が整数  $n$  のときには、 $\nu \rightarrow n$  の極限で与えられる。本論文では、 $\nu \geq 0$  かつ正数  $x$  が小さい場合の  $Y_\nu(x)$  の有用な計算法を提案する。

正数  $x$  が小さい場合の  $Y_\nu(x)$  の計算法としては、M. Goldstein & R. M. Thaler の方法<sup>2)</sup>がある。この方法は、「 $x$  が小さい場合の  $K_\nu(x)$  の計算法」を述べた文献<sup>3)</sup>で指摘したと同様な欠点をもつ。すなわち、

①  $\nu \neq 0$  のときに用いる展開式は、 $\nu$  が十分に小さい場合を除いて、多くの計算量を必要とする。

②  $\nu \neq 1$  で桁落ちが生ずる。

以下に、 $x$  が小さい場合に対して、Goldstein & Thaler の方法と比べ、精度が良く、能率が良い方法を述べる。本方法は、 $K_\nu(x)$  の計算法を述べた文献<sup>3)</sup>の手法を  $Y_\nu(x)$  にも適用したものである。

### 2. 規準誤差以内で関数値を求めるための条件

ここでは、本計算法の適用範囲を求めるために用いる条件を導出することにする。以下の議論では、入力  $x$  および演算の有効桁数は一定であるとし、その相対精度を  $\varepsilon$  とする。また、対象とする関数を  $F(x)$  と表わすことにする。

$x \neq 0$  なる零点をもつ関数に対して、その零点付近では、いかなる計算法をもってしても、相対精度  $\varepsilon$  をもって関数値を計算することは無理である。また、 $x$  に対して急激に増加または減少する関数についても同様である。おのずから、関数の計算値の精度には限界がある。そこで、対象とする関数に対して、その計算法とは無関係に、ある規準の絶対誤差 ( $x$  に依存する) を設け、それ以内の誤差をもって関数値が得られたならば、それで十分であると考えことにする。

規準の絶対誤差  $\delta$  を

$$\begin{aligned} \delta &= r \max \{ |\Delta F|, \varepsilon |F(x)| \} \\ &= r \varepsilon \max \left\{ \left| x \frac{\Delta F}{\Delta x} \right|, |F(x)| \right\} \\ &\doteq r \varepsilon \max \left\{ \left| x \frac{dF(x)}{dx} \right|, |F(x)| \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

と与えることにする。ただし、 $\Delta F$  は、入力  $x$  を  $\Delta x = \varepsilon x$  だけ変化させたときの関数  $F(x)$  の変化、すなわち、

$$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) \quad (3)$$

† Computation of Bessel Functions  $Y_\nu(x)$  for Small Argument  $x$  by TOSHIO YOSHIDA and ICHIZO NINOMIYA (Faculty of Engineering, Nagoya University).

†† 名古屋大学工学部情報工学

である。  $\varepsilon|F(x)|$  は、関数  $F(x)$  が相対精度  $\varepsilon$  で計算できたとした場合（関数値は、これより高い精度では計算できない）の絶対誤差である。また、 $r$  は 1 以上の定数であり、関数の計算の難易度により適当に決められる。この  $\delta$  は、関数  $F(x)$  の  $x \neq 0$  なる零点付近では、 $\delta \doteq r\varepsilon|x dF(x)/dx|$ 、 $F(x)$  が平坦なところでは、 $\delta \doteq r\varepsilon|F(x)|$  となる。

さて、ある  $x$  に対して、関数  $F(x)$  の値の計算法が、 $N$  回の加算

$$F(x) = \sum_{k=0}^N a_k(x) \quad (4)$$

によって表わされるとする。上式を用いて  $F(x)$  の値を計算したとき、その絶対誤差の絶対値の上限の近似値  $\delta_A$  は、計算の途中の丸め誤差を無視すると、

$$\delta_A = \varepsilon \max \left\{ \max_k |a_k|, \max_k |s_k| \right\} \quad (5)$$

として与えることができる。ここで、 $s_k$  は、加算の中間結果

$$s_k = \sum_{j=0}^k a_j \quad (k=0, 1, 2, \dots, N) \quad (6)$$

である。

したがって、

$$\delta_A < \delta \quad (7)$$

ならば、規準の絶対誤差より小さい誤差でもって、関数値が得られることになる。このことを、「関数値が規準誤差以内で得られる」ということにする。本論文では、式(2)の  $r$  を、

$$r = 10 \quad (8)$$

とする。このとき、式(7)は、

$$\frac{\max \left\{ \max_k |a_k|, \max_k |s_k| \right\}}{\max \left\{ \left| x \frac{dF(x)}{dx} \right|, |F(x)| \right\}} < 10 \quad (9)$$

