6個の関数計算による実質的6次の Runge-Kutta 法†

小野令美†† 戸田英雄†††

1階常微分方程式の初期値問題 $dy/dx=f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$ の6段 Kutta 型公式[1] $y_{n+1}=y_n+\sum_{i=1}^{6}\mu_i k_i$, $k_1=hf(x_n,y_n)$, $k_i=hf\left(x_n+\alpha_i h, y_n+\sum_{j=1}^{i-1}\beta_{ij}k_j\right)$, $i=2,\cdots,6$, では, $O(h^5)$ までの誤差を 0 にする, いわゆる5次の公式しか得られない. この公式を式変形し, f_x, f_y を用いることにより6次の公式が導かれる(6次の極限公式とよぶ). この極限公式において, f_x, f_y を用いて求めた値はあまり精度が要らない. そこで, 式変形を行うだけで, そのまま計算する. 極限公式では 0 にする値が ε として残るが, この ε を $O(h^6)$ の誤差項の係数が $O(h^7)$ の誤差項の係数に比べ無視できる程度となるように選ぶ. こうして得られたここに示す公式は, 6個の関数計算だけを用いた6段公式で, $O(h^6)$ の誤差項の係数は $O(h^7)$ のものに比べ無視できる程度に小さく, しかもその $O(h^7)$ の誤差項の係数は, 6段で達することのできる最良のものである極限公式とほぼ等しい. すなわち6個の関数計算だけによる実質的に6次で最も精度のよいものである.

1. まえがき

6段の Runge-Kutta 法では $O(h^5)$ までの誤差項を0にする5次法しか得られないことは古くから知られており, 6段5次法について多くの研究がなされている. これらについての分類, 比較, およびそれらの改良の可能性等について田中により詳しく調べられ, さらに改良を加えた公式が数多く提案されている[7].

Luther, Konen[2] の仮定 $\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j=\alpha_i^2/2$ $(i=3,\cdots,6)$ のもとで, $O(h^5)$ までの誤差項の係数を0とするようにパラメータを定めると, それらは相異なる5個の自由パラメータを用いて表される. $O(h^6)$ の誤差項の係数を, 残った自由パラメータを用いて表し, それらすべてを0とするように自由パラメータを決めようとすると, そのなかのいくつかを等しくしなければならない. そこでまず, 公式を式変形し, パラメータは等しくなる極限で考え, f_x, f_y を用いて $O(h^6)$ の誤差項の係数すべてを0とする6段の極限公式を導く. つぎに, f_x, f_y を用いて計算した値の精度はあまり要らないという事実, および $O(h^6)$ の誤差項は $O(h^7)$ の誤差項に比べて無視できる程度であればよいという事実に着目し, $O(h^6)$ の誤差項を0とするため等しくしなければならないパラメータを '$O(h^6)$ の誤差項の係数 $\ll O(h^7)$ の誤差項の係数' となる ε だけ離し, この ε を用いて, 変形した式のまま計算する. そして, 残る1個の自由なパラメータは $O(h^7)$ の誤差項の係数の最適化に用いる.

このようにして, 6個の関数計算だけによる, 打切り誤差の主要項が $O(h^7)$ で, しかも $O(h^7)$ の誤差に関しても6段で達成できる最良の公式が得られる.

ここで求めた公式は Cassity[4] の分類では $\mu_2=0$, $\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j=\alpha_i^2/2$ で $\alpha_6=1$ の場合のものであり, Shanks が実質的に6次として与えたもの[3] よりはるかに高い精度が得られている.

2. Kutta の条件式と解

2.1 $O(h^5)$ までの条件式

5次の公式であるために満足しなければならない Kutta の条件式は次のとおりである.

$O(h)$ の項: $\sum_{i=1}^{6}\mu_i=1$

$O(h^2)$ の項: $\sum_{i=2}^{6}\mu_i\alpha_i=1/2$

$O(h^3)$ の項: $\sum_{i=2}^{6}\mu_i\alpha_i^2=1/3$

$$\sum_{i=3}^{6}\mu_i\left(\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j\right)=1/6$$

$O(h^4)$ の項: $\sum_{i=2}^{6}\mu_i\alpha_i^3=1/4$

† Runge-Kutta Formula of Substantially Sixth-order, with Six Evaluations by Harumi Ono (Tokyo Metropolitan Nogei Agricultural Upper Secondary School) and Hideo Toda (Faculty of Engineering, Chiba University).

†† 東京都立農芸高等学校
††† 千葉大学工学部

$$\sum_{i=3}^{6}\mu_i\left(\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j^2\right)=1/12$$

$$\sum_{i=3}^{6}\mu_i\alpha_i\left(\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j\right)=1/8$$

$$\sum_{i=4}^{6}\mu_i\left(\sum_{j=3}^{i-1}\beta_{ij}\left(\sum_{k=2}^{j-1}\beta_{jk}\alpha_k\right)\right)=1/24$$

$O(h^5)$ の項：
$$\sum_{i=2}^{6}\mu_i\alpha_i^4=1/5$$

$$\sum_{i=3}^{6}\mu_i\alpha_i^2\left(\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j\right)=1/10$$

$$\sum_{i=3}^{6}\mu_i\alpha_i\left(\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j^2\right)=1/15$$

$$\sum_{i=4}^{6}\mu_i\left(\sum_{j=3}^{i-1}\beta_{ij}\left(\sum_{k=2}^{j-1}\beta_{jk}\alpha_k^2\right)\right)=1/60$$

$$\sum_{i=3}^{6}\mu_i\left(\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j\right)^2=1/20$$

$$\sum_{i=4}^{6}\mu_i\left(\sum_{j=3}^{i-1}\beta_{ij}(\alpha_i+\alpha_j)\times\left(\sum_{k=2}^{i-1}\beta_{jk}\alpha_k\right)\right)=7/120$$

$$\sum_{i=3}^{6}\mu_i\left(\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j^3\right)=1/20$$

$$\sum_{i=5}^{6}\mu_i\left(\sum_{j=4}^{i-1}\beta_{ij}\left(\sum_{k=3}^{j-1}\beta_{jk}\times\left(\sum_{l=2}^{k-1}\beta_{kl}\alpha_l\right)\right)\right)=1/120$$

ここで，Luther, Konen[2] の仮定

$$\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j=\alpha_i^2/2\quad(i=3,\cdots,6)\tag{2.1.1}$$

