

グラフの M 分解による大規模連立方程式の構造解析†

室 田 一 雄††

大規模な非線形連立方程式の構造をグラフに表現することによって、その構造的な可解性の判定、不整合部分の検出、半順序構造をもった部分問題への分解などを効率的に行うことができる。本論文では、連立方程式の表現グラフ上の Menger 型リンクに基づく M 分解によって、連立方程式の最も細かなブロック三角化が得られることを示す。とくに、表現グラフ上の閉路のうち、M 分解の結果、一つの既約成分内にあるものだけが本質的な方程式に対応することを指摘する。また、不整合部分の構造を明らかにするためのグラフ論的分解、連立方程式を数値的に解く際の計算量についても考察する。

1. はじめに

大規模なシステム、あるいは、それを記述する非線形連立方程式の構造をグラフに表現することによって、その構造的な整合性の判定、不整合部分の検出、階層構造をもった部分システムへの分解などを効率的に行うことができる^{4), 5), 8), 9)}。

本論文で扱う標準形の連立方程式とは、 x_j ($j=1, \dots, N$) と u_k ($k=1, \dots, K$) を未知数とし、 y_i ($i=1, \dots, M$) をパラメタとする

$$\left. \begin{aligned} y_i &= f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (i=1, \dots, M) \\ u_k &= g_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (k=1, \dots, K) \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

の形の、一般に非線形の連立方程式である⁴⁾。その表現グラフ G とは、変数 (x_j, u_l, y_i) の間の関数関係 (因果関係) を表現するグラフで、 $X \equiv \{x_1, \dots, x_N\}$, $U \equiv \{u_1, \dots, u_K\}$, $Y \equiv \{y_1, \dots, y_M\}$ の合併 $V = X \cup U \cup Y$ を点集合とし、

$$y_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

の右辺に実質的に現れる変数 x_j, u_l から y_i への枝、および

$$u_k = g_k(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

の右辺に実質的に現れる変数 x_j, u_l から u_k への枝をもつグラフである⁴⁾。標準形の連立方程式の表現グラフ G においては、 $X \cap Y = \emptyset$ であり、 X の点に入る枝、 Y の点から出る枝はない。

パラメタ $\mathbf{y}$ のある値に対して、連立方程式 (1.1) が解をもつとする。パラメタ $\mathbf{y}$ に任意の摂動を与えると、それに応じて (1.1) が一意解をもつ構造をしてい

るかどうかについて次の結果が知られている：

定理 1.1 (文献 4) の定理 2.3) 標準形の連立方程式が構造的に可解*であるための必要十分条件は、その表現グラフ G 上で X から Y への Menger 型完全リンクが存在することである。■

一方、“入口” X と “出口” Y の定義されたグラフに対して、 X から Y への Menger 型リンクの構造に基づいて M 分解が定義されている⁶⁾。本論文では、連立方程式 (1.1) の表現グラフ G の (X を入口、 Y を出口とする) M 分解によって (1.1) がブロック三角化されることを示す。さらに、(1.1) が構造的に可解である場合には、M 分解による各既約成分に対応する部分問題も構造的に可解であり、かつ、構造的な可解性を保ったままそれ以上細かく分解することはできないことを示す。とくに、閉路を除くための <DD> 型変数の導入によって M-既約成分が分解されることはできないことを示す。

次に、表現グラフ上の閉路には、一つの M-既約成分に含まれるものと、M-既約成分を結ぶ節点を通るものの 2 種があり、前者だけが反復法等によって “解かねばならない” 本質的な方程式に対応し、後者については計算順序を適当に選ぶことによって代入計算だけで済ますことができることを指摘する。また、不整合部分の構造を明らかにするために M 分解の拡張を行い、最後に、連立方程式を数値的に解く際の計算量を少なくするという観点からは、M 分解は必ずしも最適でないことを例示する。

† Structural Analysis of a Large-Scale System of Equations by Means of the M-Decomposition of a Graph by KAZUO MUROTA (Department of Mathematical Engineering and Instrumentation Physics, Faculty of Engineering, University of Tokyo).

