

グリーン関数の重ね合わせ法による拡散方程式の近似解法†

野中善政^{††} 村島定行^{†††}

ラプラス方程式の近似解法として研究されてきた代用電荷法を拡散方程式に応用した結果について述べている。得られる数値解は誤差分布やグリーン関数の極の位置と平均誤差の関係などにおいてラプラス方程式のそれと類似点をもつ。この応用において見い出される新しい点は時間メッシュの取り方によって近似スキームが不安定になることである。この不安定の条件を与え、さらに不安定の原因を近似スキームのフーリエ変換に基づいて説明している。

1. ま え が き

電算機の能力の向上とともに、偏微分方程式の純粋の数値解法(差分法¹⁾, 有限要素法²⁾) が研究され発展してきたが, 近年境界値問題の解法としての境界法が見直され, 境界要素法 (Boundary Element Method)³⁾ や代用電荷法 (Charge Simulation Method)⁴⁾ が研究されている。均質な領域での問題であり, 偏微分方程式の解がわかっている場合にはそれらの解の重ね合わせによって境界条件が満たされるように調整(簡単な場合を除いて数値的, 近似的に)すればよい。必要とするデータは境界上のみで与えられるためにデータ数が少なく済み, 一般的に近似解の精度は高い。境界要素法と代用電荷法はいずれもこの種の境界法に属するが, その方法は多少異なっている。前者が境界の方程式の直接解法を目指し, 境界上での積分を含むのに対して, 後者は有限個のグリーン関数(基本解)の重ね合わせによって近似解を表現し, 特異積分をさける意味でグリーン関数の極は境界から離して配置する。また近似解の精度を上げるうえで, 前者は要素の形状や分割の方法において, 後者はグリーン関数の極の配置の方法において試行錯誤的である。しかし数値解法が簡単であること, 物理的意味が明確で直観的であるという点で代用電荷法は優れている。代用電荷法はこれまで主として電界計算におけるラプラス方程式の近似解法として研究されてきた。この場合に誤差解析において特筆される利点がある。境界から離して電荷(グ

リーン関数の極)を配置しているために近似解は境界上で調和関数になっており, 最大値の原理⁵⁾によって境界上に最大値, 最小値がある。厳密解と近似解の誤差も調和関数であるという性質があり, 境界上で最大となるので誤差の最大値を正確に評価することができる。

差分法と比較したときの代用電荷法のもうひとつの特徴は同じ数値解法でも解析性が強く, したがって差分法で扱えないような一点に負荷が集中する問題などにも適しているということである。

ところで最大値の原理は拡散方程式についても成立する⁶⁾。したがって代用電荷法を拡散方程式に応用し, 誤差解析上の利点を取り入れることができる。しかしこの応用においてラプラス方程式とはかなり異なる点が生じてくる。第1に拡散方程式のグリーン関数(基本解)の空間的影響距離が短く, 影響が指数関数的に減衰する一方で, 時間的影響距離が長く, $t^{-n/2}$ (n は空間の次元数)に比例して減衰するので, 時間を経過したときの近似解の精度はある時間 t より以前の精度に大きく関係する。第2に一般に発展方程式⁶⁾を差分近似で解く場合に生ずるスキームの不安定がこの場合にも生ずる(原因は若干異なっている)。

本論文は実際に2, 3の例題について, 拡散方程式に応用した代用電荷法による近似解, 誤差分布の特徴, グリーン関数の極の位置による誤差の変化, 位置によって生ずる不安定現象について論じている。また差分法との比較も行っている。

用語についての意味であるが, 拡散方程式は特に熱現象と関連が深いので, 温度, 熱源, 熱インパルスといったいい方をする。それぞれ何を意味するかは明白であると思われるので改めて注釈しない。

† An Approximate Method to Solve the Diffusion Equation by Means of Super-Position of Green's Functions by YOSHIMASA NONAKA (Department of Earth Science, Faculty of Education, Miyazaki University) and SADAYUKI MURASHIMA (Department of Electronics, Faculty of Engineering, Kagoshima University).

†† 宮崎大学教育学部地学科

††† 鹿児島大学工学部電子工学科

2. 代用電荷法の拡散方程式への適用

2.1 原理

拡散方程式の境界値・初期値問題

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= K^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x_1 < x < x_2) \\ u(x_1) &= u(x_2) = 0 \\ u(x, 0) &= f(x) \quad (x_1 < x < x_2) \end{aligned} \quad (1)$$

の解を基本解, ポアソンの公式, 1重層ポテンシャル, 2重層ポテンシャル^{7),8)} (ポテンシャル論の用語を拡散方程式にも用いることにする) を用いて表わすことができる. 基本解 (グリーン関数) は

$$G(x-\xi, t-\tau) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4K^2(t-\tau)}}}{2K\sqrt{\pi(t-\tau)}} & t > \tau \\ 0 & t \leq \tau \end{cases} \quad (2)$$

で与えられる. (1)式のように第1種境界条件が与えられている場合に, 2重層ポテンシャルで解を表示すればボルチラ型第2種の積分方程式が導かれるが⁷⁾, ここでは代用電荷法に類似した形にするために1重層ポテンシャルで解を表示することにする. ただし熱源を境界から離して領域の外部に配置する. したがって, 温度場は