のもとで解くことにする．すると $O(h^3)$ の2項から

$$\mu_2\alpha_2^2=0\tag{2.1.2}$$

が得られ，これを代入し上の条件式を適当に組み合わせてまとめると，$O(h)$ から $O(h^5)$ までの16個の条件式は，一つの単独の方程式と，4組の連立方程式で表される11個の，次の合計12個の方程式となる．

$$\sum_{i=1}^{6}\mu_i=1\tag{2.1.3}$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_3&\alpha_4&\alpha_5&\alpha_6\\ \alpha_3^2&\alpha_4^2&\alpha_5^2&\alpha_6^2\\ \alpha_3^3&\alpha_4^3&\alpha_5^3&\alpha_6^3\\ \alpha_3^4&\alpha_4^4&\alpha_5^4&\alpha_6^4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_3\\ \mu_4\\ \mu_5\\ \mu_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2\\ 1/3\\ 1/4\\ 1/5\end{bmatrix}\tag{2.1.4}$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_3&\alpha_4&\alpha_5\\ \alpha_3^2&\alpha_4^2&\alpha_5^2\\ \alpha_3^3&\alpha_4^3&\alpha_5^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_4\beta_{43}+\mu_5\beta_{53}+\mu_6\beta_{63}\\ \mu_5\beta_{54}+\mu_6\beta_{64}\\ \mu_6\beta_{65}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/6\\ 1/12\\ 1/20\end{bmatrix}\tag{2.1.5}$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_3&\alpha_4&\alpha_5\\ \alpha_3^2&\alpha_4^2&\alpha_5^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_4\alpha_4\beta_{43}+\mu_5\alpha_5\beta_{53}+\mu_6\alpha_6\beta_{63}\\ \mu_5\alpha_5\beta_{54}+\mu_6\alpha_6\beta_{64}\\ \mu_6\alpha_6\beta_{65}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/8\\ 1/15\end{bmatrix}\tag{2.1.6}$$

$$\begin{bmatrix}\beta_{43}\alpha_3&\beta_{53}\alpha_3+\beta_{54}\alpha_4\\ \beta_{43}\alpha_3^2&\beta_{53}\alpha_3^2+\beta_{54}\alpha_4^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_5\beta_{54}+\mu_6\beta_{64}\\ \mu_6\beta_{65}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/24\\ 1/60\end{bmatrix}\tag{2.1.7}$$

さらに，Kutta の条件式が関数 f に無関係になりたつための条件

$$\sum_{j=1}^{i-1}\beta_{ij}=\alpha_i\quad(i=2,\cdots,6)\tag{2.1.8}$$

を満たさなければならない．

したがって条件式は(2.1.1)～(2.1.8)までの 22 式で，パラメータは μ_i 6個，α_i 5個，β_{ij} 15個の計26個である．

2.2 条件式の解

$\alpha_i\neq0$，$\alpha_i\neq\alpha_j(i\neq j)$ のとき (2.1.4) から

$$\mu_i=-\frac{g_i}{60\alpha_i\prod_{j=3,\neq i}^{6}(\alpha_i-\alpha_j)},\quad i=3,\cdots,6\tag{2.2.1}$$

ただし

$$g_i=30\alpha_l\alpha_m\alpha_n-20(\alpha_l\alpha_m+\alpha_m\alpha_n+\alpha_n\alpha_l)+15(\alpha_l+\alpha_m+\alpha_n)-12$$
$$(l,m,n=3,\cdots,6,\neq i)$$

$\alpha_2\neq0$ と仮定すると (2.1.2), (2.1.3) から

$$\mu_2=0,\ \mu_1=1-\sum_{i=3}^{6}\mu_i\tag{2.2.2}$$

が得られる．つぎに(2.1.5)，(2.1.6)から

$$\begin{cases}\beta_{65}=\\ \dfrac{-\alpha_6(\alpha_6-\alpha_5)(\alpha_6-\alpha_4)(\alpha_6-\alpha_3)(10\alpha_3\alpha_4-5(\alpha_3+\alpha_4)+3)}{\alpha_5(\alpha_5-\alpha_4)(\alpha_5-\alpha_3)g_6}\\ \beta_{64}=\dfrac{-\alpha_6(\alpha_6-\alpha_4)(\alpha_6-\alpha_3)}{2\alpha_4(\alpha_5-\alpha_4)(\alpha_4-\alpha_3)g_6}\times[(-20\alpha_3\alpha_4+10(\alpha_3+\alpha_4)\\ \quad-6)\alpha_6+20\alpha_3\alpha_5^2-10\alpha_5^2+14\alpha_5-25\alpha_3\alpha_5\\ \quad+15\alpha_3\alpha_4-8\alpha_4]\\ \beta_{54}=\dfrac{-\alpha_5(\alpha_5-\alpha_4)(\alpha_5-\alpha_3)(20\alpha_3\alpha_6-15\alpha_3-10\alpha_6+8)}{2\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)g_5}\end{cases}\tag{2.2.3}$$

が得られるが，これらは(2.1.7)を満足しなければならないことから $\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6$ に関する条件

$$\frac{1}{24g_5}(1-\alpha_6)(10\alpha_3{}^2\alpha_4-8\alpha_3\alpha_4-\alpha_3+2\alpha_4)=0 \tag{2.2.4}$$

が得られる.

また，β_{i3} は，(2.1.5)，(2.1.6)から得られる2式

$$\begin{cases} \mu_4\beta_{43}+\mu_5\beta_{53}+\mu_6\beta_{63}=\dfrac{10\alpha_4\alpha_5-5(\alpha_4+\alpha_5)+3}{60\alpha_3(\alpha_5-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_3)} \\ \mu_4\alpha_4\beta_{43}+\mu_5\alpha_5\beta_{53}+\mu_6\alpha_6\beta_{63} \\ \quad =\dfrac{1}{\alpha_3(\alpha_4-\alpha_3)}\left\{\dfrac{15\alpha_4-8}{120}+\mu_6\alpha_6\beta_{65}\alpha_5(\alpha_5-\alpha_4)\right\} \end{cases} \tag{2.2.5}$$

から，一つが任意で，他はそれを用いて表される．β_{i2} は仮定(2.1.1)から，β_{i1} は(2.1.8)から定まり，(2.2.4)から $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_6$ の一つが定まる．

以上から，自由なパラメータは α_2, α_5 と，($\alpha_3, \alpha_4, \alpha_6$) のうちの1個を除く2個と，$\beta_{i3}$ のうち1個の，合計5個となる．