となる。3. で述べる本計算法の適用範囲は、この条件式(9)により決められる。

### 3. 計算法

本論文では、 $0 \leq \nu \leq 2.5$  に対して、 $Y_\nu(x)$  の計算法を述べる。 $\nu > 2.5$  に対しては、 $\nu$  の小数部分を  $\mu$  とするとき、

$$\mu \leq 0.5 \text{ ならば、 } Y_{\mu+1}(x) \text{ と } Y_{\mu+2}(x)$$

$$\mu > 0.5 \text{ ならば、 } Y_\mu(x) \text{ と } Y_{\mu+1}(x)$$

を本計算法により求め、漸化式

$$Y_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} Y_\nu(x) - Y_{\nu-1}(x) \quad (10)$$

により  $Y_\nu(x)$  の値を計算することができる。

### 3.1 関数値 $Y_\nu(x)$ に対するオーバ・フローの判定

$x=0$  ( $Y_\nu(x)=-\infty$ ) のとき、および、 $Y_\nu(x)$  がオーバ・フローしている値のときには、以下に述べる計算は無駄になるので行わないことにする。そのため、与えられた  $\nu$  と  $x$  の値により、 $Y_\nu(x)$  の値がオーバ・フロー値かどうかを簡単に判定する必要がある。ここでは、 $\nu > 0$  かつ  $x$  が小さいとき、

$$Y_\nu(x) \doteq -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left( \frac{2}{x} \right)^\nu \quad (11)$$

であること<sup>4)</sup>を用いて、 $Y_\nu(x)$  の値がオーバ・フロー値かどうかを近似的に評価する。 $\nu \leq 1$  かつ  $x$  が小さいときには、

$$Y_\nu(x) \geq Y_1(x) \doteq -\frac{2}{\pi x} > -\frac{1}{x} \quad (12)$$

であるので、入力  $x$  の逆数  $1/x$  がオーバ・フロー値でない限り、 $Y_\nu(x)$  の値はオーバ・フロー値にはならない。 $\nu > 1$  かつ  $x$  が小さいときには、式(11)より、

$$\ln \Gamma(\nu) - \ln \pi - \nu \ln \frac{x}{2} > \ln x_M \quad (13)$$

ならば、 $Y_\nu(x)$  の値はオーバ・フロー値であるとみなすことにする。ただし、 $x_M$  は浮動小数点数として許される最大数である。

### 3.2 計算法の作成において用いる展開式および定義式

式(1)の  $J_\nu(x)$  および  $J_{-\nu}(x)$  は、級数展開<sup>4)</sup>

$$J_{\pm\nu}(x) = \left( \frac{x}{2} \right)^{\pm\nu} \left\{ \frac{1}{\Gamma(1\pm\nu)} + \frac{-\frac{x^2}{4}}{1! \Gamma(2\pm\nu)} + \frac{\left( -\frac{x^2}{4} \right)^2}{2! \Gamma(3\pm\nu)} + \dots \right\} \quad (\text{複号同順}) \quad (14)$$

として表わされる。 $x$  が小さい場合には、上式により、 $J_{\pm\nu}(x)$  の値を計算することができる。 $(x$  が大きい場合には、桁落ちが生ずる。)

さて、次数  $\nu$  が整数  $n$  のとき、式(1)は、その分母が零となり、その分子が

$$J_{-n}(x) = J_n(x) \cos n\pi \quad (15)$$

により零となるので、不定形となる。このことからわかるように、 $x$  が小さい場合に、式(14)により求められた  $J_\nu(x)$  および  $J_{-\nu}(x)$  の値を用いて、式(1)のとおり計算を行うことは、 $\nu$  が整数に近くないときには問題はないが、 $\nu$  が整数に近いときには、大きな桁落ちを生ずるので、 $Y_\nu(x)$  の計算法としては適切ではない。本論文では、式(1)に式(14)を代入し、適当に

項をまとめ、適当な工夫を行うことより、 $x$  が小さい場合の  $Y_\nu(x)$  の計算式を作成する。ただし、計算式は、区間  $0 \leq \nu \leq 0.5$ ,  $0.5 < \nu \leq 1.5$  および  $1.5 < \nu \leq 2.5$  によって異なる。これは、それぞれの区間において、 $\nu$  が整数に近いときに生ずる桁落ちを避けるための工夫が異なるからである。

以下で用いる  $\phi_1(\nu, x)$  および  $\phi_2(\nu, x)$  を次のように定義しておく。

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(\nu, x) &= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} - 1}{\nu} \\ \phi_2(\nu, x) &= \frac{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\nu} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

### 3.3 $0 \leq \nu \leq 0.5$ での計算法

ここで考える  $\nu$  の範囲は  $0 \leq \nu \leq 0.5$  とする。 $\nu \neq 0$  での桁落ちを取り除くことができるように、式(1)の分子を変形する。式(14)および(16)を用いれば、式(1)の分子は、

$$\begin{aligned} & J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x) \\ &= (1 - \nu\phi_2(\nu, x)) \cos \nu\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^k}{k! \Gamma(k+1+\nu)} \\ & \quad - (1 + \nu\phi_1(\nu, x)) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^k}{k! \Gamma(k+1-\nu)} \quad (17) \end{aligned}$$