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{x_1}^{x_2} G(x-\xi, t) f(\xi) d\xi \\ &\quad - \int_0^t G(x-\xi_1, t-\tau) q_1(\tau) d\tau \\ &\quad - \int_0^t G(x-\xi_2, t-\tau) q_2(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3)$$

と表わされる. ここで $q_1(t), q_2(t), \xi_1, \xi_2$ はそれぞれ熱源の強さと位置を示す. (3)式が境界条件を満たすという要請から, $q_1(t), q_2(t)$ を未知関数とする第1種の積分方程式

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} G(x_i-\xi, t) f(\xi) d\xi \\ = \sum_{j=1}^2 \int_0^t G(x_i-\xi_j, t-\tau) q_j(\tau) d\tau \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (4)$$

が導かれ, 空間2次元以上の問題についても同様な形になる. 左辺の積分は取りあえず解析的に行えるものとして簡単に

$$h(x_i, t) = \sum_{j=1}^2 \int_0^t q_j(\tau) G(x_i-\xi_j, t-\tau) d\tau \quad (i=1, 2) \quad (4)'$$

と書く. ここで $x_i (i=1, 2)$ は境界上の拘束点 (境界条件と一致させる点) を示す. (4)' 式は連立積分方程式であり, 時間についてのたたみこみ積分を示して

いる. したがって形式的にラプラス変換を適用して, (4)' 式の解析解を得ることも簡単な例については可能であるが, 一般に複雑な級数となって利益がないので数値解を求める必要がある. したがって (4)' 式を

$$\begin{aligned} h(x_i, n\Delta t) &= \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^n \Delta t q_j((k-1/2)\Delta t) \\ &\quad \cdot G(x_i-\xi_j, (n-k+1/2)\Delta t) \\ &\quad (i=1, 2), (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (5)$$

と離散化する. ただし Δt は時間メッシュである. ここで積分公式として中点公式を採るのは, $k=n$ のとき核関数 G が零になることを避ける理由がある. (5) 式は行列表示によって簡単に

$$\mathbf{h}^n = \sum_{k=1}^n \mathbf{G}^{n-k} \mathbf{q}^k \quad (5)'$$

と書ける. ただし, $\mathbf{h}^n, \mathbf{q}^k, \mathbf{G}^{n-k}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^n &= (h_1^n, h_2^n)^T, h_1^n = h(x_1, n\Delta t), \text{ etc.}, \\ \mathbf{q}^k &= (q_1^k, q_2^k)^T, q_1^k = q_1((k-1/2)\Delta t), \text{ etc.}, \\ \mathbf{G}^{n-k} &= \begin{pmatrix} G_{11}^{n-k} & G_{12}^{n-k} \\ G_{21}^{n-k} & G_{22}^{n-k} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$G_{11}^{n-k} = \Delta t G\left(x_1-\xi_1, \left(n-k+\frac{1}{2}\right)\Delta t\right), \text{ etc.}$$

なるベクトルと行列を示す. $n=3$ として (5)' 式をさらにわかりやすくすれば

$$\begin{pmatrix} h_1^1 \\ h_2^1 \\ h_1^2 \\ h_2^2 \\ h_1^3 \\ h_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11}^0 & G_{12}^0 & 0 & 0 \\ G_{21}^0 & G_{22}^0 & 0 & 0 \\ G_{11}^1 & G_{12}^1 & G_{11}^0 & G_{12}^0 \\ G_{21}^1 & G_{22}^1 & G_{21}^0 & G_{22}^0 \\ G_{11}^2 & G_{12}^2 & G_{11}^1 & G_{12}^1 & G_{11}^0 & G_{12}^0 \\ G_{21}^2 & G_{22}^2 & G_{21}^1 & G_{22}^1 & G_{21}^0 & G_{22}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \\ q_1^2 \\ q_2^2 \\ q_1^3 \\ q_2^3 \end{pmatrix} \quad (5)''$$

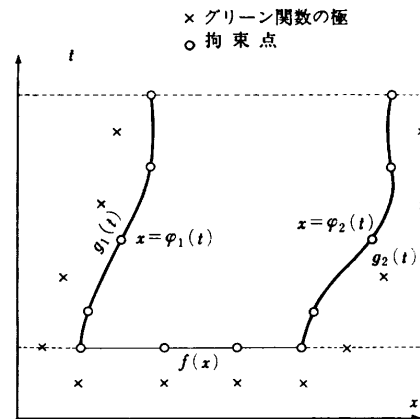


図1 拡散方程式に応用された代用電荷法のグリーン関数の極, 拘束点の配置
Fig. 1 Arrangement of source points and contour points for the calculation of heat flow problem by the charge simulation method (CSM) applied to the diffusion equation.

となる. 一般に空間2次元以上でベクトル q の次元が3以上の場合への拡張についても明らかであろう.