3. f_x, f_y を用いる6次の公式（極限公式）

3.1 α_i だけで表される6次の誤差項の係数

$O(h^6)$ の15個の誤差項の係数のうち，α_i だけで表されるものは7個で次のようになる：

$$\begin{aligned}\delta_{61}&=\left\{\sum_{i=2}^{6}\mu_i\alpha_i{}^5-1/6\right\}/120\\ &=\frac{-1}{7200}[\{30\alpha_3\alpha_4\alpha_5-20(\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_5+\alpha_5\alpha_3)\\ &\quad +15(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)-12\}\alpha_6\\ &\quad -\{20\alpha_3\alpha_4\alpha_5-15(\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_5+\alpha_5\alpha_3)\\ &\quad +12(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)-10\}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{62}&=\left\{\sum_{i=3}^{6}\mu_i\left(\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j{}^4\right)-1/30\right\}/24\\ &=\frac{1}{1440}\{10\alpha_3\alpha_4\alpha_5-5(\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_5+\alpha_5\alpha_3)\\ &\quad +3(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)-2\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{63}&=\left\{\sum_{i=4}^{6}\mu_i\left(\sum_{j=3}^{i-1}\beta_{ij}\left(\sum_{k=2}^{j-1}\beta_{jk}\alpha_k{}^3\right)\right)\right.\\ &\quad \left.-1/120\right\}/6\\ &=\frac{1}{720}\{(-20\alpha_3\alpha_4+10\alpha_4)\alpha_6\\ &\quad +15\alpha_3\alpha_4+2\alpha_3-8\alpha_4-1\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{66}&=\left\{\sum_{i=3}^{6}\mu_i\alpha_i\left(\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j{}^3\right)-1/24\right\}/6\\ &=\frac{1}{720}\{(20\alpha_3\alpha_4-10(\alpha_3+\alpha_4)+6)\alpha_6\\ &\quad -(15\alpha_3\alpha_4-8(\alpha_3+\alpha_4)+5)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{69}&=\left\{\sum_{i=3}^{6}\mu_i\alpha_i{}^3\left(\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j\right)-1/12\right\}/6\\ &=10\delta_{61}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{614}&=\left\{\sum_{i=3}^{6}\mu_i\alpha_i\left(\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j\right)^2-1/24\right\}/2\\ &=15\delta_{61}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{615}&=\sum_{i=4}^{6}\mu_i\alpha_i\left(\sum_{j=3}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j\left(\sum_{k=2}^{j-1}\beta_{jk}\alpha_k\right)\right)-1/48\\ &=\frac{1}{240}\{(20\alpha_3\alpha_4-10(\alpha_3+\alpha_4)+6)\alpha_6\\ &\quad -(15\alpha_3\alpha_4-8(\alpha_3+\alpha_4)+5)\}\\ &=3\delta_{66}\end{aligned}$$

条件(2.2.4)をみたすものとして $\alpha_6=1$ にとれば，これら7項は

$$\begin{aligned}\delta_{61}&=-\delta_{62}/5=\delta_{69}/10=\delta_{614}/15\\ &=-\{10\alpha_3\alpha_4\alpha_5-5(\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_5+\alpha_5\alpha_3)\\ &\quad +3(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)-2\}/7200\\ \delta_{63}&=-\delta_{66}=-\delta_{615}/3\\ &=-\{5\alpha_3\alpha_4-2(\alpha_3+\alpha_4)+1\}/720\end{aligned}$$

となる．そこで $\delta_{63}, \delta_{66}, \delta_{615}$ を0とするように

$$5\alpha_3\alpha_4-2(\alpha_3+\alpha_4)+1=0 \tag{3.1.1}$$

とすると，$\delta_{61}, \delta_{62}, \delta_{69}, \delta_{614}$ の分子の因数は

$$\begin{aligned}&10\alpha_3\alpha_4\alpha_5-5(\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_5+\alpha_5\alpha_3)+3(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)-2\\ &\quad=(5\alpha_3\alpha_4-2(\alpha_3+\alpha_4)+1)(2\alpha_5-1)\\ &\qquad-(1-\alpha_3-\alpha_4)(1-\alpha_5)\end{aligned}$$

と書けるので，これを0にするには $1-\alpha_3-\alpha_4=0$ または $1-\alpha_5=0$ にすればよいことがわかる．

$1-\alpha_3-\alpha_4=0$ とすると β_{54} の分母の因数 g_5 は $\alpha_6=1$ のとき

$$\begin{aligned}g_5&=10\alpha_3\alpha_4-5(\alpha_3+\alpha_4)+3\\ &=2(5\alpha_3\alpha_4-2(\alpha_3+\alpha_4)+1)+1-\alpha_3-\alpha_4\\ &=0\end{aligned}$$

となるので採用できない．

$1-\alpha_5=0$ にすると $\alpha_6=\alpha_5$ となり，μ_5, μ_6 は分母に因数 $\alpha_6-\alpha_5$ を含んでいるが，$\mu_5+\mu_6$ は含まないので，$\mu_5k_5+\mu_6k_6$ の部分をつぎのように変形する：

$$\begin{aligned}\mu_5k_5+\mu_6k_6&=(\mu_5+\mu_6)k_6\\ &\quad+\mu_5(1-\alpha_5)\{(k_5-k_6)/(1-\alpha_5)\}\end{aligned}$$

そして，係数 $\mu_5+\mu_6$，$\mu_5(1-\alpha_5)$ と，$(k_5-k_6)/(1-\alpha_5)$ はすべて $\alpha_5\to1$ の極限で考え，テーラー展開をすると

$$\lim_{\alpha_5\to1}\frac{k_5-k_6}{1-\alpha_5}$$

$$=-h^2f_x+hf_y\left\{\sum_{j=1}^{4}\left(\lim_{\alpha_5\to 1}\frac{\beta_{5j}-\beta_{6j}}{1-\alpha_5}\right)k_j-\left(\lim_{\alpha_5\to 1}\frac{\beta_{65}}{1-\alpha_5}\right)k_5\right\} \qquad (3.1.2)$$

となる.

$\alpha_6=1$ のとき，上の式変形をして，$\alpha_5=1$ とし，α_3, α_4 は $5\alpha_3\alpha_4-2(\alpha_3+\alpha_4)+1=0$ となるように選び，f_x, f_y を用いれば，$O(h^6)$ の誤差項の係数のうち，α_i だけで表される7項は，すべて0にすることができる.