†† 東京大学工学部計数工学科

* 偏導関数 $\partial f_i / \partial x_j, \partial f_i / \partial u_l, \partial g_k / \partial x_j, \partial g_k / \partial u_l$ ($i=1, \dots, M; j=1, \dots, N; k, l=1, \dots, K$) が有理数体 $\mathbb{Q}$ のある拡大体の元と見なせてそれらは $\mathbb{Q}$ 上で代数的に独立である——という “一般的” な場合に、(1.1) から u_k ($k=1, \dots, K$) を消去した連立方程式の x_j ($j=1, \dots, N$) に関する Jacobian が 0 でないとき、連立方程式 (1.1) は構造的に可解であると呼ばれる⁴⁾。

2. M分解によるブロック三角化

入口 X , 出口 Y ($X \cap Y = \emptyset$) の指定されたグラフ $G(V, E)$ ($V = X \cup U \cup Y$) に対して, X から Y への Menger 型リンク, あるいは (X, Y) の最小分離集合, の構造に基づいて M分解が定義されている⁶⁾. M分解は, 半順序 ($\geq$) 構造をもつ, V の部分集合の族 $\{V_0, V_{-}\} \cup \{V_j\}_{j=1}^R$ ($V = \bigcup_{j=0}^{\infty} V_j$) である. それぞれの V_j を (M-)既約成分, $\{V_j\}_{j=1}^R$ を整合部, V_0 を極大不整合部, V_{-} を極小不整合部という. 各 $v \in V$ は一つまたは二つの既約成分に属する. 二つの既約成分に属する点を節点という (M分解の詳細な定義や性質, および M分解を実際に求める算法については文献 6) を参照のこと).

各 M-既約成分 V_j ($0 \leq j \leq \infty$) に対し, 入口 X_j ($\subset V_j$), 出口 Y_j ($\subset V_j$) を

$$\left. \begin{aligned} X_j &= (X \cap V_j) \\ &\cup \{u \in V_j \mid \exists V_i, u \in V_i \cap V_j, V_i \geq V_j\}, \\ Y_j &= (Y \cap V_j) \\ &\cup \{u \in V_j \mid \exists V_i, u \in V_i \cap V_j, V_j \geq V_i\} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

で定義する. V_j が定める G の部分グラフにおいて, X_j に入る枝と Y_j から出る枝を除去したグラフを G_j とする.

連立方程式 (1.1) の表現グラフ G の分解 $\{V_0, V_{-}\} \cup \{V_j\}_{j=1}^R$ を考えよう. M 分解の半順序によって, (1.1) が M-既約成分 V_j に対応する部分問題を対角ブロックとしてブロック三角化される. ここで, V_j に対応する部分問題とは, (2.1) で定義された Y_j の点をパラメタ, $V_j \setminus Y_j$ の点を未知数, その他の点を既知の定数と見なした連立方程式をいう. その表現グラフは, 上で定義したグラフ G_j である. 構造的可解性の条件 (定理 1.1) と M分解の性質 (文献 6) の定理 2.2) により次のことがわかる.

定理 2.1 i) 整合部の既約成分 V_j ($1 \leq j \leq R$) に対応する部分問題は構造的に可解であり, 構造的可解性を保ったままでより小さな部分問題に分解することはできない. V_j に対応する部分問題は, $V_j \geq V_i$ なる V_i に含まれる変数の値がすべて与えられると一意的に解ける構造をしている (これは, V_0, V_{-} が空集合でない場合にも成立する).

ii) 不整合部 V_0, V_{-} に対応する部分問題が存在すれば, それらは構造的に可解でない. V_0 に対応するものは未知数の数が方程式の数より多く (条件不

足; underdetermined), 逆に, V_{-} に対応するものは未知数の数が方程式の数より少ない (条件過剰; overdetermined).

iii) $V_0 = V_{-} = \emptyset$ が (1.1) の構造的可解性のための必要十分条件である. ■

次の例題を考えよう.

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= f_1(u_2) \\ y_2 &= f_2(u_2, u_7) \\ u_1 &= g_1(x_1, u_2, u_3, u_7) \\ u_2 &= g_2(u_1, u_5) \\ u_3 &= g_3(x_2, u_4) \\ u_4 &= g_4(x_2, u_3) \\ u_5 &= g_5(u_3, u_4) \\ u_6 &= g_6(u_1, u_5, u_{10}) \\ u_7 &= g_7(u_6) \\ u_8 &= g_8(u_7, u_9) \\ u_9 &= g_9(u_8) \\ u_{10} &= g_{10}(u_9) \\ u_{11} &= g_{11}(u_4, u_9, u_{11}) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

その表現グラフ G および M分解は 図 1 に示ようになる. $V_0 = V_{-} = \emptyset$ であるから, 連立方程式 (2.2) は構造的に可解である. 表現グラフ G は, 図 2 に示す半順序構造をもった $V_1, \dots, V_9$ の九つの M-既約成分に分解される. この半順序に従って順次各部分問題を解くことによって (2.2) の解が求められる. なお, u_1, u_2, u_5, u_6, u_7 が節点であり, 枝 (u_2, u_1) は, V_3 に対応するグラフ G_3 に含まれないことに注意. また, L 分解* によると, V_9 を除いて $V_1, \dots, V_8$ がすべて合併されて一つの成分となる.