(5)式から, 順に q^1, q^2, q^3, \dots を計算することができて, 温度場の近似解 $\tilde{u}(x, t)$ は

$$\tilde{u}(x, t) = h(x, t) - \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^n \Delta t q_j^k \cdot G\left(x - \xi_j, t - \left(k - \frac{1}{2}\right)\Delta t\right) \quad (6)$$

$$(n - \frac{1}{2})\Delta t < t < (n + \frac{1}{2})\Delta t$$

で与えられる. ここでは(5)式の $n\Delta t$ を t に置き換え, $x_i (i=1, 2)$ を x に置き換えている. (6)式は代用電荷法の拡散方程式への拡張であり, この近似解 $\tilde{u}(x, t)$ と誤差 $\varepsilon(x, t) = u(x, t) - \tilde{u}(x, t)$ はともに領域で微分方程式を満たす. また第2種の境界条件が与えられている問題では, (5)式において h_i と G をそれぞれ境界の法線方向の微分 $\partial h / \partial n, \partial G / \partial n$ で置き換え q^1, q^2, \dots を計算するだけで, 近似解 $\tilde{u}(x, t)$ の形は(6)式と同様である.

2.2 解法についての注意

通常の代用電荷法ではグリーン関数の極と拘束点の位置は空間的に並列しているが, 拡散方程式ではそれらを時間軸上で互い違いに配置する必要がある. また第1章で述べた理由によって, 比較的初期の近似解の誤差が時間を延長したときの解の精度を左右するので, 初期には時間メッシュ Δt を小さく取る必要があり, 時間を経過した後は Δt を大きくして効率化をはかる必要がある. 拡散方程式の差分近似と違って Δt を大きくする方には制限がなく (第4章参照), また簡単にプログラム化できる.

次にポアソンの公式の積分が問題になるが, $f(x)$ を折線近似すれば解析的に積分できて指数関数・誤差関数の和で表示できる⁹⁾ (3.1.1 参照). 一般には図1に示したように, $t < 0$ に極のあるグリーン関数の重ね合わせで表示し, 初期分布を近似するように連立方程式を解いて重みを決めることができる (3.1.2 参照). しかし空間2次元以上では重ね合わせる個数が増大し, この方法は効率的でない.

3. 数 値 例

3.1 1次元の例題

3.1.1 初期分布を解析的に表現する場合

空間1次元で区間の両端で第1種境界条件を与え, 屋根型関数を初期条件として与える.

方程式系

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-1 < x < 1)$$

$$u(-1, t) = u(1, t) = 0$$

$$u(x, 0) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

ただし

$$f(x) = \begin{cases} 1-4x & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 1+4x & -\frac{1}{4} \leq x \leq 0 \\ 0 & x \geq \frac{1}{4} \text{ あるいは } x \leq -\frac{1}{4} \end{cases} \quad (7)$$

$f(x)$ に対するポアソンの式の積分は

$$h(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ (1+4x) \operatorname{erf}\left(\frac{x+(1/4)}{\sqrt{t}}\right) - 8x \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - (1-4x) \operatorname{erf}\left(\frac{x-(1/4)}{\sqrt{t}}\right) \right\} + 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \left\{ e^{-\frac{(x+(1/4))^2}{t}} - 2e^{-\frac{x^2}{t}} + e^{-\frac{(x-(1/4))^2}{t}} \right\} \quad (8)$$

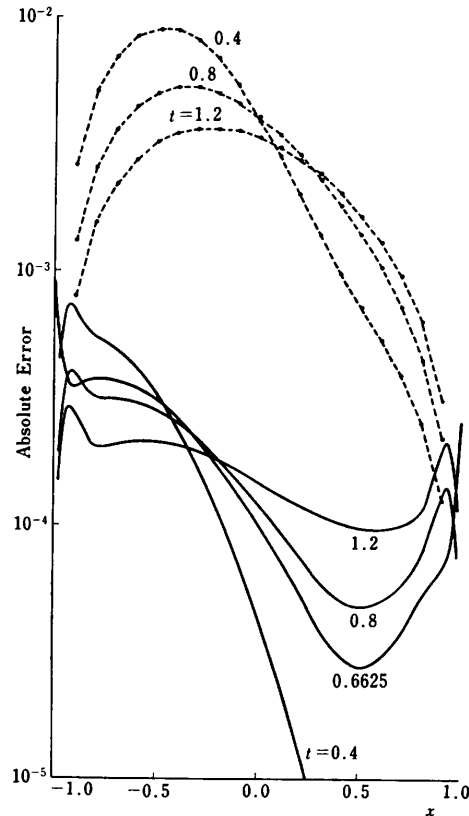


図2 区間 [-1, 1] における誤差の時間変化
破線は差分法, 実線は代用電荷法による誤差を示す.
 $\Delta t = 0.025, \Delta x = 0.1, \alpha = 0.13$
Fig. 2 Absolute errors in the interval [-1, 1] at different times.