と表わされ、 $-\frac{x^2}{4}$  のべきでまとめると、

$$\begin{aligned} & J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x) \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^k}{k!} \{A_k^*(\nu) + B_k^*(\nu, x)\} \quad (18) \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$A_k^*(\nu) = \frac{1}{\Gamma(k+1-\nu)} - \frac{\cos \nu\pi}{\Gamma(k+1+\nu)} \quad (19)$$

$$B_k^*(\nu, x) = \frac{\nu\phi_1(\nu, x)}{\Gamma(k+1-\nu)} + \frac{\nu\phi_2(\nu, x)\cos \nu\pi}{\Gamma(k+1+\nu)} \quad (20)$$

である。変形した式(18)においては、 $\nu \neq 0$  での桁落ちは、 $A_k^*(\nu)$  の計算すなわち式(19)の右辺の減算、および、 $\phi_1(\nu, x)$  と  $\phi_2(\nu, x)$  の計算すなわち式(16)の右辺の分子の減算にのみ現われる。幸いに、この形で与えられる  $A_k^*(\nu)$ ,  $\phi_1(\nu, x)$  および  $\phi_2(\nu, x)$  に対しては、適当な工夫を行うことにより、それらの値を桁落ちなしで計算することができる。この点に、式(1)の分子を式(18)のように変形することの意義がある。

$A_k^*(\nu)$  については、式(19)の右辺の項を、それぞれ、 $\nu=0$  で展開し、定数項を取り除いたもの（この展開は  $\nu$  の1次より始まっている）により計算すれば、桁落ちなしで求めることができる。また、 $\phi_1(\nu, x)$  および  $\phi_2(\nu, x)$  については、式(16)の分子の  $(x/2)^{\pm\nu}$  を  $\nu=0$  で展開し、定数項を取り除いた形により計算すれば、桁落ちなしで求めることができる。このように計算することにすれば、 $\nu$  が零に近いがために生ずる桁落ちは取り除くことができる。そのとき、式(1)の分子が  $\nu=0$  で零となる因子  $\nu$  を次式のように取り出すことができる。

$$\begin{aligned} & J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x) \\ &= \nu \sum_{k=0}^{\infty} \{A_k(\nu, x) + B_k(\nu, x)\} \quad (21) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} A_k(\nu, x) &= - \left(-\frac{x^2}{4}\right)^k \left\{ \frac{1}{k! \nu} \left( \frac{1}{\Gamma(k+1-\nu)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\cos \nu\pi}{\Gamma(k+1+\nu)} \right) \right\} \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_k(\nu, x) &= - \left(-\frac{x^2}{4}\right)^k \left\{ \frac{1}{k!} \left( \frac{\phi_1(\nu, x)}{\Gamma(k+1-\nu)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\phi_2(\nu, x)\cos \nu\pi}{\Gamma(k+1+\nu)} \right) \right\} \quad (23) \end{aligned}$$

である。後で述べるが、式(23)の右辺の加算では、それぞれの項は同符号であるので桁落ちはなく、また、式(21)の右辺の和の計算において、 $x$  が小さい場合には桁落ちはない。

式(1)および(21)より、

$$\begin{aligned} Y_\nu(x) &= \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \\ &= \frac{\nu \sum_{k=0}^{\infty} \{A_k(\nu, x) + B_k(\nu, x)\}}{\sin \nu\pi} \quad (24) \end{aligned}$$

となり、 $Y_\nu(x)$  の計算式

$$Y_\nu(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \{A_k(\nu, x) + B_k(\nu, x)\}}{g(\nu)} \quad (25)$$

が得られる。ここで、

$$\begin{aligned} g(\nu) &= \sin \nu\pi / \nu \\ &= \pi \left\{ 1 - \frac{(\pi\nu)^2}{3!} + \frac{(\pi\nu)^4}{5!} - \dots \right\} \quad (26) \end{aligned}$$

である。式(25)は、 $\nu=0$  のとき、もはや、不定形ではない。以下に、 $A_k(\nu, x)$  および  $B_k(\nu, x)$  の具体的な計算法について述べる。

[ $A_k(\nu, x)$  の計算] 式(22)の  $A_k(\nu, x)$  に注目しよ

う. その { } の部分を

$$\bar{A}_k(\nu) = \frac{1}{k! \nu} \left( \frac{1}{\Gamma(k+1-\nu)} - \frac{\cos \nu\pi}{\Gamma(k+1+\nu)} \right) \quad (27)$$

と表わすと,  $\bar{A}_k(\nu)$  に対して, 漸化式

$$\begin{aligned} \bar{A}_k(\nu) = & \frac{1}{(k+\nu)(k-\nu)} \left[ \bar{A}_{k-1}(\nu) \right. \\ & \left. + \frac{1}{k!} \left\{ \frac{1}{\Gamma(k-\nu)} + \frac{\cos \nu\pi}{\Gamma(k+\nu)} \right\} \right] \quad (k \geq 1) \end{aligned} \quad (28)$$