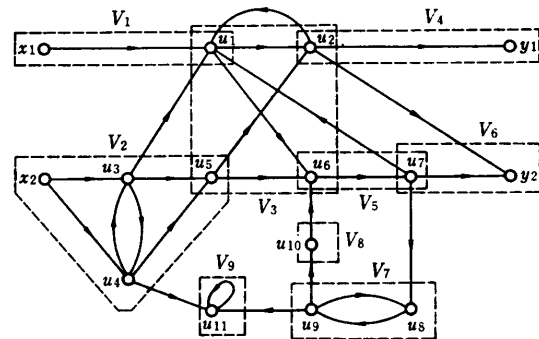


図 1 例題 (2.2) の表現グラフ G とその M 分解
Fig. 1 The representation graph G of Example (2.2) and its M-decomposition.

* 表現グラフ上に X から Y への Menger 型完全リンクが存在するとき, ある完全リンクで対応づけられる ($x \in X, y \in Y$) に対し枝 (y, x) を付加したグラフの強連結成分分解を L 分解という. M 分解は半順序とともに, L 分解の細分である¹¹⁾.

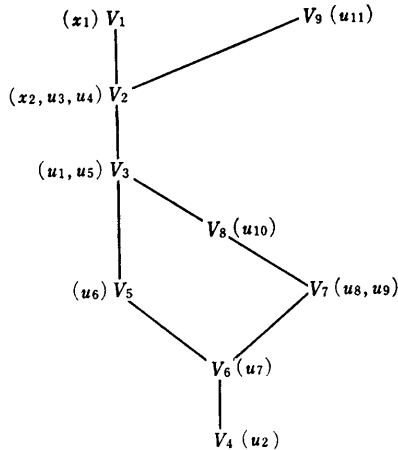


図 2 例題 (2.2) の M 分解の半順序を示す Hasse 図。
(): 対応する部分問題の未知数

Fig. 2 Hasse diagram representing the partial order of the M-decomposition for Example (2.2). (): Inherent unknowns of the corresponding subproblem.

連立方程式の標準形において左辺変数 (output variable⁸⁾) のとり方にはある程度の任意性がある。たとえば, (2.2) において, q_1 が u_7 , q_6 が u_1 , q_7 が u_6 について容易に解けるならば,

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= q_1(x_1, u_2, u_3, u_7) \\ u_6 &= q_6(u_1, u_5, u_{10}) \\ u_7 &= q_7(u_6) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} u_7 &= \tilde{q}_7(x_1, u_1, u_2, u_3) \\ u_1 &= \tilde{q}_1(u_5, u_6, u_{10}) \\ u_6 &= \tilde{q}_6(u_7) \end{aligned} \right.$$

と書くこともできる。このときの表現グラフ G' , およびその M 分解は図 3 のようになるが, 各部分問題の未知数, すなわち, $V_i \setminus Y_i$ は不変であり, さらに, 部分問題の間の半順序関係も変わらず, 図 2 に示したものに一致する。次の定理は, このような意味において, M 分解が左辺変数のとり方によらないことを示す。

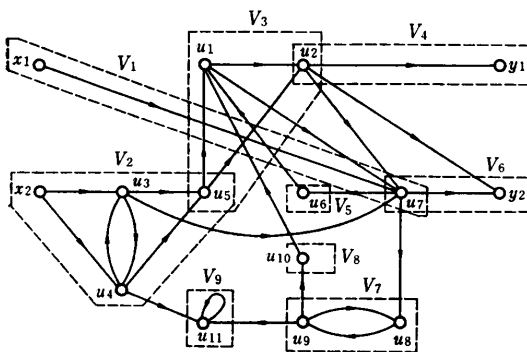


図 3 左辺変数変更後の表現グラフ G' とその M 分解
Fig. 3 The representation graph G' with its M-decomposition for Example (2.2) with a different set of output variables.