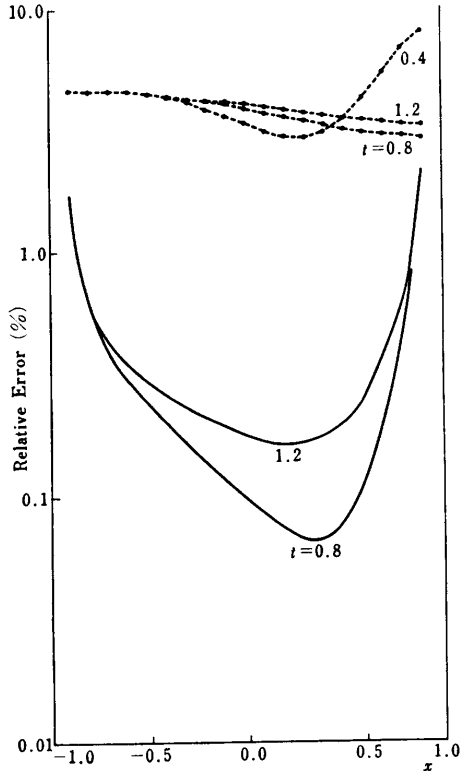


図3 区間 [-1, 1] における相対誤差の時間変化
説明は Fig. 2 と同じ
Fig. 3 Relative errors in the interval [-1, 1] at different times.

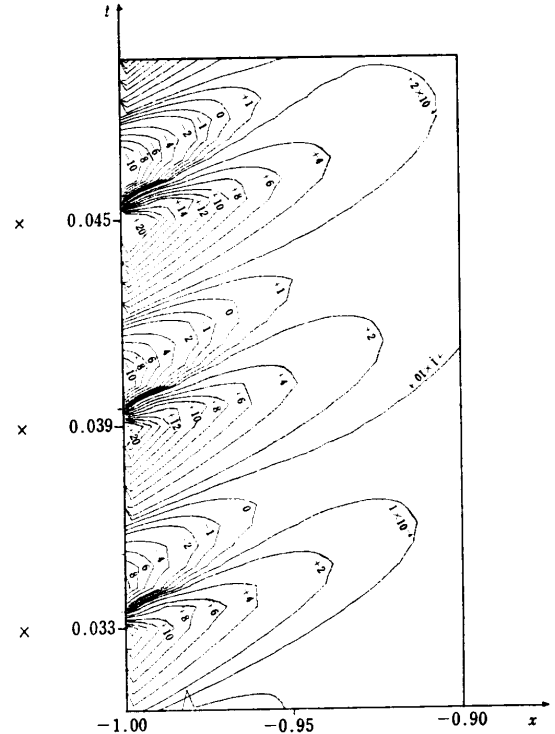


図4 $x-t$ 面上での数値解の誤差分布
ここでは初期分布についての誤差を含まない
 $\Delta t=0.006, \alpha=0.03$
Fig. 4 Error distribution on the $x-t$ plane.

となる。ここで $\text{erf}(x)$ は

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$$

で定義される誤差関数である。

区間 [-1, 1] における近似解 $\hat{u}(x, t)$ の誤差を図2, 図3に示す。時間メッシュ Δt 及び境界と極の最短距離 α はそれぞれ $\Delta t=0.025, \alpha=0.13$ であり、したがって $a=1.352$ となる。ただし a は $a \equiv 2\alpha^2/\Delta t$ で与えられる。また破線と実線はそれぞれ差分法(クランク・ニコルソン法)及び代用電荷法による数値解の誤差を示す。代用電荷法による解はこの場合初期分布の誤差を含まないので、境界上で誤差の最大値と最小値をとり、時間軸上の拘束点に最小値、拘束点の中間に最大値がある。図4は $x-t$ 面上での境界付近の誤差分布である。ただし $\Delta t=0.006, \alpha=0.03$ としている。時間軸に沿って正負の誤差が交互に現われる点はラプラス方程式の場合¹²⁾とよく似ているが、位相が領域内部に向かってずれる点は異なっている。

3.1.2 初期分布を近似する場合

ポアソンの式を用いずに、 $t < 0$ に極のあるグリーン

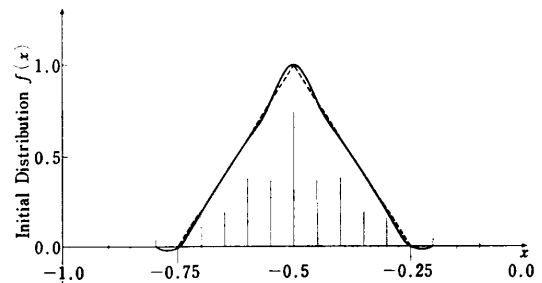


図5 グリーン関数による初期分布の近似
Fig. 5 Approximate curve for the initial distribution by the superposition of Green's functions. The bar graph shows the relative weights of Green's function.

関数で初期分布を近似する方法をとる。一般に積分が解析的に行えない場合はこの方法をとらなければならない。図5はこれによる初期分布の近似曲線と重ね合わせたグリーン関数の相対的重みを示している。また図6はこの場合の数値解の $x-t$ 面上での誤差分布である ($\Delta t=0.006, \alpha=0.03$)。グリーン関数の極が図中に×印で示されている。初期分布の誤差がプルームのように時間軸方向にのび、グリーン関数の時間的影響距離が空間のそれに比べて長いことを示す。

3.2 2次元の例題

3.1.1の結果を空間2次元の問題に応用した。幾何学的配置は図7を参照されたい。グリーン関数、境界条件、初期条件は次の通りである。

グリーン関数 (基本解) :

$$G(x-\xi, y-\eta, t-\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\pi(t-\tau)} e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{t-\tau}} & t > \tau \\ 0 & t \leq \tau \end{cases}$$

ただし $K^2=1/4$ としている。

境界条件: $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ ($x=0$ で), $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ ($y=0$ で),

$u=0$ または $\frac{\partial u}{\partial n}=0$ (円周上で).