が成立する. したがって,  $\bar{A}_0(\nu)$  が所要の精度でもって計算されれば,  $k \geq 1$  の  $\bar{A}_k(\nu)$  は漸化式を用いて求めることができる.  $\bar{A}_0(\nu)$  は, 前述したように, 式(27)の右辺のとおり計算すると,  $\nu \doteq 0$  で桁落ちが生ずる. しかし,  $\bar{A}_0(\nu)$  の値はガンマ関数の逆数の級数展開<sup>5)</sup>

$$1/\Gamma(1+\nu) = \beta_0 + \beta_1\nu + \beta_2\nu^2 + \dots \quad (29)$$

および  $\cos \nu\pi$  の級数展開を用い, 桁落ちする部分を取り除いたものにより計算すれば, 所要の精度で求めることができる. ここで,  $\beta_k (k=0, 1, 2, \dots)$  は定数であり, 特に  $\beta_0=1, \beta_1=\gamma$  (オイラーの定数) である. しかし, 能率の点では, 最良近似式により  $\bar{A}_0(\nu)$  を計算することが好ましい. 表1および表2には, それぞれ, 単精度 (8D) および倍精度 (18D) 用として,

表1 式(30)の  $p_k$

Table 1  $p_k$  in Eq. (30)

$k$	$p_k$
0	0.5211379223E+01
1	0.1248539577E+01
2	-0.7601802496E+01
3	-0.1379040530E+01
4	0.4860162801E+01
5	0.4544450138E+00
6	-0.2179792681E+01
7	0.6680980470E+00

表2 式(30)の  $p_k$

Table 2  $p_k$  in Eq. (30)

$k$	$p_k$
0	0.521137924054246560050D+01
1	0.124853493442613041970D+01
2	-0.76015973331245037958D+01
3	-0.13825158228350717291D+01
4	0.48894430759726178204D+01
5	0.31746347884558647197D+00
6	-0.18105361345351551811D+01
7	0.10824228676101492997D+00
8	0.41913184124268400348D+00
9	-0.75526661140163500853D-01
10	-0.61035018418923842586D-01
11	0.1878232766565522973D-01
12	0.60619120369370818651D-02
13	-0.38347945033376230172D-02
14	0.56288730587879836425D-03

$0 \leq \nu \leq 0.5$  における  $\bar{A}_0(\nu)$  の最良近似多項式

$$\bar{A}_0(\nu) \doteq (\nu - \nu_0) \sum_{k=0}^M p_k \nu^k \quad (30)$$

の係数が示されている. ただし,

$$\nu_0 = 0.22152126654342240030 \quad (31)$$

である.

**[ $B_k(\nu, x)$  の計算]** 式(23)の  $B_k(\nu, x)$  に注目しよう.  $\phi_1(\nu, x)$  と  $\phi_2(\nu, x)$  は同符号であるので ( $\phi_2(\nu, x) = (x/2)^\nu \phi_1(\nu, x)$ ), その ( ) 中の加算では桁落ちはない. ただし, 前述したように,  $\phi_1(\nu, x)$  および  $\phi_2(\nu, x)$  の計算は, 定義式(16)の分子が減算であるので注意を要する.  $(x/2)^\nu < 1/2$ , あるいは,  $(x/2)^\nu > 2$  の場合には, 式(16)の右辺のとおり計算すれば, 2進で桁落ちなしで, すなわち, 2進で丸め誤差程度で  $\phi_1(\nu, x)$  および  $\phi_2(\nu, x)$  を求めることができる. それに反して,  $1/2 \leq (x/2)^\nu \leq 2$ , すなわち,  $-\ln 2 \leq \nu \ln (x/2) \leq \ln 2$  の場合には, 右辺のとおり計算すると, 2進で1桁以上の桁落ちをする. しかし, この場合には, 関数

$$f(t) = \frac{e^t - 1}{t} = \frac{1}{1!} + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \dots \quad (32)$$

が,  $-\ln 2 \leq t \leq \ln 2$  において, 丸め誤差程度で計算できれば,  $\phi_1(\nu, x)$  および  $\phi_2(\nu, x)$  は,

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(\nu, x) &= -f\left(-\nu \ln \frac{x}{2}\right) \ln \frac{x}{2} \\ \phi_2(\nu, x) &= -f\left(\nu \ln \frac{x}{2}\right) \ln \frac{x}{2} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

として桁落ちなしで計算することができる.  $f(t)$  を丸め誤差程度で計算するためには, 式(32)の右辺第1式のとおり行うのではなく, 右辺第2式のように,  $e^t$  を級数展開し, 桁落ちする部分を取り除いたものにより行えばよい. しかし, 能率の点では, 最良近似式により  $f(t)$  を計算することが好ましい. 表3および表4には, それぞれ, 単精度および倍精度用として,  $-\ln 2 \leq t \leq \ln 2$  における  $f(t)$  の最良近似式