3.2 β_{43} を含む6次の誤差項の係数

15項ある $O(h^6)$ の誤差項のうちの残りの8項のうち $\alpha_3, \alpha_4, \beta_{43}$ だけで表されるものは

$$\delta_{65}=\mu_6\beta_{65}\beta_{54}\beta_{43}\beta_{32}\alpha_2-\frac{1}{720}=\frac{\alpha_3^2(2-5\alpha_3)}{240\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-\frac{1}{720}$$

である．したがってこれを0とするには

$$\beta_{43}=\frac{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}{3\alpha_3^2(2-5\alpha_3)} \qquad (3.2.1)$$

にすればよい．そこで残りの7項を，$\alpha_6=1$ のとき，0にするように選ぶ因数 $1-\alpha_5$, $5\alpha_3\alpha_4-2(\alpha_3+\alpha_4)+1$, $\alpha_3^2(2-5\alpha_3)\beta_{43}/(\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3))-1/3$ の和の形で書くと次のようになる．簡単のために，

$$1-\alpha_5=F_1$$
$$5\alpha_3\alpha_4-2(\alpha_3+\alpha_4)+1=F_2$$
$$\frac{\alpha_3^2(2-5\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-\frac{1}{3}=F_3$$

と書けば，

$$\delta_{64}=\left\{\sum_{i=5}^{6}\mu_i\sum_{j=4}^{i-1}\beta_{ij}\sum_{k=3}^{j-1}\beta_{jk}\sum_{l=2}^{k-1}\beta_{kl}\alpha_l^2-1/360\right\}\Big/2$$
$$=\frac{1}{240}F_3-\frac{1}{240}\left\{\frac{\alpha_3(2-5\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-1\right\}\alpha_2$$

$$\delta_{67}=\left\{\sum_{i=4}^{6}\mu_i\sum_{j=3}^{i-1}\beta_{ij}(\alpha_i+\alpha_j)\left(\sum_{k=2}^{j-1}\beta_{jk}\alpha_k^2\right)-1/40\right\}\Big/2$$
$$=\frac{1}{24}\left\{\frac{\alpha_3^2(1-2\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-\frac{1}{5}\right\}F_1-\frac{1}{80}F_3-\frac{1}{24}\left\{\frac{\alpha_3(1-2\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-\frac{1}{2}\right\}\alpha_2F_1+\frac{1}{80}\left\{\frac{\alpha_3(2-5\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-1\right\}\alpha_2$$

$$\delta_{68}=\sum_{i=5}^{6}\mu_i\sum_{j=4}^{i-1}\beta_{ij}\sum_{k=3}^{j-1}\beta_{jk}(\alpha_i+\alpha_j+\alpha_k)\left(\sum_{l=2}^{k-1}\beta_{kl}\alpha_l\right)-1/60$$
$$=\frac{1}{24}\left\{\frac{\alpha_3^2(1-2\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-\frac{1}{5}\right\}\cdot F_1-\frac{1}{240}F_2-\frac{1}{80}F_3$$

$$\delta_{610}=\left\{\sum_{i=4}^{6}\mu_i\sum_{j=3}^{i-1}\beta_{ij}(\alpha_i^2+\alpha_j^2)\left(\sum_{k=2}^{j-1}\beta_{jk}\alpha_k\right)-2/45\right\}\Big/2$$
$$=-\frac{1}{48}\left\{\frac{\alpha_3^2(1-2\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-\frac{\alpha_3+\alpha_4}{5}\right\}\cdot F_1+\frac{2\alpha_5-1}{240}\cdot F_2+\frac{1}{240}F_3$$

$$\delta_{611}=\left\{\sum_{i=3}^{6}\mu_i\alpha_i^2\left(\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j^2\right)-1/18\right\}\Big/4$$
$$=-\frac{1}{48}\left\{\frac{\alpha_3^2(1-2\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-\frac{1}{5}\right\}\cdot F_1+\frac{1}{240}F_3+\frac{1}{48}\left\{\frac{\alpha_3(1-2\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-\frac{1}{2}\right\}\alpha_2\cdot F_1-\frac{1}{240}\left\{\frac{\alpha_3(2-5\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-1\right\}\alpha_2$$

$$\delta_{612}=\left\{\sum_{i=3}^{6}\mu_i\left(\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j\right)\left(\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j^2\right)-1/36\right\}\Big/2$$
$$=\left\{\sum_{i=3}^{6}\mu_i\alpha_i^2\left(\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j^2\right)-1/18\right\}\Big/4$$
$$=\delta_{611}$$

$$\delta_{613}=\left\{\sum_{i=4}^{6}\mu_i\sum_{j=3}^{i-1}\beta_{ij}\left(\sum_{k=2}^{j-1}\beta_{jk}\alpha_k\right)\times\left(\sum_{k=2}^{j-1}\beta_{jk}\alpha_k+2\sum_{l=2}^{i-1}\beta_{il}\alpha_l\right)-1/360\right\}\Big/2$$
$$=-\frac{1}{48}\left\{\frac{\alpha_3^2(1-2\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-\frac{1+\alpha_3+\alpha_4}{10}\right\}\cdot F_1+\frac{2\alpha_5-1}{480}F_2+\frac{1}{240}F_3$$

となる.

そこで，F_1, F_2, F_3 を0にしたとき δ_8, δ_{10}, δ_{13} は0となり，残るのは

$$\delta_{64}=-\frac{1}{3}\delta_{67}=\delta_{611}=\delta_{612}=-\frac{1}{240}\left\{\frac{\alpha_3(2-5\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-1\right\}\alpha_2$$

である.

$$\alpha_3(2-5\alpha_3)\beta_{43}/(\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3))-1=0$$

にすると，(3.2.1) から $\alpha_3=1/3$, (3.1.1) から $\alpha_4=1$ となるので採用できない．$\alpha_2=0$ にすると，β_{i1}, β_{i2}

の分母は因数 α_2 を含むが，$\beta_{i1}+\beta_{i2}$ は含まないので，$\beta_{i1}k_1+\beta_{i2}k_2$ の部分を(3.1.2)と同様に式変形と，f_x, f_y を用いることにすればよい．すなわち

$$\beta_{i1}k_1+\beta_{i2}k_2=(\beta_{i1}+\beta_{i2})k_1+\beta_{i2}\alpha_2\{(k_2-k_1)/\alpha_2\}$$

