3Q-02

5連結内部極大平面グラフの5分割を求める線形時間アルゴリズム

長井さやか　金子雄一　中野眞一
群馬大学

1 はじめに

グラフ $G=(V,E)$ において, G の外面上の k 個の頂点 $u_1,u_2,\ldots,u_k \in V$ と, $\sum_{i=1}^{k} n_i = |V|$ となる k 個の自然数 $n_1,n_2,\ldots,n_k$ が与えられたとする. この時, 各 $i=1,2,\ldots,k$ について, $u_i \in V_i$, $|V_i|=n_i$, かつ V_i が G の連結部分グラフを誘導する V の分割 $(V_1,V_2,\ldots,V_k)$ を求めたい. この様な分割を G の k **分割**と呼ぶ.(図1参照.)

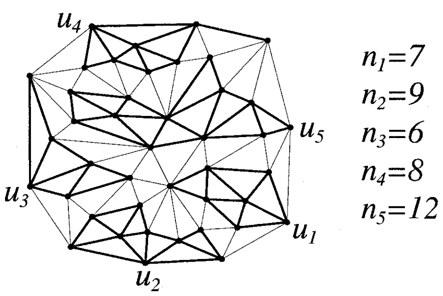

図 1: 5連結平面グラフの5分割

k 分割を求める問題は一般的にはNP困難である [DF85]. また, 全てのグラフが k 分割を持つとは限らない. しかし, 全ての k 連結グラフは k 分割を持つ [G78, L77].

一般的なグラフのk分割を多項式時間で求めるアルゴリズムは知られていない. しかし, 次のクラスのグラフについては多項式時間アルゴリズムが知られている. $n=|V|$ とする. 2連結グラフの2分割は $O(n)$ で求められる [STN90, STNMU90], 3連結グラフの3分割は $O(n^2)$ で求められる [STNMU90], 3連結平面グラフの3分割は $O(n)$ で求められる [JSN94], 4連結平面グラフの4分割は $O(n)$ で求められる [NRN97].

本文では, 5連結内部極大平面グラフ G と外周上の5点 u_1,u_2,u_3,u_4,u_5 が与えられた時, 5分割を求める線形時間アルゴリズムを提案する.

2 5分割

5分割のアルゴリズムの概要を示す. (詳細は [NKN00] を参照.) 初めに G を2分割したグラフ G_L, G_H を求める. ただし, G_L は $n_1+n_2+n_3$ 個の頂点を持ち u_1,u_2,u_3 を含む3連結グラフであり, G_H は n_4+n_5 個の頂点を持ち u_4,u_5 を含む2連結グラフである. 次に G_L の3分割と, G_H の2分割を求める. すると, G の5分割が求まる. 2連結グラフを2分割する線形時間のアルゴリズム [STN90, STNMU90] と3連結平面グラフを3分割する線形時間のアルゴリズム [JSN94] は既に知られている. G を G_L と G_H に分割するために, 本文では新たに5-canonical decomposition を提案する. これは, st-numbering [E79] や canonical ordering [K96] をより一般的にしたものである.

3 5-Canonical Decomposition

5連結内部極大平面グラフ $G=(V,E)$ の外周上に5点 u_1,u_2,u_3,u_4,u_5 がこの順番に与えられているとする. G に頂点 r と3つの辺 (u_1,u_3), (u_4,r), (u_5,r) を追加し, そのグラフを G' とする.(図2参照.)

V の分割 $\Pi=(W_1,W_2,\ldots,W_m)$ を $\Pi_L = W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_i$ と $\Pi_H = W_{i+1} \cup W_{i+2} \cup \cdots \cup W_m$ の2つに分割した時, 任意の $i(1 \le i \le m-1)$ に対して, Π_L と Π_H から誘導される G' の部分グラフがそれぞれ3連結, 2連結グラフである

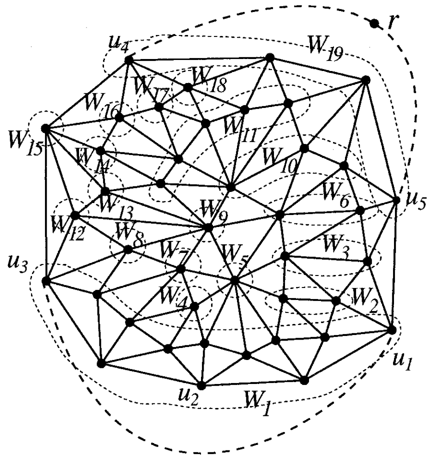

図 2: 5-canonical decomposition

ような Π を G の 5-canonical decomposition と呼ぶ.