表3 式(34)の  $p_k$  および  $q_k$

Table 3  $p_k$  and  $q_k$  in Eq. (34)

$k$	$p_k$
0	0.6432691503E+03
1	0.2005436580E+02

$k$	$q_k$
0	0.1686538301E+04
1	0.1806535880E+03
2	0.1000000000E+01

表 4 式 (34) の  $p_k$  および  $q_k$   
Table 4  $p_k$  and  $q_k$  in Eq. (34)

$k$	$p_k$
0	0.15462037735227156105D+06
1	0.49551922829320590030D+04
2	0.27015176165734808206D+02
3	0.17839106920989440594D-01

$k$	$q_k$
0	0.30924075470454312210D+06
1	0.35680447457909378169D+05
2	0.45039468461939214765D+03
3	0.1000000000000000000D+01

$$f(t) \doteq \frac{2 \sum_{k=0}^M p_k t^{2k}}{\sum_{k=0}^M q_k t^{2k} - t \sum_{k=0}^M p_k t^{2k}} \quad (34)$$

の係数が示されている。

〔 $g(\nu)$  の計算〕 式 (25) の分母すなわち  $g(\nu)$  の値は、式 (26) の右辺第 1 式 ( $\nu \neq 0$  のとき) あるいは第 2 式により求めることができるが、能率の点から、最良近似式により計算することが好ましい。表 5 および表 6 には、それぞれ、単精度および倍精度用として、 $|\nu| \leq 0.5$  における  $g(\nu)$  の最良近似多項式

$$g(\nu) \doteq \sum_{k=0}^M p_k \nu^{2k} \quad (35)$$

の係数が示されている。

〔計算式 (25) の適用範囲〕  $x$  が十分に小さいときには、式 (25) の分子において、 $B_0(\nu, x)$  (このときには負) が支配的であるので、その加算では桁落ちはない。ただし、 $x$  が大きくなるにつれて、 $B_0(\nu, x)$  とは符号が逆で、絶対値が  $B_0(\nu, x)$  と同程度、あるいは、

表 5 式 (35) の  $p_k$

Table 5  $p_k$  in Eq. (35)

$k$	$p_k$
0	0.3141592637E+01
1	-0.5167709685E+01
2	0.2550069726E+01
3	-0.5982421256E+00
4	0.7756038531E-01

表 6 式 (35) の  $p_k$

Table 6  $p_k$  in Eq. (35)

$k$	$p_k$
0	0.31415926535897932377D+01
1	-0.51677127800499695287D+01
2	0.25501640398772939402D+01
3	-0.59926452931873825358D+00
4	0.82145886569892895765D-01
5	-0.73704304787632958503D-02
6	0.46629968877247635208D-03
7	-0.21903185412339434299D-04
8	0.76947272061927974080D-06

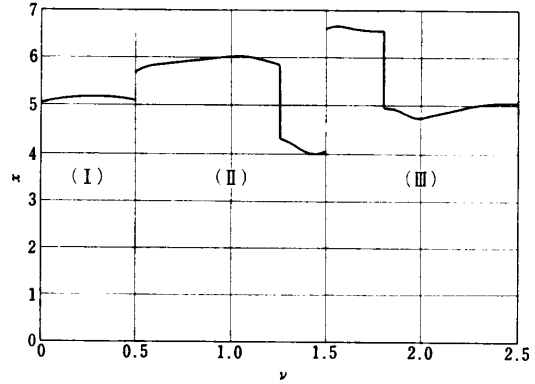


図 1 本方法が適用できる領域 (実線以下)

Fig. 1 Region (under solid line) where the present method is available.

それより大きくなる項が現われるので、その加算では桁落ちが生ずるようになる。しかし、2. で述べたように、桁落ちが生じても、規準誤差以内で関数値が求められればよい。 $g(\nu)Y_\nu(x)$  を式 (4) の  $F(x)$  とみなし、式 (25) に書かれている順 ( $A_0(\nu, x), B_0(\nu, x), A_1(\nu, x), B_1(\nu, x), \dots$ ) に加算が行われた場合について、式 (9) の条件を数値的に調べた。その結果として、図 1 の領域 I で、 $Y_\nu(x)$  の値が規準誤差以内で得られることがわかった。式 (25) において、 $A_k(\nu, x)$  および  $B_k(\nu, x)$  は、 $k$  が大きくなるにつれて十分に小さくなるので、所要精度内に収束するまでに取る項は少なくて済む。たとえば、 $x=0.5$  のとき、式 (25) の  $k$  は、単精度では 5 まで、倍精度では 8 まで取れば、その精度内に収束している。 $x$  が小さくなると、必要とする項数は、これより少なくて済む。

### 3.4 $0.5 < \nu \leq 1.5$ での計算法

$\alpha = \nu - 1$  と置く。ここで考える  $\nu$  の範囲は  $0.5 < \nu \leq 1.5$  とする。したがって、 $-0.5 < \alpha \leq 0.5$  である。次の関係

$$\left. \begin{aligned} (x/2)^\nu &= (x/2)(1 - \alpha\phi_2(\alpha, x)) \\ (x/2)^{2-\nu} &= (x/2)(1 + \alpha\phi_1(\alpha, x)) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