す。

定理 2.2 M 分解によって定まる部分問題の未知数および部分問題間の半順序関係は左辺変数のとり方によらない。■

(証明) グラフの M 分解が, その随伴 2 部グラフの Dulmage-Mendelsohn 分解に一致すること (文献 6) の定理 3.1) から明らかである。 (証終)

3. 閉路の扱い

すでに文献 4), 5), 9) に述べられているように, 表現グラフが閉路を含まなければ, X の点の値からその他のすべての点の値を代入計算だけで定めることができるので, その連立方程式のもつ本質的な未知数の数は $|X| (= |Y|)$ に等しい。しかし, 表現グラフが閉路を含む場合には, 各閉路は反復法等で“解かねばならない”方程式の存在を意味していると考え, すべての閉路を切るような (DD) 型変数^{5), 9)} と呼ばれる変数 $w_d \in U$ ($d=1, \dots, D$) を選んで, x_j ($j=1, \dots, N$) と w_d ($d=1, \dots, D$) とを本質的な未知数とする。

$$\left. \begin{aligned} y_i &= F_i(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \quad (i=1, \dots, M) \\ w_d &= G_d(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \quad (d=1, \dots, D) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

の形の簡約方程式をたとえば Newton 法系統の反復法で解くことになる。ここで, F_i, G_d は表現グラフの構造に基づいて代入計算だけで計算できる関数である。

例題 (2.2) において, L 分解で既約な成分 ($V_1, \dots, V_8$ の合併) に含まれる閉路をすべて切るには, 少なくとも三つの変数, たとえば, u_1, u_3, u_8 を (DD) 型とする必要がある。このとき, x_1, x_2, u_1, u_3, u_8 の都合 5 変数を本質的な未知数とする 5 元の簡約連立方程式を解くことになる。これに対し, M 分解によれば, V_2 と V_7 の部分問題を解くためにそれぞれ一つずつの (DD) 型変数, たとえば u_3 と u_8 を選べばよく, 各部分問題に対する本質的な未知数の数は, V_2, V_3 が 2, V_1, V_4, V_5, V_6, V_7 が 1, V_8 が 0 であり, たかだか 2 元の連立方程式を順次解けばよい。

ここで, 表現グラフ G 上の u_1, u_6, u_7 から成る閉路に注目しよう。M 分解によって (2.2) を解く際に, この閉路上には (DD) 型変数をとる必要がない。実際, M 分解の半順序に従って計算を進めることによって代入計算だけで済む。すなわち, この閉路は“解かねばならない”方程式の存在を必ずしも意味していな

いことがわかる。この他にも、 $u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}$ から成る閉路、 u_1, u_2 から成る閉路もこれと同種の閉路と考えられる。

これに対し、 V_2 に含まれる u_3, u_4 から成る閉路、 V_7 に含まれる u_8, u_9 から成る閉路、および V_9 の u_{11} の成す自己閉路は、いかなる分解によっても避けることのできない閉路であり、“解かねばならない”本質的な方程式の存在に対応していることがわかる。

このように、表現グラフ上の閉路は、M分解の節点を通るものと、通らないものの2種に分類できる。そして、節点を通らず、一つの G_i に含まれる閉路だけが“解かねばならない”本質的な方程式の存在に対応していることがわかる。これを本質的な閉路と呼ぶ。

L分解においては、表現グラフ上の強連結成分は同一の既約成分に属するので、上記の2種の閉路は区別されない。その結果、本質的でない閉路を切るためにも〈DD〉型変数（上記の例では u_1 ）が必要となり、簡約連立方程式の未知数の数がそれだけ増加する。

構造的に可解なM-既約成分に対応する部分問題を考えよう。そこで、以下では(1.1)自身がM-既約であるとする。閉路を切るためにいくつかの変数 $w_d \in U$ ($d=1, \dots, D$) を指定することは、表現グラフ上では、図4に示すように、各 w_d に対して極大点 x_{N+d} と極小点 y_{M+d} を考え、 w_d から出る枝をすべて x_{N+d} から出るように付けかえ、新たに $(w_d, y_{M+d}), (x_{N+d}, y_{M+d})$ なる枝を付け加えることに相当する。このとき、入口 X は $X \cup \{x_{N+1}, \dots, x_{N+D}\}$ ，出口 Y は $Y \cup \{y_{M+1}, \dots, y_{M+D}\}$ となる。たとえば、(1.1)で $X=Y=\phi$ ， $U=\{u\}$ の場合、すなわち、 $u=g(u)$ なる方程式に対しては、