(第1種) (第2種)

初期条件: $u(x, y, 0)=f(x+1/2) \cdot f(y)$ ただし $f(x)$ は(7)式で与えた関数である。

このうち $x=0$ と $y=0$ における境界条件は鏡像

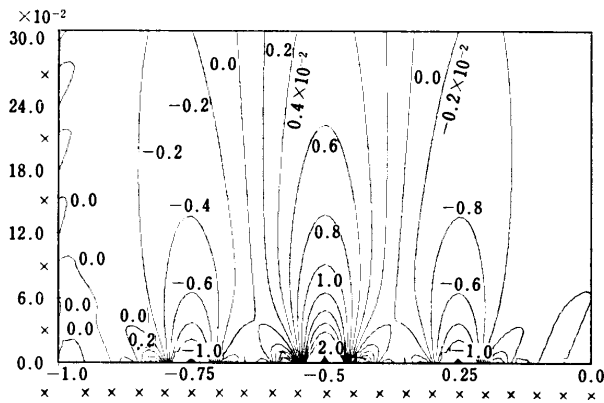


図6 $x-t$ 面上での誤差分布
ここでは初期分布をグリーン関数の重ね合わせで近似する。
 $\Delta t, \alpha$ は Fig. 4 と同じ
Fig. 6 Error distribution on the $x-t$ plane.

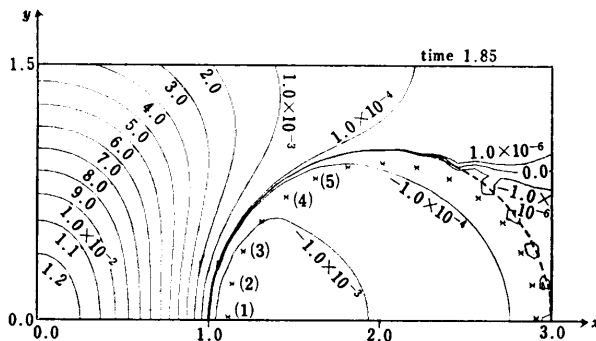


図7 温度場の数値解 (第1種境界条件)
 $\Delta t=0.025, \alpha=0.1$
Fig. 7 Calculated temperature field, where the Dirichlet condition is given on the circular boundary.

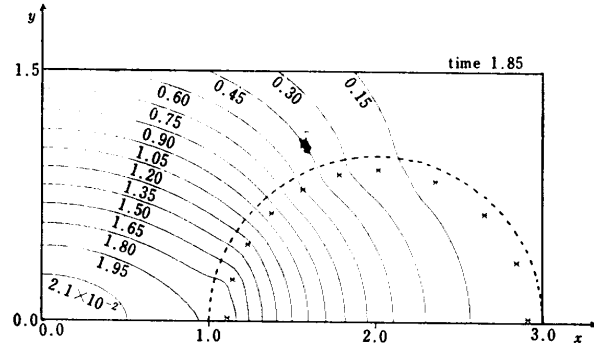


図8 温度場の数値解 (第2種境界条件)
 $\Delta t, \alpha$ は図7と同じ

Fig. 8 Calculated temperature field, where the Neuman condition is given on the circular boundary.

をとることによって満たすことができる。このように代用電荷法では問題の対称性をうまく利用でき、解析性の強い方法といえる。

第1種, 第2種境界条件に対する数値解 $\tilde{u}(x, y, t)$ をそれぞれ図7, 図8に示す。ここでは $\Delta t=0.025, \alpha=0.1$ としている。図9は第1種の問題の場合の熱源の強さの時間変化を5点(図7参照)について示している。ただし正負の符号をいれ換え, (4), (5)のスケールを100倍に拡大している。第1種条件の場合, 初期分布と反対側の円の境界付近で0の等値線が円からはずれているがほとんど無視できる(単精度計算の丸め誤差程度である)。第2種条件の場合の特徴は等値線が極を結ぶ曲線を通過するときに屈折することである。これは1重層のソース面でポテンシャルの法線方向の微分が不連続になる^{7),8)} ことに対応する。

図10はグリーン関数の極と境界の最短距離 α による誤差の変化を第1種の問題について示している。誤差は境界上の60点での絶対値の算術平均であって、時

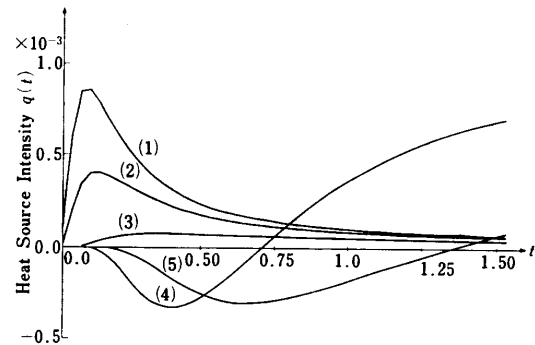


図9 熱源の強さの時間変化 (第1種境界条件)
番号は図7の熱源を示す。
Fig. 9 Plot of heat source intensities versus time for the Dirichlet problem.