より、式 (14) は次のように書き直すことができる。

$$\left. \begin{aligned} J_\nu(x) &= \frac{x}{2}(1 - \alpha\phi_2(\alpha, x)) \left\{ \frac{1}{(1+\alpha)\Gamma(1+\alpha)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{-x^2/4}{1!(2+\alpha)\Gamma(2+\alpha)} + \frac{(-x^2/4)^2}{2!(3+\alpha)\Gamma(3+\alpha)} + \dots \right\} \\ J_{-\nu}(x) &= -\frac{\alpha(x/2)^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - \frac{x}{2}(1 + \alpha\phi_1(\alpha, x)) \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{1}{1!\Gamma(1-\alpha)} + \frac{-x^2/4}{2!\Gamma(2-\alpha)} + \frac{(-x^2/4)^2}{3!\Gamma(3-\alpha)} + \dots \right\} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

式(1)および(37)より,  $Y_\nu(x)$  の計算式として,

$$Y_\nu(x) = - \left[ C_{-1}(\alpha, x) + \sum_{k=0}^{\infty} \{ C_k(\alpha, x) + D_k(\alpha, x) \} \right] / g(\alpha) \quad (38)$$

が得られる. ただし,

$$C_{-1}(\alpha, x) = (x/2)^{-1-\alpha} / \Gamma(1-\alpha) \quad (39)$$

$$C_k(\alpha, x) = \frac{x}{2} \left( -\frac{x^2}{4} \right)^k \left\{ \frac{1}{k! \alpha (k+1) \Gamma(k+1-\alpha)} - \frac{\cos \alpha \pi}{(k+1+\alpha) \Gamma(k+1+\alpha)} \right\} \quad (k \geq 0) \quad (40)$$

$$D_k(\alpha, x) = \frac{x}{2} \left( -\frac{x^2}{4} \right)^k \left\{ \frac{\phi_1(\alpha, x)}{k! (k+1) \Gamma(k+1-\alpha)} + \frac{\phi_2(\alpha, x) \cos \alpha \pi}{(k+1+\alpha) \Gamma(k+1+\alpha)} \right\} \quad (41)$$

である.

$\{ C_k(\alpha, x) \}$  および  $\{ D_k(\alpha, x) \}$  の計算] 式(40)の右辺の  $\{ \}$  の部分を  $\tilde{C}_k(\alpha)$  と表わすとき,  $\tilde{C}_k(\alpha)$  に対して,

$$\tilde{C}_k(\alpha) = \frac{1}{(k+1+\alpha)(k-\alpha)} \left[ \tilde{C}_{k-1}(\alpha) + \frac{1}{k!} \left\{ \frac{1}{(k+1) \Gamma(k-\alpha)} + \frac{\cos \alpha \pi}{(k+\alpha) \Gamma(k+\alpha)} \right\} \right] \quad (42)$$

表 7 式(43)の  $p_k$   
Table 7  $p_k$  in Eq. (43)

$k$	$p_k$
0	-0.2256758327E+01
1	-0.2493947755E+01
2	0.5782593060E+01
3	0.3057856910E+01
4	-0.4672179020E+01
5	-0.1969338057E+01
6	0.2100204257E+01
7	0.1427336670E+01
8	0.1898800354E+00

表 8 式(43)の  $p_k$   
Table 8  $p_k$  in Eq. (43)

$k$	$p_k$
0	-0.22567583341910251493D+01
1	-0.24939496823494490719D+01
2	0.57825010561586722160D+01
3	0.30561401319180151138D+01
4	-0.46884592545019813019D+01
5	-0.20573070553082209868D+01
6	0.18167618752434752084D+01
7	0.88595307798256397208D+00
8	-0.37825184023198081587D+00
9	-0.24507108067914263599D+00
10	0.37281634536827905986D-01
11	0.43707233153058489598D-01
12	0.22509486597963098429D-03
13	-0.61195985984417031792D-02
14	-0.16720398110449900416D-02
15	-0.10361674388635101572D-03

表 9 式(44)の  $p_k$

Table 9  $p_k$  in Eq. (44)

$k$	$p_k$
0	0.2425972518E+01
1	0.4669222911E+01
2	0.4909972488E+00
3	-0.3235420152E+01
4	-0.1332554735E+01
5	0.721803302E+00
6	0.7805006339E+00
7	-0.2946695797E+00

表 10 式(44)の  $p_k$

Table 10  $p_k$  in Eq. (44)

$k$	$p_k$
0	0.24259725088365685329D+01
1	0.46692255692445173793D+01
2	0.49087643275778861154D+00
3	-0.32333576660732768954D+01
4	-0.13496967253130521471D+01
5	0.7988099757217777684D+00
6	0.5891954944028905737D+00
7	-0.47728677862128720194D-01
8	-0.12448290227965897430D+00
9	-0.17373620627969966577D-01
10	0.14428645120317795577D-01
11	0.45097268584482783964D-02
12	-0.41984513549911775843D-03
13	-0.89380645307318630071D-03
14	0.15593345290147184997D-03