$$\begin{cases} y=x-u \\ u=g(x) \end{cases}$$

と変形した後に、パラメタ $y=0$ として解くことに相当する。

M-既約成分内のいくつかの点を〈DD〉型に指定したとき、表現グラフは上記のような変形をうけると見

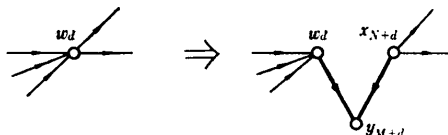


図4 〈DD〉型指定に伴う表現グラフの変形
Fig. 4 The modification of the representation graph for a variable of 〈DD〉 type.

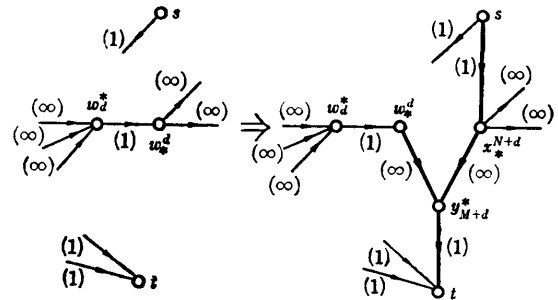


図5 〈DD〉型指定に伴う随伴ネットワークの変形。
() : 容量

Fig. 5 The modification of the associated network for a variable of 〈DD〉 type. () : Capacity.

なせるが、次の定理は、変形後のグラフも既約であることを示す。このことは、既約な表現グラフをもつ連立方程式は〈DD〉型変数を指定して閉路を除いた後も既約であり、より少ない数の未知数をもつ部分問題に分解されることはないことを意味する。

定理 3.1 入口 X ，出口 Y をもつM-既約なグラフ $G(V, E)$ ($V=X \cup U \cup Y$ ， $E \neq \phi$) において、 U に属するいくつかの点を〈DD〉型とする変形（図4）によって生ずるグラフはM-既約である。■

（証明） G に対して、その随伴ネットワーク^{*)} N_G を考える。 $w_d \in U$ を〈DD〉型としたとき、 G の変形（図4）に対応して、 N_G は図5のように変形される。 G 上に X から Y への最大リンクングをとり、 N_G 上に対応する最大流をとる。 w_d が最大リンクングに含まれる場合と含まれない場合に分けて、補助グラフ⁶⁾ 上の枝を調べれば容易に証明できる。（証終）

簡約方程式(3.1)に含まれる本質的な未知数の数は、〈DD〉型変数の選び方に依存する。しかし、上に述べたことにより、M-既約な表現グラフをもつ連立方程式の簡約方程式の次元（＝本質的な未知数の数）は、表現グラフの入口の大きさ $|X|$ と minimum feedback vertex set の大きさの和より小さくはないことがわかる。

4. 不整合部分の扱い

極大不整合部 V_0 または極小不整合部 V_- が空集合でないとき、連立方程式(1.1)は全体としては構造的に可解でない。しかし、整合部の既約成分 V_i に対応する部分問題それ自身は構造的に可解であり、 V_0 ， V_- の部分の未知数の値を定めると一意的に解ける構造をしている。とくに、 V_i が V_0, V_- と順序関係を

* 第4節を参照

もたなければ、 V_i に対応する部分問題は V_0, V_{∞} の部分の不整合性の影響はまったくくげずに、一意的に解が定まる (定理 2.1 の i) 参照)。

ここでは、不整合部分の構造を知ることが目的として、M 分解を拡張しよう (以下、用語や記法は文献 6) に従う)。入口 X 、出口 Y を指定されたグラフ $G(V, E)$ ($V = X \cup U \cup Y$) に対する随伴ネットワーク $N_G(\tilde{V}, \tilde{E}, c)$ ($\tilde{V} \equiv \{s, t\} \cup X_{*} \cup U_{*} \cup U^{*} \cup Y^{*}$; $\tilde{E} \equiv \{(v, w^{*}) | (v, w) \in E\} \cup \{(s, x_{*}) | x \in X\} \cup \{(u^{*}, u_{*}) | u \in U\} \cup \{(y^{*}, t) | y \in Y\}$) において、枝容量 c を次のように定める:

$$c(e) = \begin{cases} 1 & e = (u^{*}, u_{*}), u \in U \\ 1 - \alpha & e = (s, x_{*}), x \in X \\ 1 - \beta & e = (y^{*}, t), y \in Y \\ +\infty & e = (v, w^{*}), (v, w) \in E \end{cases}$$