と変形し，$\alpha_2\to 0$ の極限を用いて

$$\lim_{\alpha_2\to 0}\frac{k_2-k_1}{\alpha_2}=h^2\{f_x+f\cdot f_y\}$$

とする．

これが，$\alpha_6=1$ のとき，式変形と f_x, f_y を用いる6次の極限公式で次に示す．

3.3 極限公式

α_3 を任意のパラメータ，$\alpha_2=0$, $\alpha_4=(2\alpha_3-1)/(5\alpha_3-2)$, $\alpha_5=1$, $\alpha_6=1$, $\beta_{43}=\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)/(3\alpha_3^2(2-5\alpha_3))$ とする．

$$k_1=hf(x_n, y_n)$$
$$K_2'=h^2\{f_x(x_n, y_n)+f(x_n, y_n)\cdot f_y(x_n, y_n)\}$$
$$k_3=hf(x_n+\alpha_3 h, y_n+B_{312}k_1+B_3K_2')$$
$$k_4=hf(x_n+\alpha_4 h, y_n+B_{412}k_1+B_4K_2'+\beta_{43}k_3)$$
$$k_5=hf(x_n+h, y_n+B_{512}k_1+B_5K_2'+\beta_{53}k_3+\beta_{54}k_4)$$
$$K_5'=h[-hf_x(x_{n+1}, y_{n'})+f_y(x_{n+1}, y_{n'})\{B_{5612}k_1+B_{56}K_2'+B_{563}k_3+B_{564}k_4+B_{565}k_5\}]$$
$$y_{n+1}=y_n+\mu_1k_1+\mu_3k_3+\mu_4k_4+M_{56}k_5+M_5K_5'$$

ここで

$$B_{i12}=\lim_{\alpha_2\to 0}(\beta_{i1}+\beta_{i2}),$$
$$B_i=\lim_{\alpha_2\to 0}\beta_{i2}\alpha_2$$
$$(i=3, 4, 5);$$
$$B_{5612}=\lim_{\alpha_2\to 0}\lim_{\alpha_5\to 1}\left(\frac{\beta_{51}-\beta_{61}}{1-\alpha_5}+\frac{\beta_{52}-\beta_{62}}{1-\alpha_5}\right),$$
$$B_{56}=\lim_{\alpha_2\to 0}\left(\lim_{\alpha_5\to 1}\frac{\beta_{52}-\beta_{62}}{1-\alpha_5}\right)\alpha_2;$$
$$\beta_{56j}=\lim_{\alpha_5\to 1}\frac{\beta_{5j}-\beta_{6j}}{1-\alpha_5}\qquad (j=3, 4);$$
$$B_{565}=\lim_{\alpha_5\to 1}\frac{-\beta_{65}}{1-\alpha_5};$$
$$y_{n'}=y_n+B_{512}k_1+B_5K_2'+\beta_{53}k_3+\beta_{54}k_4;$$
$$M_{56}=\lim_{\alpha_5\to 1}(\mu_5+\mu_6),\quad M_5=\lim_{\alpha_5\to 1}\mu_5(1-\alpha_5)$$

である．

4. 6個の関数計算だけによる実質的に6次の公式

極限公式で f_x, f_y を用いて求めた値の精度はあまり要らない．そこで，α_2, $1-\alpha_5=\varepsilon\fallingdotseq 0$ とし，$(k_2-k_1)/\alpha_2$, $(k_5-k_6)/(1-\alpha_5)$ のまま計算する．このとき，k_2-k_1, k_5-k_6 は桁落ちして精度が減るが，全体の精度に影響しない程度ならばよい．また，α_2, $1-\alpha_5$ が0でないために $O(h^6)$ の誤差項の係数は0でなくなるが，$O(h^7)$ の誤差項の係数に比べて無視できる程度ならばよい．

4.1 パラメータの決定と打切り誤差

まず，極限公式で自由なパラメータとして残ってい

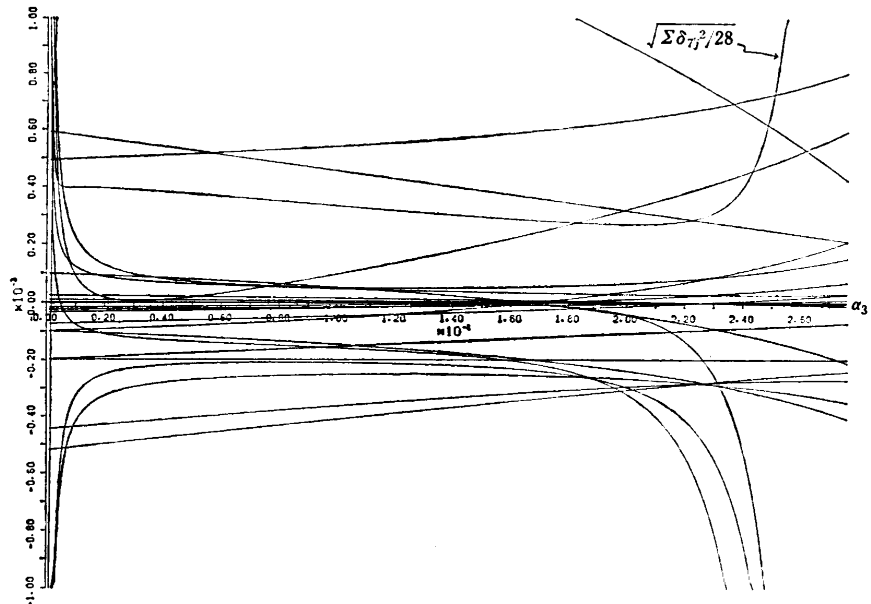

図 1 $\delta_{7j}(\alpha_3)$, $j=1, 2, \cdots, 28$ の曲線
Fig. 1 Graph of $\delta_{7j}(\alpha_3)$, $j=1, 2, \cdots, 28$.

る α_3 を次のように決める．α_3 を，とりうる値の範囲内で動かして $O(h^7)$ がなるべく小さくなるように決める．**図 1** からわかるように，$|\delta_{7j}|\leqq 10^{-3}(j=1, \cdots, 28)$ となるのは，$0.185<\alpha_3<0.232$ で，$\sqrt{\delta_{7j}^2/28}$ が最小になるのは 0.2 付近である．そこで $\alpha_3=1/5$ に決める．(3.1.1) から $\alpha_4=3/5$ となる．

つぎに $\alpha_2=1-\alpha_5=\varepsilon$ の値として，すべての係数の分子，分母が 16 進 14 桁以内の整数となるように

$$\alpha_2=1-\alpha_5=\varepsilon=1/2048$$

に選ぶ．このとき α_i だけで表される $O(h^6)$ の誤差項の係数は

$$\delta_{63}=\delta_{66}=\delta_{615}=0$$

$$\delta_{614}=\frac{3}{2}\delta_{69}=-3\delta_{62}=15\delta_{61}\fallingdotseq .203_{10}-6$$