なる漸化式が成立するので,  $\tilde{C}_0(\alpha)$  が所要の精度でもって計算されれば,  $k \geq 1$  の  $\tilde{C}_k(\alpha)$  は容易に求めることができる. 表 7 および表 8 には, それぞれ, 単精度および倍精度用として,  $-0.5 \leq \alpha \leq 0$  における  $\tilde{C}_0(\alpha)$  の最良近似多項式

$$\tilde{C}_0(\alpha) \doteq \sum_{k=0}^M p_k (-0.5 - \alpha)^k \quad (43)$$

の係数が示されている. また, 表 9 および表 10 には, それぞれ, 単精度および倍精度用として,  $0 \leq \alpha \leq 0.5$  における  $\tilde{C}_0(\alpha)$  の最良近似多項式

$$\tilde{C}_0(\alpha) \doteq (\alpha - \alpha_0) \sum_{k=0}^M p_k (0.5 - \alpha)^k \quad (44)$$

の係数が示されている. ただし,

$$\alpha_0 = 0.034875534250529073632 \quad (45)$$

である.

$D_k(\alpha, x)$  は, 3.3 と同様にして求めることができる.

**[式(38)の適用範囲]** 式(38)に対して, 式(9)の条件を数値的に調べることでより(式(38)の加算を式どおりの順, すなわち,  $C_{-1}(\alpha, x)$ ,  $C_0(\alpha, x)$ ,  $D_0(\alpha, x)$ ,  $C_1(\alpha, x)$ ,  $D_1(\alpha, x)$ , ... の順に行ったとき), 図 1 の領域 II で  $Y_\nu(x)$  の値が規準誤差以内で得られることがわかった.

式(38)の  $k$  は,  $x=0.5$  のとき, 単精度では4まで, 倍精度では8まで取れば, 所要精度内に収束している。

3.5  $1.5 < \nu \leq 2.5$  での計算法

$\alpha = \nu - 2$  と置く。ここで考える  $\nu$  の範囲は  $1.5 < \nu \leq 2.5$  とする。したがって,  $-0.5 < \alpha \leq 0.5$  である。

3.4 と同様にして,  $Y_\nu(x)$  の計算式

$$Y_\nu(x) = [E_{-2}(\alpha, x) + E_{-1}(\alpha, x)] / \rho(\alpha) + \sum_{k=0}^{\infty} \{E_k(\alpha, x) + F_k(\alpha, x)\} / \rho(\alpha) \quad (46)$$

が得られる。ただし,

$$E_{-2}(\alpha, x) = -(\alpha+1)(x/2)^{-2-\alpha} / \Gamma(1-\alpha) \quad (47)$$

$$E_{-1}(\alpha, x) = -(x/2)^{-\alpha} / \Gamma(1-\alpha) \quad (48)$$

$$E_k(\alpha, x) = \left(-\frac{x^2}{4}\right)^{k+1} \times \left\{ \frac{1}{k! \alpha} \left( \frac{1}{(k+2)(k+1)\Gamma(k+1-\alpha)} \frac{\cos \alpha \pi}{(k+2+\alpha)(k+1+\alpha)\Gamma(k+1+\alpha)} \right) \right\} \quad (k \geq 0) \quad (49)$$

$$F_k(\alpha, x) = \left(-\frac{x^2}{4}\right)^{k+1} \times \left\{ \frac{1}{k!} \left( \frac{\phi_1(\alpha, x)}{(k+2)(k+1)\Gamma(k+1-\alpha)} + \frac{\phi_2(\alpha, x) \cos \alpha \pi}{(k+2+\alpha)(k+1+\alpha)\Gamma(k+1+\alpha)} \right) \right\} \quad (50)$$

である。

$[E_k(\alpha, x)$  および  $F_k(\alpha, x)$  の計算] 式(49)の右辺の  $\{ \}$  の部分を  $\tilde{E}_k(\alpha)$  と表わすとき,  $\tilde{E}_k(\alpha)$  に対して,

$$\tilde{E}_k(\alpha) = \frac{1}{(k+2+\alpha)(k-\alpha)} \left[ \tilde{E}_{k-1}(\alpha) + \frac{1}{k!} \left\{ \frac{1}{(k+2)(k+1)\Gamma(k-\alpha)} + \frac{\cos \alpha \pi}{(k+1+\alpha)(k+\alpha)\Gamma(k+\alpha)} \right\} \right] \quad (51)$$

なる漸化式が成立するので,  $\tilde{E}_0(\alpha)$  が所要の精度で計算できればよい。表11および表12には, それぞれ, 単精度および倍精度用として,  $-0.5 \leq \alpha \leq 0$  における  $\tilde{E}_0(\alpha)$  の最良近似多項式

$$\tilde{E}_0(\alpha) \approx (\alpha - \alpha_1) \sum_{k=0}^M p_k (-0.5 - \alpha)^k \quad (52)$$