ただし、 $\alpha, \beta (< 1)$ はパラメタである (M 分解を定義する際に用いた随伴ネットワークでは $\alpha = \beta = 0$ である)。

V の部分集合 $S (s \in S, t \in S)$ の定めるカットの容量を $\rho(S)$ と書く。 ρ の最小値を与える集合の族 $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$ は各 α, β に対して分配束を成し、さらに文献 2), 3), 7) の一般論から明らかに

$$\mathcal{L}_{all} \equiv \left(\bigcup_{0 \leq \alpha < 1} \mathcal{L}(\alpha, 0) \right) \cup \left(\bigcup_{0 \leq \beta < 1} \mathcal{L}(0, \beta) \right)$$

は分配束をなす。したがって、M 分解を定義したときと同様にして、 V の分解と半順序が定義できる。この分解は M 分解における不整合部 V_0, V_{∞} をそれぞれ細かく分解したものになっているので、

$$\{V_0^i\}_{i=1}^A \cup \{V_j\}_{j=1}^R \cup \{V_{\infty}^i\}_{i=1}^B \quad (4.1)$$

$$V_0 = \bigcup_{i=1}^A V_0^i, \quad V_{\infty} = \bigcup_{i=1}^B V_{\infty}^i \quad (4.2)$$

の形にかけ (ただし、M 分解を $\{V_0, V_{\infty}\} \cup \{V_j\}_{j=1}^R$ とする)。

分解 (4.2) に応じて、M 分解のときと同様に、入口 $X_0^i (X_{\infty}^i)$ 、出口 $Y_0^i (Y_{\infty}^i)$ をもつ部分グラフ $G_0^i (G_{\infty}^i)$ を定義する。このとき、次の性質がある。

命題 4.1 $|X_0^i| \geq |Y_0^i|$, $|X_{\infty}^i| \leq |Y_{\infty}^i|$. ■

図 6 のグラフ $G(V, E)$ ($V = X \cup U \cup Y$; $X \equiv \{x_j | j=1, \dots, 9\}$, $U \equiv \{u_k | k=1, \dots, 7\}$, $Y \equiv \{y_i | i=1, \dots, 3\}$) は、M 分解によると全体が極大不整合部 V_0 となる。 G に対する分解 (4.2) は図 6 に点線で示したようになり、 $\{V_0^i\}_{i=1}^4$ の半順序は

$$V_0^1 \geq V_0^2 \Leftrightarrow 1 \leq i \leq j \leq 4$$

となっている。また、入口 X_0^i 、出口 Y_0^i は、

$$X_0^1 = \{x_6, x_7, x_8, x_9\}, \quad Y_0^1 = \{u_5\}$$

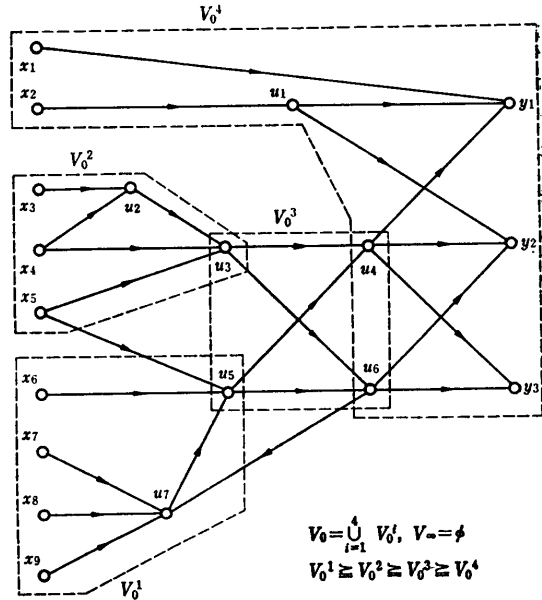


図 6 不整合部の分解 (4.2) の例

Fig. 6 An example of decomposition (4.2) for inconsistent parts.