となる．$\sqrt{\delta_{7j}^2/28}\fallingdotseq .27_{10}-3$ なので，この程度で十分であろう．

最後に β_{43} は $\delta_{65}=0$ とするように決めれば 2 となる．このとき β_{43} を含む誤差項の係数を調べると，$\delta_{65}=\delta_{68}=0$ となるが，絶対値最大のものは $\delta_{67}\fallingdotseq .4_{10}-5$ である．そこで β_{43} を動かして $\delta_{6j}(j=4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13)$ の変化を調べると**図 2** のようになる．全体がほぼ揃って小さくなる付近で，係数の分子，分母がすべて 16 進 14 桁以内の整数になるような数として

$$\beta_{43}=2049/1024$$

に決める．このとき誤差は

$$|\delta_{67}|\fallingdotseq|\delta_{68}|\fallingdotseq .204_{10}-5$$

$$|\delta_{64}|\fallingdotseq|\delta_{65}|\fallingdotseq|\delta_{611}|=|\delta_{612}|=.678_{10}-6$$

$$|\delta_{613}|\fallingdotseq .474_{10}-6,\ |\delta_{610}|\fallingdotseq .270_{10}-6$$

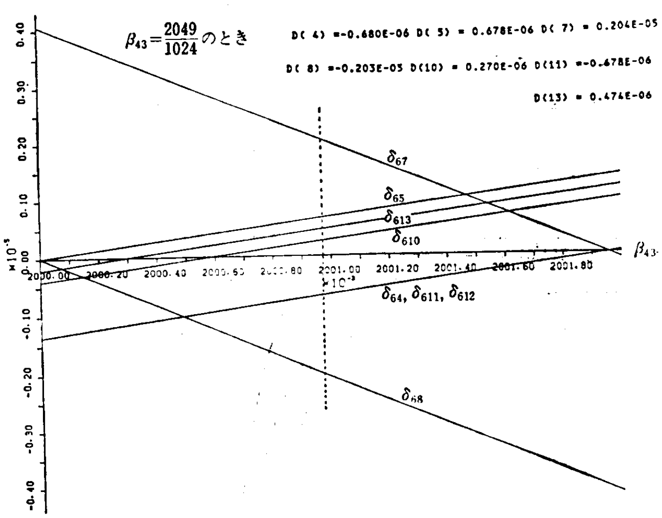

図 2 $\delta_{6j}(\beta_{43})$ のグラフ
Fig. 2 Graph of $\delta_{6j}(\beta_{43})$, $j=4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13$.

である．

4.2 有効桁数の見積り

k_3 の関数計算を行う点の y 座標の計算

$$y_n+(\beta_{31}+\beta_{32})k_1+\beta_{32}\alpha_2\{(k_2-k_1)/\alpha_2\}$$

での有効桁数を考える．

桁落ちによる精度の減少は k_2-k_1 の計算だけで起こる．加え合わせる 3 項のうち y_n が絶対値最大ならば，和の有効桁数は，y_n と $\beta_{32}\alpha_2\{(k_2-k_1)/\alpha_2\}$ の大きさの違いの桁数と，k_2-k_1 の有効桁数の和になる．したがってこの有効桁数を N_3 とすれば，m 進法 n 桁演算で，

$$\begin{aligned}N_3&=\log_m|y_n|-\log_m|\beta_{32}\alpha_2\{(k_2-k_1)/\alpha_2\}|\\&\quad+\{n-(\log_m|k_1|-\log_m|k_2-k_1|)\}\\&=n-\log_m\beta_{32}\alpha_2+\log_m\alpha_2+\log_m|y_n/k_1|\end{aligned}$$

y_n, k_1 の大きさはわからないが，y_n, f がともに同程度のオーダならば，

$$|y_n/k_1|=|y_n/hf|\approx 1/h$$

と考えられるから

$$\begin{aligned}N_3&\approx n-\log_m\beta_{32}\alpha_2+\log_m\alpha_2-\log_m h\\&=n-\log_m\frac{1}{50}+\log_m\frac{1}{2048}-\log_m h\\&=n-\log_m\frac{1024}{25}h\end{aligned}$$

となり，$h<25/1024\fallingdotseq 0.024$ ならば精度は減らない．$h=0.1$ のときでも

$$n-\log_m 512/125\fallingdotseq n-0.61\quad (m=10\ のとき)$$

である．y_n が絶対値最大でなければ，y_n との大きさの違いの代りに $(\beta_{31}+\beta_{32})k_1$ との大きさの違いの桁数を考えればよいから，

$$\begin{aligned}N_3&=\log_m(\beta_{31}+\beta_{32})|k_1|\\&\quad-\log_m\beta_{32}\alpha_2|(k_2-k_1)/\alpha_2|\\&\quad+\{n-(\log_m|k_1|-\log_m|k_2-k_1|)\}\\&=n-\log_m 1024/5\\&\fallingdotseq n-2.31\quad (m=10\ のとき)\end{aligned}$$

となり，$|y_n||<(\beta_{31}+\beta_{32})|k_1|\fallingdotseq h|f|/5$ である場合には，精度は 2.3 桁失われる．

同様に k_4 の場合は，y_n, f がともに同程度のオーダならば，

$$\begin{aligned}N_4&=n-\log_m|\beta_{42}\alpha_2|+\log_m\alpha_2\\&\quad+\log_m|y_n/k_1|\\&\fallingdotseq n-\log_m\frac{11264}{25}h\end{aligned}$$

となり $h=0.1$ のとき

$$N_4 \fallingdotseq n-\log_m \frac{5632}{50} \fallingdotseq n-1.65 \quad (m=10 \text{ のとき})$$

である．また y_n が絶対値最大でなければ $\beta_{43}k_3$ が絶対値最大である．したがって $|y_n|<\beta_{43}|k_3| \fallingdotseq 2h|f|$ のときには

$$N_4 \fallingdotseq n-\log_m 5632/25 \fallingdotseq n-2.35 \quad (m=10 \text{ のとき})$$

まったく同様な考え方で，k_5, k_6 では，y_n が絶対値最大で同程度のオーダならば，

$$N_5, N_6 \fallingdotseq n-\log_m 19456h/3$$

となり，y_n が絶対値最大でなければ，$\beta_{53}k_3$ が絶対値最大なので，$|y_n|<|\beta_{53}k_3| \fallingdotseq 70h|f|/3$ のときには

$$N_5, N_6 \fallingdotseq n-\log_m 9728/35 \fallingdotseq n-2.44 \quad (m=10 \text{ のとき})$$

最後の y_{n+1} の計算では，y_n が絶対値最大で f と同程度の大きさのとき，

$$\begin{aligned} N &= \log_m|y_n| - \log_m \mu_5(1-\alpha_5)|(k_5-k_6)/(1-\alpha_5)| \\ &\quad + \{N_5-(\log_m|k_5|-\log_m|k_5-k_6|)\} \\ &= N_5-\log_m \mu_5(1-\alpha_5)+\log_m(1-\alpha_5)-\log_m h \\ &\fallingdotseq N_5-\log_m 64h/3 \end{aligned}$$