G を 3 連結グラフ G_L と 2 連結グラフ G_H に分割する方法の概要を述べる. i を $\sum_j^i |W_j| \geq n_1+n_2+n_3$ を満たす最小の整数とする. W_i を W_i' と W_i'' に適切に分割することにより, $\sum_{j=1}^{i-1} |W_j|+|W_i'| = n_1+n_2+n_3$, $|W_i''|+\sum_{j=i+1}^{m} |W_j| = n_4+n_5$ となる $\Pi_L = W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_i'$ と $\Pi_H = W_i'' \cup W_{i+1} \cup \cdots \cup W_m$ の 2 つに分割する. Π_L, Π_H から誘導されるグラフを G_L, G_H とする. 5-canonical decomposition の条件及び W' と W'' の分割の方法により G は 2 連結グラフ G_L と 3 連結グラフ G_H に分割される. 詳細は [NKN00] 参照.

4 まとめ

本文では, 5 連結内部極大平面グラフ G の外周上に 5 つの頂点が与えられた時に, G の 5 分割を求める線形時間アルゴリズムを提案した. 本文の結果, 6 連結平面グラフは存在しないこと, 及び, $k \leq 4$ 連結平面グラフの外周上に k 個の頂点が与えられた時 G の k 分割を線形時間で求めるアルゴリズムが既に知られていることにより, k 連結内部極大平面グラフの k 分割問題は線形時間で解ける.

(極大ではない) 一般的な平面グラフにおいて k 分割を求める効率の良いアルゴリズムを見つけることが今後の課題である.

参考文献

[DF85] M.E. Dyer and A.M. Frieze, *On the complexity of partitioning graphs into connected subgraphs*, Discrete Applied Mathematics, 10 (1985) 139-153.

[E79] S. Even, *Graph Algorithms*, Computer Science Press, Potomac (1979).

[G78] E. Györi, *On division of connected subgraphs*, Proc. 5th Hungarian Combinational Coll., (1978) 485-494.

[JSN94] L. Jou, H. Suzuki and T. Nishizeki, *A linear algorithm for finding a nonseparating ear decomposition of triconnected planar graphs*, Tech. Rep. of Information Processing Society of Japan, AL40-3 (1994).

[K96] C. Kant, *Drawing planar graphs using the canonical ordering*, Algorithmica, 16 (1996) 4-32.

[L77] L. Lovász, *A homology theory for spanning trees of a graph*, Acta Math. Acad. Sci. Hunger, 30 (1977) 241-251.

[NKN00] S. Nagai, Y. Kaneko and S. Nakano, *A linear-time algorithm for five-partitioning five-connected internally triangulated plane graphs*, Technical Report, GU-CS-00-2, 2000. (http://www.msc.cs.gunma-u.ac.jp/nakano_lab/TR/GU-CS-00-2.ps)

[NRN97] S. Nakano, M. S. Rahman and T. Nishizeki, *A linear-time algorithm for four-partitioning four-connected planar graphs*, Information Processing Letters, 62 (1997) 315-322.

[STN90] H. Suzuki, N. Takahashi and T. Nishizeki, *A linear algorithm for bipartition of biconnected graphs*, Information Processing Letters 33, 5 (1990) 227-232.

[STNMU90] H. Suzuki, N. Takahashi, T. Nishizeki, H. Miyano and S. Ueno, *An algorithm for tripartitioning 3-connected graphs*, Journal of Information Processing Society of Japan 31, 5 (1990) 584-592.