$$\begin{aligned} X_0^2 &= \{x_3, x_4, x_5\}, & Y_0^2 &= \{u_3\} \\ X_0^3 &= \{u_3, u_5\}, & Y_0^3 &= \{u_4, u_6\} \\ X_0^4 &= \{x_1, x_2, u_4, u_6\}, & Y_0^4 &= \{y_1, y_2, y_3\} \end{aligned}$$

となり、たしかに命題 4.1 が成立している。

連立方程式 (1.1) が構造的に可解でない場合には、分解 (4.2) によって、その不整合性の構造がある程度明らかになる。 $V_0 \neq \emptyset$ ならば、 $|X_0| > |Y_0|$ で、未知数の数のほうが大きく余分な自由度 $|X_0| - |Y_0|$ が残されているが、命題 4.2 は、その余分な自由度が、各成分 V_0^i ($i=1, \dots, A$) に分配されることを意味している。 V_{∞} の部分についても類似の解釈が可能であろう。したがって不整合性を除去するには、分解 (4.2) の成分ごとに対処すればよいことになる。

5. 数値計算の手間の考察

構造的に可解性を保つ分解としては M 分解が最も細かい分解であるが、連立方程式 (1.1) を M-既約な部分問題にまで細分することは必ずしも有利ではない。

いま、(1.1) が構造的に可解であるとして、これを S 個の構造的に可解な標準形の部分問題 P_j ($j=1, \dots, S$) に分解したとする。 P_j の表現グラフを $G_j (X_j \cup U_j \cup Y_j, E_j)$ とし、 $|X_j| = |Y_j| = N_j$, $|U_j| = K_j$ とおく。また、 $\langle DD \rangle$ 型変数の数を D_j とすると、簡約方程式 (3.1) の次元は $N_j + D_j$ となる。

部分問題 P_j を、たとえば差分を用いた Newton

法で解くとして計算量を考える. 関数 f_i, g_k の値を評価する手間がすべて同程度 c_1 であるとすれば, (3.1) で (x, w) から (y, w) の値を計算する手間は, ほぼ $c_1(K_j + N_j)$ で表される. Jacobi 行列が密でありその反転のために $c_2(N_j + D_j)^3$ 程度の手間を要するものとする, Newton 法の反復 1 回あたりに必要な計算量は

$$c_1(K_j + N_j) + c_2(N_j + D_j)^3$$

となる. Newton 法の反復回数がすべての部分問題に対して一定と見なすと, (1.1) を解く手間は

$$\begin{aligned} c_1 \sum_{j=1}^S (K_j + N_j) + c_2 \sum_{j=1}^S (N_j + D_j)^3 \\ = c_1(K + N) + c_2 \sum_{j=1}^S (N_j + D_j)^3 \end{aligned} \quad (5.1)$$

に比例する程度と見積もれる.

分解を細かくすると, 各 j に対する N_j, D_j は小さくなるが, 部分問題の数 S が増大する. ここでは M 分解と L 分解とを比較しよう. 図 7 のような表現グラフは, M 分解では m 個の $N (=3)$ 次完全 2 部グラフに分解されるが, L 分解ではまったく分解されない. (5.1) によって必要な計算量を評価すると

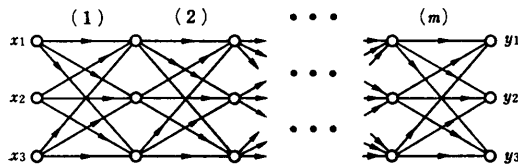


図 7 M分解よりL分解が有利な例

Fig. 7 An example for which L-decomposition is more successful than M-decomposition.

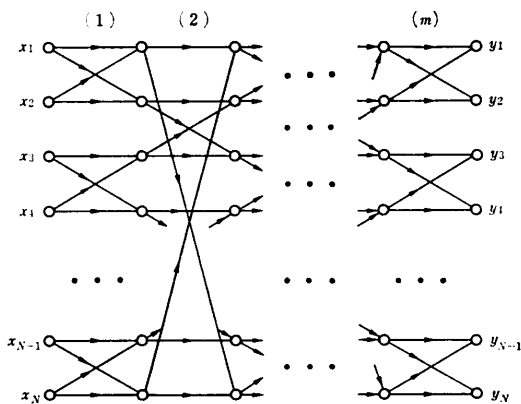


図 8 L分解よりM分解が有利な例 (N : 偶数)

Fig. 8 An example for which M-decomposition is more successful than L-decomposition (N : even)

M分解: $c_1 m N + c_2 m N^3$,

L分解: $c_1 m N + c_2 N^3$

となる. この例に対しては M 分解では細かすぎる.