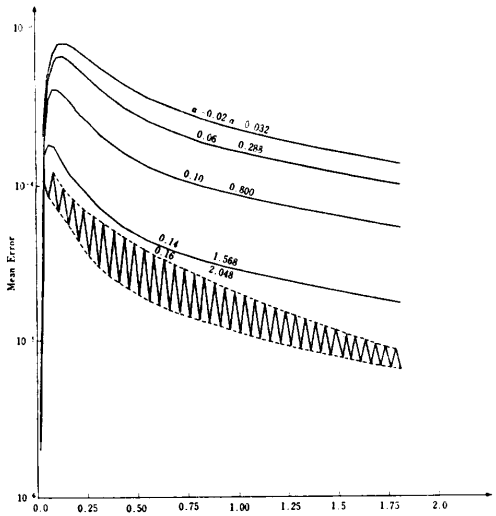


図 10 円形境界上の平均誤差の時間変化
パラメータ a は $a=2\alpha^2/\Delta t$ で与えられる。

Fig. 10 Plot of mean errors at the circular boundary versus time for five different values of a .

間軸の拘束点の中間（ここで誤差が最大になる）で計算している。ラプラス方程式のときと同様に、グリーン関数の極が境界から離れるに従って減少する傾向がみられる。パラメータ $a=2\alpha^2/\Delta t$ が約 2.0 を越すと解が振動し始め、ついには数値解が得られなくなる。これはラプラス方程式にはみられなかった特徴である。

3.3 差分法との比較

図 3, 図 2 は同一の例題に適用した差分法と代用電荷法(時間メッシュは同じ)による誤差分布である。差分のメッシュを $\Delta t=0.025$, $\Delta x=0.1$ としてクランク・ニコルソンの公式を用いている。代用電荷法の誤差は差分法に比べて 1桁程度小さい。ただしガウス分布曲線を初期値として与えた例では同一の Δt に対しては同程度の誤差になった。さらに特徴としていえることは代用電荷法の誤差(絶対誤差, 相対誤差ともに)が境界付近で最大となり、境界から離れるに従って小さくなるのに対して、差分法の場合は誤差は数値解の値に比例し、領域内に最大値があり、相対誤差は領域で一様になる傾向がある。

3.2 の例題は 2次元の開いた領域の問題であるが、代用電荷法を用いることによって連立方程式の次元を差分法に比べて著しく減少させることができる。また差分法のように境界の曲線を折線で近似する必要がなく、第 2種境界条件の取り扱いが簡単であり、無限遠の境界条件は自然に満たされる。ただ時間の経過にもなって計算量が增大する欠点がある。

4. 数値スキームの安定性

4.1 不安定現象

第 3章の数値例で、時間メッシュを固定してグリーン関数の極を境界から離してゆくと平均誤差が減少するが、限度を越えると不安定が生じ、数値解が振動する現象について述べた。一般に拡散方程式などの発展方程式を差分で近似したときに、そのスキームが安定である(誤差が計算のサイクルにともなって無限大に増幅されない)ための条件が存在する。すなわち拡散方程式を陽解法で差分近似する場合は時間メッシュ Δt , 空間メッシュ Δx について $2K^2\Delta t/\Delta x^2 \leq 1$ の制約がある⁶⁾。この論文で扱っているスキームについても類似の制約がある。この制約についての本質は(5)'式の q に関して 1次元の問題で議論できると思われるので次の積分方程式

$$\int_0^t \frac{q(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}} e^{-\frac{a^2}{t-\tau}} d\tau = f(t)$$

(l は空間の次元に対応する。 $l=1, 2, 3$) (10)

を離散化するスキームについて考案する。(10)式を離散化して以下の代数方程式系を導く。

$$\begin{aligned} \gamma_0 q_1 &= f_1 \\ \gamma_1 q_1 + \gamma_0 q_2 &= f_2 \\ \gamma_2 q_1 + \gamma_1 q_2 + \gamma_0 q_3 &= f_3 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \tag{11}$$

ここで $\gamma_i = e^a/(2i+1)^{1/2} \exp\{-a/(2i+1)\}$, $a=2\alpha^2/\Delta t$ であり、したがって $\gamma_0=1$ となる。(11)はたみこみ積分の離散的表現である。(11)の安定性を論ずるために、Baker, Keech¹⁰⁾ にならって安定性を定義する。

定義: 解の系列 $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ を求める(12)のスキームにおいて、 q_r における誤差 ξ_r は q_{r+k} において誤差 ε_{r+k} をもたらすが、 $\lim_{k \rightarrow \infty} |\varepsilon_{r+k}| = 0$ を満たすとき安定である。また $\lim_{k \rightarrow \infty} |\varepsilon_{r+k}| = \infty$ のとき不安定である。