の係数が示されている。ただし,

$$\alpha_1 = -0.078665956891073808274 \quad (53)$$

である。表13および表14には, それぞれ, 単精度お

表 11 式 (52) の  $p_k$

Table 11  $p_k$  in Eq. (52)

$k$	$p_k$
0	0.2678110601E+01
1	-0.5921661843E+00
2	-0.3484662371E+01
3	0.3631213027E-01
4	0.1802115655E+01
5	0.2649264443E+00
6	-0.5111930918E+00
7	-0.2017136901E+00

表 12 式 (52) の  $p_k$

Table 12  $p_k$  in Eq. (52)

$k$	$p_k$
0	0.26781106002483549257D+01
1	-0.59216638804914123459D+00
2	-0.34846674122567241593D+01
3	0.36288824441634819023D-01
4	0.18024730585155136746D+01
5	0.26963107521739763129D+00
6	-0.48803284417223161529D+00
7	-0.14392272807674164625D+00
8	0.72800530628551546703D-01
9	0.35604955425871891542D-01
10	-0.48228771887664394646D-02
11	-0.51828084544046271574D-02
12	-0.27568448937300113433D-03
13	0.45626892813869254277D-03
14	0.10713528348895657424D-03

表 13 式 (54) の  $p_k$

Table 13  $p_k$  in Eq. (54)

$k$	$p_k$
0	0.1727843354E+00
1	0.2025313029E+01
2	-0.2294359806E+01
3	-0.1351028689E+01
4	0.2074052887E+01
5	0.5926106834E-01
6	-0.7968192038E+00
7	0.2799819155E+00

表 14 式 (54) の  $p_k$

Table 14  $p_k$  in Eq. (54)

$k$	$p_k$
0	0.17278433509846713943D+00
1	0.20253128489484892602D+01
2	-0.22943487091309658624D+01
3	-0.13512712409048163929D+01
4	0.20766701105508462038D+01
5	0.43472486458298243419D-01
6	-0.74094290733351698612D+00
7	0.16460084492519095334D+00
8	0.12859300080372771357D+00
9	-0.57406622670466109848D-01
10	-0.89720093492494420847D-02
11	0.94234755569141568496D-02
12	-0.54734921062575354079D-03
13	-0.98219245180417304476D-03
14	0.30702080218940497435D-03
15	-0.26366073689174046872D-04

よび倍精度用として,  $0 \leq \alpha \leq 0.5$  における  $\tilde{E}_0(\alpha)$  の最良近似多項式

$$\tilde{E}_0(\alpha) \doteq \sum_{k=0}^M p_k \alpha^k \quad (54)$$

の係数が示されている.

$F_k(\alpha, x)$  は, 3.3 と同様にして求めることができる.

〔式(46)の適用範囲〕 式(46)に対して, 式(9)の条件を数値的に調べることでより (式(46)の加算を式どおりの順に行ったとき), 図1の領域Ⅲで  $Y_\nu(x)$  の値が規準誤差以内で得られることがわかった.

式(46)の  $k$  は,  $x=0.5$  のとき, 単精度では3まで, 倍精度では7まで取れば, 所要精度内に収束している.

#### 4. む す び

本論文では,  $x$  が小さい場合の  $Y_\nu(x)$  の計算法を提案した. 本方法は, 現在のところ, 精度および能率の点で最もすぐれていると考えられる.

本論文で示した相対精度規準の最良近似式は, 共著者二宮および元名古屋大学大学院生西尾公美氏が, Remes の算法に基づいて作成したプログラムにより求めたものである. その計算は, 名古屋大学大型計算

機センター FACOM M-200 の4倍精度演算により行われた.

おわりに, 貴重なご教示を頂いた本学鳥居達生助教授に感謝します.

#### 参 考 文 献

- 1) Watson, G. N.: A Treatise on the Theory of Bessel Functions, p. 64, Cambridge University Press (1966).
- 2) Goldstein, M. and Thaler, R. M.: Recurrence Techniques for the Calculation of Bessel Functions, MTAC, No. 13, pp. 102-108 (1959).
- 3) 吉田年雄, 二宮市三:  $x$  が小さい場合の変形ベッセル関数  $K_\nu(x)$  の数値計算, 情報処理学会論文誌, Vol. 21, No. 3, pp. 238-245, および, その訂正, No. 4, p. 345 (1980).
- 4) National Bureau of Standards: Handbook of Mathematical Functions, Appl. Math. Ser. 55, p. 360, U. S. Government Printing Office, Washington D. C. (1964).
- 5) Clenshaw, C. W.: Mathematical Tables, Vol. 5, Chebyshev Series for Mathematical Functions, p. 8, Her Majesty's Stationary Office (1962).

(昭和56年10月2日受付)

(昭和56年11月18日採録)