$N_5 \fallingdotseq n-2.44$ とすると

$$\begin{aligned} N &\fallingdotseq n-2.44-\log_m 64h/3 \\ &\fallingdotseq n-2.76 \quad (h=0.1 \text{のとき}) \end{aligned}$$

また y_n が絶対値最大でなければ，μ_4k_4 が絶対値最大なので

$$\begin{aligned} N &\fallingdotseq N_5-\log_m 6144/125 \\ &\fallingdotseq n-4.13 \quad (m=10 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

となる．

したがって y_n が hf よりも小さいというような最悪な場合にほぼ4桁精度が失われるが，普通には大体3桁以内である．

4.3 安定性

微分方程式

$$y'=-ay(a>0), \quad y(x_0)=y_0$$

の解の $x=x_0+mh$ での値は

$$y_m=y_0e^{-amh}=y_0(e^{-ah})^m$$

である．e^{-ah} の数値解を $P(ah)$ とおくと，$|P(ah)|>1$ のときには $m\to\infty$ で $|y_m|\to\infty$ となる．よく知られているように，$|P(ah)|\leqq 1$ である ah の範囲を絶対安定領域という．この絶対安定領域を調べる．

$$y_{n+1}=y_n+\mu_1k_1+\mu_2k_2+\mu_3k_3+\mu_4k_4+\mu_5k_5+\mu_6k_6$$

に $f(x,y)=-ay$ と Kutta の5次までの条件式を代入すると，

$$\begin{aligned} y_{n+1}=y_n\Big[&1-ah+\frac{1}{2!}(-ah)^2 + \frac{1}{3!}(-ah^3)+\frac{1}{4!}(-ah)^4 \\ &+\frac{1}{5!}(-ah)^5+\mu_6\beta_{65}\beta_{54}\beta_{43}\beta_{32}\alpha_2(-ah)^6\Big] \end{aligned}$$

となる．最後の項は

$$\mu_6\beta_{65}\beta_{54}\beta_{43}\beta_{32}\alpha_2(-ah)^6=\frac{683}{491520}(-ah)^6$$

なので，絶対安定領域は

$$-3.55<-ah<0$$

である．これは Shanks の公式とほとんど同じである．

4.4 6個の関数計算による実質的に6次の公式

$$\begin{aligned} k_1&=hf(x_n, y_n) \\ k_2&=hf(x_n+\alpha_2h, y_n+\beta_{21}h) \\ k_3&=hf(x_n+\alpha_3h, y_n+(\beta_{31}+\beta_{32})k_1 \\ &\quad +\beta_{32}\alpha_2(k_2-k_1)/\alpha_2) \\ k_4&=hf(x_n+\alpha_4h, y_n+(\beta_{41}+\beta_{42})k_1 \\ &\quad +\beta_{42}\alpha_2(k_2-k_1)/\alpha_2+\beta_{43}k_3) \\ k_5&=hf(x_n+\alpha_5h, y_n+(\beta_{51}+\beta_{52})k_1 \\ &\quad +\beta_{52}\alpha_2(k_2-k_1)/\alpha_2+\beta_{53}k_3+\beta_{54}k_4) \\ k_6&=hf(x_n+h, y_n+(\beta_{61}+\beta_{62})k_1 \\ &\quad +\beta_{62}\alpha_2(k_2-k_1)/\alpha_2+\beta_{63}k_3+\beta_{64}k_4+\beta_{65}k_5) \\ y_{n+1}&=y_n+\mu_1k_1+\mu_3k_3+\mu_4k_4+(\mu_5+\mu_6)k_6 \\ &\quad +\mu_5(1-\alpha_5)(k_5-k_6)/(1-\alpha_5) \end{aligned}$$

ここでパラメータは

$$\alpha_2=\frac{1}{2048}, \quad \alpha_3=\frac{1}{5}, \quad \alpha_4=\frac{3}{5}, \quad \alpha_5=\frac{2047}{2048}$$

$$\beta_{21}=\frac{1}{2048}, \quad \beta_{31}+\beta_{32}=\frac{1}{5}, \quad \beta_{32}\alpha_2=\frac{1}{50}$$

$$\beta_{41}+\beta_{42}=-\frac{7173}{5120}, \quad \beta_{42}\alpha_2=-\frac{5637}{25600}, \quad \beta_{43}=\frac{2049}{1024}$$

$$\beta_{51}+\beta_{52}=\frac{36875\ 44391\ 63779}{1759\ 21860\ 44416}$$

$$\beta_{52}\alpha_2=\frac{5561\ 97902\ 16167}{1759\ 21860\ 44416}$$

$$\beta_{53}=-\frac{40967\ 55520\ 02435}{1759\ 21860\ 44416}$$

$$\beta_{54}=\frac{11\ 42670\ 09665}{3\ 43597\ 38368}$$

$$\beta_{61}+\beta_{62}=\frac{13\ 51089\ 25003}{63984\ 30720}$$

$$\beta_{62}\alpha_2=\frac{33\ 18523}{10\ 41920}$$

$$\beta_{63}=-\frac{4\ 00269\ 25081}{17060\ 39808}$$

$$\beta_{64}=\frac{167\ 15836}{49\ 95111}$$

$$\beta_{65}=-\frac{6\ 87194\ 76736}{13952\ 00188\ 00965}$$

$$\mu_1=\frac{4093}{73692},\quad \mu_3=\frac{2\ 55875}{7\ 85952}$$

$$\mu_4=\frac{2\ 55625}{5\ 89104}$$

$$\mu_5+\mu_6=\frac{121\ 74695\ 54363}{658\ 17797\ 56704}$$

$$\mu_5(1-\alpha_5)=\frac{21474\ 83648}{20\ 56806\ 17397}$$

5. 公式の評価と数値例

$O(h^7)$ の誤差項の係数は次のとおりである：

$\delta_{71}=-.256_{10}-6,\quad \delta_{72}=.155_{10}-5$
$\delta_{73}=-.397_{10}-5,\quad \delta_{74}=-.106_{10}-3$
$\delta_{75}=-.198_{10}-3,\quad \delta_{76}=-.198_{10}-3$
$\delta_{77}=.390_{10}-5,\quad \delta_{78}=.317_{10}-3$
$\delta_{79}=.631_{10}-3,\quad \delta_{710}=.319_{10}-3$
$\delta_{711}=-.384_{10}-5,\quad \delta_{712}=.294_{10}-4$
$\delta_{713}=-.264_{10}-3,\quad \delta_{714}=.126_{10}-4$
$\delta_{715}=-.236_{10}-3,\quad \delta_{716}=-.106_{10}-3$
$\delta_{717}=-.293_{10}-3,\quad \delta_{718}=-.106_{10}-3$
$\delta_{719}=.379_{10}-4,\quad \delta_{720}=-.315_{10}-3$
$\delta_{721}=-.377_{10}-4,\quad \delta_{722}=.909_{10}-3$
$\delta_{723}=-.115_{10}-4,\quad \delta_{724}=.648_{10}-4$
$\delta_{725}=-.305_{10}-3,\quad \delta_{726}=-.292_{10}-3$
$\delta_{727}=-.384_{10}-5,\quad \delta_{728}=-.389_{10}-4$