一般性を失うことなく $r=1$ と取れ、 q_1 の誤差 ε_1 は

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \xi_1 \\ \varepsilon_2 &= -\gamma_1 \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 &= -\gamma_2 \varepsilon_1 - \gamma_1 \varepsilon_2 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

のように伝播してゆく。著者らが計算した結果ではパラメータ a のみが安定性を決め、安定・不安定の臨界値は $l=1$ について $a \approx 1.9$ という結果が得られた。

$a > 1.9$ で不安定になり誤差は 1ステップごとに符

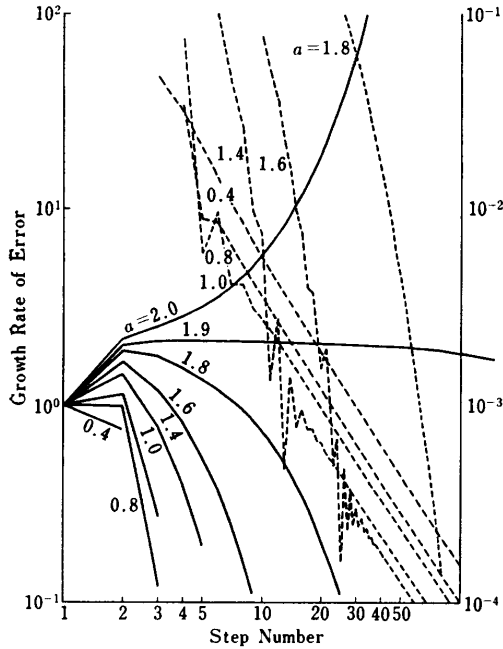


図 11 初期誤差の成長率
Fig. 11 Growth rates of the initial error for different values of a .

号を変えながら、その絶対値は指数関数的に増大する (図 11 参照)。また $a < 1.9$ では誤差は最初振動しながら指数関数的に減少し、振動が減衰してからは $t^{-\delta}$ (δ の値は $l=1$ の場合約 1.6, $l=2$ の場合約 1.3) に比例して減少する。スキームが不安定になる場合が生ずるのは差分法と同じであるが、時間メッシュ Δt についての制約は対照的である。すなわち陽解法の差分スキームでは Δt を限度より大きくとれないが、代用電荷法では小さくとれない。

4.2 不安定の原因

不安定の原因は次のように説明できる。誤差の伝播は一般に

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_m &= -\sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j \epsilon_{m-j} \quad (m, n=1, 2, \dots) \\ \epsilon_0 &= \epsilon_{-1} = \epsilon_{-2} = \dots = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

と書けるが、この関係を信号 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-1}$ に対する数値フィルタ¹¹⁾と考えなおす。ただし離散化されているので、 $(i-(1/2))\Delta t < t < (i+(1/2))\Delta t$ のとき $\epsilon(t) = \epsilon_i$ となるような段階関数⁶⁾ $\epsilon(t)$ を導入する。したがって $\epsilon_{m-1}, \epsilon_{m-2}, \dots$ はフーリエ積分により

$$\begin{aligned} \epsilon_{m-1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(f) e^{i2\pi f(m-1)\Delta t} df \\ \epsilon_{m-2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(f) e^{i2\pi f(m-2)\Delta t} df \end{aligned}$$

と表わされるから、これを(12)式に代入すれば

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_m &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(f) e^{i2\pi f(m-1)\Delta t} \\ &\quad \cdot (\gamma_1 + \gamma_2 e^{-i2\pi f\Delta t} + \dots + \gamma_{n-1} e^{-i2\pi f(n-2)\Delta t}) df \end{aligned}$$

と表わされ、

$$\bar{E}(f) = G_n(f; a) E(f) \tag{13}$$

の関係が得られる。ここに $G_n(f; a) = \gamma_1 e^{-i2\pi f\Delta t} + \gamma_2 e^{-i2\pi f2\Delta t} + \dots + \gamma_{n-1} e^{-i2\pi f(n-1)\Delta t}$ であり、 $G_n(f; a)$ は入力 $E(f)$ に対するフィルタとみなされる。したがって誤差の伝播はこのようなフィルタを次々に通してゆくことと等価である。フィルタを通した回数を n とすると

$$E_n(f) = \left(\prod_{i=1}^n G_i(f; a) \right) E_0(f) \tag{14}$$

となり、これから

$$|E_n(f)| = \left(\prod_{i=1}^n |G_i(f; a)| \right) |E_0(f)| \tag{15}$$

の関係が得られる。したがって点ごと収束の意味で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |E_n(f)| = |E(f)| < \infty \tag{16}$$

となるためには、 $G_n(f; a)$ の性質から考えて

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |G_n(f; a)| = g(f; a) \leq 1 \tag{17}$$

でなければならない。特にナイキスト周波数 $f_N = 1/$

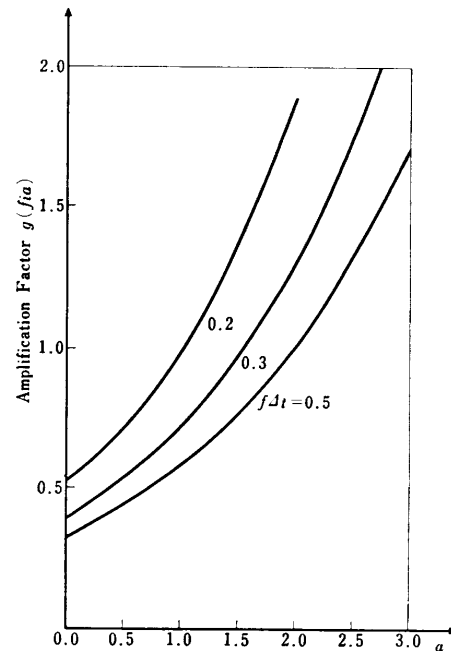


図 12 誤差の増幅係数
 f は誤差の周波数を表わす。
Fig. 12 Amplification factors against a for three different values of frequency.