次に, 図 8 のような表現グラフに対しては, M 分解では $m N/2$ 個の 2 次完全 2 部グラフに分かれるが, L 分解ではまったく分解されず, (5.1) の評価は

M分解: $c_1 m N + 4 c_2 m N$,

L分解: $c_1 m N + c_2 N^3$

となる. ここで, m の大きさが N と同程度以上になると, L 分解による簡約方程式の Jacobi 行列が密になることに注意すると, 少なくとも $m \sim N$ の場合には M 分解のほうが有利であることがわかる.

以上の例からも明らかなように M 分解, L 分解とも数値計算の手間という観点から最適な分解とは限らない.

一般に, 構造的に可解な部分問題 P_j への分解は, M 分解 $\{V_j\}$ の順序準同型によって得られる. たとえば, 二つの M-既約成分 $V_1, V_2 (V_1 \not\supseteq V_2)$ が $V_1 \not\supseteq V_j \not\supseteq V_2$ なる成分 V_j をもたなければ, V_1, V_2 に対応する部分問題 P_1, P_2 を合併して一つの部分問題 P' と考えることができる. N_i, K_i, D_i に対応する P' の諸量を N', K', D' とすると次の関係が成り立つことがただちにわかる:

$$N' + K' = (N_1 + K_1) + (N_2 + K_2)$$

$$N' \leq N_1 + N_2$$

$$D' \geq D_1 + D_2$$

最後の不等式は, M-既約成分の合併の結果, 本質的でない閉路を切るためにも $\langle DD \rangle$ 型変数が必要になる可能性を表している.

以上の考察から, 実際到大規模な連立方程式を解く際には, 適当な評価関数 (たとえば (5.1)) を定め, それを近似的に最小化するように M-既約成分を合併して部分問題 P_j を定めるのがよいと思われる.

6. むすび

本論文では, 大規模な連立方程式の構造的な可解性の判定, 部分問題への分解, 本質的な未知数の抽出などを, その表現グラフの M 分解に基づいて論じた. とくに, 表現グラフ上の閉路のなかで, 節点を通らないものを本質的閉路と呼んで区別した.

不整合部分の扱いは, システム設計の誤り修正の際に重要な問題である. 本論文で示した分解は一つの可能性にすぎない. 文献 1) に示されている手法も適用できよう. 数値計算量の最小化をも考慮した実際的な

分解を求める算法については今後の研究課題とした
い。

謝辞 最後に、多くの助言、批判を与えてくださっ
た東京大学工学部 伊理正夫教授に感謝します。

参 考 文 献

- 1) Fujishige, S.: Principal Structures of Submodular Systems, *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 2, pp. 77-79 (1980).
- 2) Iri, M.: A Review of Recent Work in Japan on Principal Partitions of Matroids and Their Applications, *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, Vol. 319, pp. 306-319 (1979).
- 3) Iri, M. and Fujishige, S.: Use of Matroid Theory in Operations Research, Circuits and Systems Theory, *Int. J. Sys. Sci.*, Vol. 12, pp. 27-54 (1981).
- 4) 伊理正夫, 恒川純吉, 室田一雄: グラフ論的手法による大規模連立方程式の構造的可解性判定とブロック三角化, 情報処理学会論文誌, Vol. 23, No. 1, pp. 88-95 (1982).
- 5) Iri, M., Tsunekawa, J. and Yajima, K.: The Graphical Techniques Used for a Chemical Process Simulator "JUSE GIFS", *Information Processing 71*, Proc. IFIP Congress 71, Vol. 2, Applications, pp. 1150-1155 (1972).
- 6) 室田一雄: グラフの Menger 型分解, 情報処理学会論文誌, Vol. 23, No. 3, pp. 280-287 (1982).
- 7) Nakamura, M. and Iri, M.: A Structural Theory for Submodular Functions, Polymatroids and Polymatroid Intersections, submitted.
- 8) Steward, D. V.: On an Approach to Techniques for the Analysis of the Structure of Large Systems of Equations, *SIAM Review*, Vol. 4, pp. 321-342 (1962).
- 9) 恒川純吉: ラージスケールシステムのグラフ論的分割, オペレーションズ・リサーチ, Vol. 25, pp. 788-793 (1980).

(昭和 57 年 1 月 13 日受付)

(昭和 57 年 2 月 16 日採録)