2G-06

Multigrid Reduction in Time における レベル間自由度比に関する考察

金子重郎† 田口悠太† 野村直也† 藤井昭宏† 田中輝雄†
工学院大学†

1 はじめに

時間発展する方程式の一般的な解法は, 時間ステップの順に逐次に解いていく方法に基づいている. そのため, 従来の時間発展する方程式の並列化は空間方向の並列性にのみ制限された. しかし, 空間方向に十分な並列性が取り出せない場合, 時間方向の逐次性がボトルネックとなる. このボトルネックを緩和するために, 時間方向の並列化を検討する必要がある. そこで時間方向の並列化にマルチグリッド法を適用する手法が提案されている. マルチグリッド法とは, 離散化問題を格子に見立てて近似解を求め, 求めた近似解から誤差を導き格子を粗くして解く手法である. マルチグリッド法を用いた時間方向の並列化手法の一つとして, R.D.Falgout ら[1][2]により提案されている Multigrid Reduction in Time(MGRIT)がある. MGRIT の時間方向の格子点は, m 個飛ばしの点を C-point とし, 間の m-1 点を F-point とする. このときの m をレベル間自由度比と呼ぶ.

本研究では, 時間方向の粗さであるレベル間自由度比 m を変化させることによる MGRIT の性能の変化について考察する.

2 Multigrid in Time

2.1 Multigrid in time

以下の微分方程式を仮定する.

(2.1) $u'(t) = f\big(t, u(t)\big)$, $u(0) = g_0$, $t \in [0, T]$

Nを時間方向のメッシュサイズとして一つ前の時間ステップuを用いて(2.1)を離散化すると,

(2.2) $u_i = \Phi_i(u_{i-1}) + g_i (1 \le i \le N)$, $u_0 = g_0$

が得られる. Φ_iはプロパゲータと呼ばれ, fが線形の場合, $\Phi_i(u_{i-1}) = \Phi_i u_{i-1}$として書き換えられる. このとき, (2.2)は行列

(2.3) $$A(\boldsymbol{u}) \equiv \begin{pmatrix} I & & & \\ -\Phi_i & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\Phi_i & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_N \end{pmatrix} \equiv \boldsymbol{g}$$

と表される. 粗くした時間方向のメッシュサイズを$N_\Delta = N/m$とし, (2.3)を時間方向に粗くすると,

(2.4)

$$A_\Delta(\boldsymbol{u}_\Delta) \equiv \begin{pmatrix} I_\Delta & & & \\ -\Phi_\Delta & I_\Delta & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\Phi_\Delta & I_\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\Delta,0} \\ u_{\Delta,1} \\ \vdots \\ u_{\Delta,N\Delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{\Delta,0} \\ g_{\Delta,1} \\ \vdots \\ g_{\Delta,N\Delta} \end{pmatrix} \equiv \boldsymbol{g}_\Delta$$

となる. MGRIT はこのように問題を粗くする.

2.2 F-relaxation と C-relaxation

F-relaxation（図 1）は各 C-point を基点として同間の F-point を逐次的に更新する緩和法である. 各間の計算は逐次処理であるが, 他の C-point から独立して計算しているため, 並列に計算できる.

C-relaxation（図 2）は一つ前の F-point を利用して C-point を更新する緩和法でありそれぞれの計算は独立しているため, 並列に処理できる.

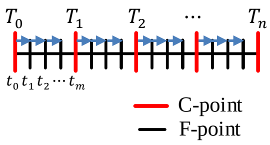

図 1 F-relaxation

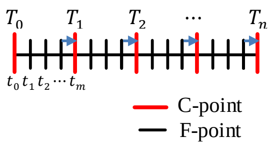

図 2 C-relaxation

2.3 V-Cycle

MGRIT の V-Cycle ついて説明する. 図 3 にアルゴリズムを示す.

最下層でないならば, $A_l \boldsymbol{u_l} = \boldsymbol{g_l}$に F-relaxation, C-relaxation, F-relaxation をかけて$\boldsymbol{u}$について解く（4 行目）. 次にベクトルを m 個飛ばしに縮める行列Rを用いて残差$\boldsymbol{r}$を求める（5 行目）. 次の階層の時間方向のメッシュサイズ$Nt_{l+1} = Nt_l/m$とし, $A_{l+1}\boldsymbol{u_{l+1}} = \boldsymbol{r}$についてさらに MGRIT をかける（7 行目）. 最下層のときは, $A_l \boldsymbol{u_l} = \boldsymbol{g_l}$を前進代入で解く（2 行目）. 下の階層で求めた$\boldsymbol{u_{l+1}}$を m 倍に広げる行列$P$を用いて$\boldsymbol{u}$に足しこみ$A_l \boldsymbol{u_l} = \boldsymbol{g_l}$に F-relaxation をかける（8,9 行目）.