$2\Delta t$ の誤差 (符号がステップごとに変わる) については

$$|G_n(f_N; a)| = \left| \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \gamma_i \right| \quad (18)$$

となり, $g(f_N; a) = 1$ となる a を求めると $l=1$ に対して $a \approx 2.0$ が得られる. さらに他の周波数について $g(f; a)$ を計算したのが図 12 である. ナイキスト周波数に対する $a \approx 2.0$ は数値実験から得られた値 ($a \approx 1.9$) よりも多少大きい. $l=2$ の場合は数値実験では $a \approx 2.5$, 同様の理論的解析では $a \approx 2.6$ となる. しかし図 12 が示すところでは $a < 1.9$ にしたときも, 誤差の低周波数部分は増幅され, 高周波数部分の減少を相殺して無限大に発散してしまうはずである. しかしこの矛盾はフーリエ変換のときに t の区間を $(-\infty, \infty)$ とした結果であり, 実際にはフィルタとして

$$\varepsilon(t) = H\left(t - \frac{T}{2}; -\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j \varepsilon(t - j\Delta t)$$

$$T = \left(n + \frac{1}{2}\right) \Delta t \quad (19)$$

を考える必要がある. ここで $H(x; -c, c)$ は

$$H(x; -c, c) = H(x+c) - H(x-c)$$

で定義され, $H(x)$ はヘビサイド関数である. (19) 式のフーリエ変換¹³⁾からフィルタは同時に誤差のスペクトルを平滑化する働きをすることがわかる. 誤差の低周波数部分は高周波数領域に移動し, $l=1$ で $a < 1.9$, $l=2$ で $a < 2.5$ のとき誤差は時間とともに減少してゆく.

5. むすび

ラプラス方程式の近似解法である代用電荷法の拡散方程式への応用を試みた. その結果きわめて有用であることがわかった. 差分法や有限要素法に比較してデータ量が少なく, 場の一点での近似解を求めるのであれば計算時間も短い. このことは空間 2 次元以上の問題において大きな長所といえる. 解析的手法と数値的手法を組み合わせることができるので, 差分法で扱えないデータに特異性のある問題に適し, また開かれた領域の問題に適している. さらに誤差が拡散方程式

の解であるという性質は誤差評価に便利である. また境界の特異積分を避けた点で境界要素法に比べて扱いやすく, 原理は簡単である.

加えて数値スキームの不安定性を明らかにした. 差分法と対照的に時間メッシュを限度より小さくとれない.

代用電荷法は柔軟性のある解法であり, 自由境界の問題への応用などが考えられる. 今後の検討課題としたい.

参 考 文 献

- 1) Forsythe, G. E. and Wasow, W. R., 藤野訳: 偏微分方程式の差分法による近似解法, 吉岡書店 (1968).
- 2) 加川幸雄: 有限要素法入門, オーム社 (1977).
- 3) Brebbia, C. A. and Walker, S., 神谷, 田中 (正), 田中 (喜) 訳: 境界要素法の基礎と応用, 培風館 (1981).
- 4) 村島, 久原: リーマン面上のグリーン関数の重ね合わせによる二次元ラプラス方程式の近似解法, 情報処理, Vol. 21, No. 5, pp. 455-467 (1980).
- 5) ペトロフスキー, 渡辺訳: 偏微分方程式論, p. 277, p. 401, 東京図書 (1958).
- 6) 矢野, 野木: 発展方程式の数値解析, p. 36, p. 45, 岩波書店 (1977).
- 7) 山口, 野木: ステファン問題, p. 27, p. 40, p. 34, 産業図書 (1977).
- 8) 宇野, 洪: ポテンシャル, p. 73, 培風館 (1961).
- 9) アラマノヴィチ, レーヴィン, 山崎, 筒井訳: 数理物理学入門, p. 125, 東京図書 (1966).
- 10) Baker, C. T. H. and Keech, M. S.: Stability regions in the numerical treatment of Volterra integral equations, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 15, pp. 394-417 (1978).
- 11) 日野幹雄: スペクトル解析, p. 145, 朝倉書店 (1977).
- 12) 村島, 加藤, 宮近: 代用電荷法における誤差の性質について, 電気学会論文誌 A, Vol. 98, p. 39 (1978).
- 13) 今井 功: 応用超関数論 I, p. 105, サイエンス社 (1981).

(昭和 56 年 9 月 28 日受付)

(昭和 56 年 11 月 18 日採録)