$O(h^6)$ の誤差項の係数は 4.2 に示したが，これらを $\sqrt{\Sigma\delta_j^2/\Sigma j}$，$\Sigma|\delta_j|$，Lotkin 和の三つの尺度で眺めると**表 1** のようになり，$O(h^6)$ の誤差に関してはどの尺度でも $O(h^7)$ のものより 10^{-3} 程度小さく，Shanks が実質 6 次として与えた公式より $O(h^6)$ の誤差項の係数は 10^{-2} 程度小さい．

桁落ちによる誤差に関しては，最悪の場合 4 桁失われることになるが，実際の問題ではこのようなことはまれであり，しかも $O(h^7)$ の誤差のほうが大きく，

表 1 局所打ち切り誤差の比較
Table 1 Comparison of local truncation errors.

公式 ＼ 尺度	$\sqrt{\sum_j \delta_{6j}^2/15}$	$\sum_j \lvert\delta_{6j}\rvert$	Lotkin 和	$\sqrt{\sum_j \delta_{7j}^2/28}$	$\sum_j \lvert\delta_{7j}\rvert$
実質 6 次	$.836_{10}-6$	$.795_{10}-5$	$.441_{10}-4$	$.270_{10}-3$	$.484_{10}-2$
Shanks[3]	$.196_{10}-4$	$.187_{10}-3$	$.104_{10}-2$	$.253_{10}-3$	$.466_{10}-2$

表 2 数 値 解
Table 2 Results of numerical solution.

例 1) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x^2\cdot y^2}{3}$, $y(2)=1$, $h=0.1$, $y(x)=\dfrac{9}{1+x^3}$

	x_n	y_n	$y_n-y(x_n)$
実質 6 次	2.10	0.8771074973636819	0.2967D-08
		▲	
極　限		0.8771074972738272	0.2878D-08
Shanks		0.8771075016091511	0.7213D-08
$y(x_n)$		0.8771074943962579	
	2.20	0.7726648373145431	0.2150D-08
		▲	
		0.7726648372514301	0.2087D-08
		0.7726648403653626	0.5201D-08
		0.7726648351648352	

例 2) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{e^x(y^3+xy^3+1)}{3y^2(xe^x-6)}$, $y(0)-1$, $h=0.1$,

$y(x)=\left(\dfrac{e^x+5}{6-xe^x}\right)^{\frac{1}{3}}$

	x_n	y_n	$y_n-y(x_n)$
実質 6 次	0.10	1.012061460169105	−0.2546D-11
		▲	
極　限		1.012061460169008	−0.2643D-11
Shanks		1.012061460187909	0.1626D-10
$y(x_n)$		1.012061460171651	
	0.20	1.026272992591286	−0.4549D-11
		▲	
		1.026272992591137	−0.4698D-11
		1.026272992621081	0.2525D-10
		1.026272992595835	

ごく特殊な問題を除いては桁落ちに関して心配はない．

例題について比較することは，つとに Kutta[1] も述べているように，例題を選んだ時点である特定の公式に有利になるが，特殊な問題を除けば大体同じような傾向である．特殊な問題とは，$O(h^7)$ の誤差項が，Shanks の公式でちょうど 0 になっている 2 項だけのものとか，刻み幅 h が，真の解の Taylor 級数の収束半径より大きくなっているというようなものである．

田中正次の例題[6]から 2 例を選び，6 次の極限公式（6 次の誤差は完全に 0）と Shanks[3] との比較を**表 2** に示す．数値解の下線の部分は厳密解 $y(x_n)$ とのちがいを，実質 6 次の▲印は極限公式とのちがいを示す．

6. む す び

6 個の関数計算による Kutta 型公式で，$\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j=\alpha_i^2/2$ $(i=3,\cdots,6)$, $\alpha_6=1$ のとき，f_x, f_y を用いれば $O(h^6)$ のすべての誤差項を 0 とする公式（極限公式）が導かれる．

しかし，公式の変形だけで，f_x, f_y を使わなくてもこの極限公式と実質的に同等な公式が得られる．数値例でもわかるように，6 次の誤差は完全に 7 次の誤

差の範囲内にあり，桁落ちに関してもまったく心配がない．また Shanks が実質 6 次として与えたものよりはるかに高精度である．

謝辞 東京大学教授伊理正夫博士ならびに山梨大学教授田中正次博士から貴重なご助言をいただいた．ここに深甚なる感謝の意を表する．

参 考 文 献

1) Kutta, W.: Beitrag zur Näherungsweisen Integration Totaler Differentialgleichungen, *Z. Math. Phys.*, Vol. 46, pp. 435-453 (1901).
2) Luther, H. A. and Konen, H. P.: Some Fifth-order Classical Runge-Kutta Formulas, *SIAM Rev.*, Vol. 7, No. 4, Oct., pp. 551-558 (1965).
3) Shanks, E. B.: Solutions of Differential Equations by Evaluations of Functions, *Math. Comp.*, Vol. 20, pp. 21-38 (1966).
4) Cassity, C. R.: Solutions of the Fifth-order Runge-Kutta Equations, *SIAM J. Num. Anal.*, Vol. 3, No. 4, pp. 598-606 (1966).
5) Cassity, C. R.: The Complete Solution of the Fifth Order Runge-Kutta Equations, *SIAM. J. Num. Anal.*, Vol. 6, No. 3, pp. 432-436 (1969).
6) 戸田英雄: Runge-Kutta 系のある極限公式の打切り誤差について，情報処理学会論文誌，Vol. 21, No. 4, pp. 285-296 (1980).
7) 田中正次: 5 次陽的 Runge-Kutta 法の特性の比較と最適化，京都大学数理解析研究所講究録，422, pp. 37-58 (1981).
8) 戸田英雄，小野令美: 5個の関数計算による実質的に5次の Runge-Kutta 法，情報処理学会論文誌，Vol. 22, No. 2, pp. 89-98 (1981).

(昭和57年2月 1 日受付)
(昭和57年4月19日採録)