Performance Analysis of Coarsening Factor in Multigrid-in-time Method
Shigeo Kaneko†, Yuta Taguchi†, Naoya Nomura†, Akihiro Fujii† and Teruo Tanaka†
†Kogakuin University

このように問題を繰り返し解くことにより，解$\boldsymbol{u}$を求める．

```
Function MGRIT(l)
If l is the coarsest level L
   A_l u_l = g_l
Else
   A_l u_l = g_l using FCF-relaxation()
   r_l = R(g_l - A_l u_l)
   g_{l+1} = r_l
   MGRIT(l + 1)
   u_l = u_l + P u_{l+1}
   A_l u_l = g_l using F-relaxation()
```

図 3　MGRIT のアルゴリズム

3　実験

本研究では一次元熱伝導方程式

(2.7)　$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$

を陰解法を用いて離散化した問題を題材に，時間方向のメッシュサイズNt，レベル間自由度比 m を変化させて MGRIT の評価を行った．なお一次元熱伝導方程式のパラメータである熱拡散係数 $k = 0.1$，空間方向のメッシュサイズ Ns＝10，空間方向のメッシュ間の長さ$\mathrm{dx} = 0.1$，時間方向のメッシュ間の長さ$\mathrm{dt} = 0.0001$に固定し，反復の終了条件は残差の 2 ノルムを10^{-7}とした．

3.1　反復回数の安定性

まず，MGRIT の反復回数の安定性について$m = 2$と$m = 128$，$m = 2048$の 3 つについて，Nt を$32 \leq \mathrm{Nt} \leq 524288$まで 2 のべき乗ずつ変化させて計測した結果が図 4 である．図 4 より時間方向の問題サイズが 524288 以上になると反復回数が変化しなくなる．これは問題サイズを増やしても反復回数が一定であることを示しており，$O(\mathrm{N}t)$で解けることが分かる．

3.2　m の実行時間に与える影響

次に MGRIT の m を変化させて反復回数がどのように変化するかを$\mathrm{Ns} = 10$，Nt=524288，反復の m を$2 \leq \mathrm{m} \leq 2048$，まで 2 乗ずつ計測した結果が図 5 である．図 5 より m が変化しても反復回数が大幅に減少しないことが分かる．

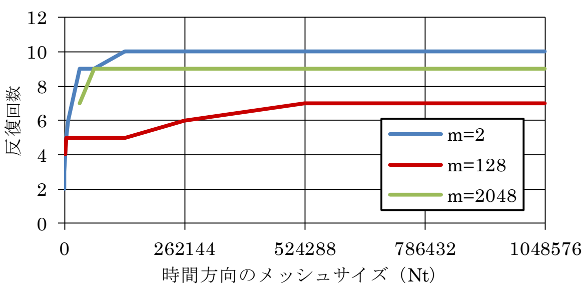

図 4　反復回数の安定性

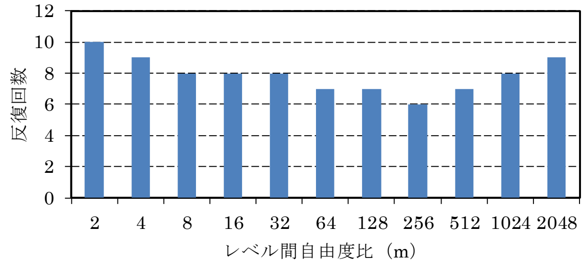

図 5　m の変化による反復回数の違い

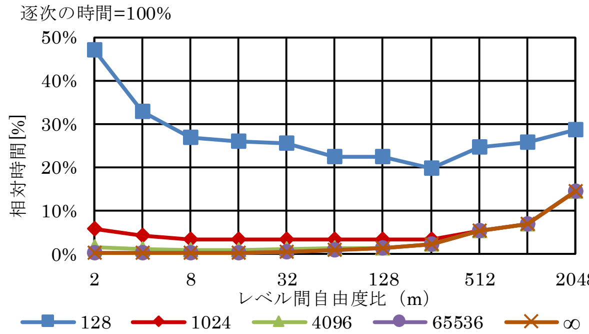

図 6　利用できる並列度ごとの予測相対時間

各 m での V-cycle 計算量と反復回数を用いることにより，各 m の総計算量が求まる．総計算量を逐次の計算量で割ることにより，逐次の時間を 100 としたときの相対時間を求められる．

V-cycle 計算は最下層の計算以外は並列に処理できるが，時間方向の並列化には上限があり，最大でNt_l/m個まで並列化可能である．Nt_lはその階層での時間方向のメッシュサイズである．使用可能な並列度を 128，1024，4096，65536，無制限（∞）とし，m が変化したときの予測相対時間の変化を図 6 に示す． MGRIT は大規模な並列環境では m が小さい方が時間方向を逐次で求めるよりも大幅な実行時間の短縮が見込める．しかし，並列度の限られた環境では m がある程度大きい方が実行時間の短縮につながると考えられる．

4　おわりに

本研究では，レベル間自由度比 m を変化させることによる MGRIT の実行時間の変化について考察した．MGRIT は大規模な並列環境では，m が小さいほうが実行時間の短縮が見込める．今後の課題としては，Nt=524288 の問題を並列環境で評価を行い，図 6 の曲線とほぼ一致することを確かめ，問題を変えても有効性があるかを検証する．

参考文献

[1] R.D Falgout, Parallel Time Integration with Multigrid Reduction for a Compressible Fluid Dynamics Application (2014).

[2] R.D Falgout, Parallel time integration with multigrid (2013).