3Q-01

2連結3次平面グラフの最適な直交描画を求める線形アルゴリズム

吉川 万紀子　中野 眞一
群馬大学

1　はじめに

平面グラフ G の直交描画とは，G の各辺を垂直線分と水平線分との列で描いたものである．直交描画は，回路図，データフロー図，組織図等に用いられている [1].

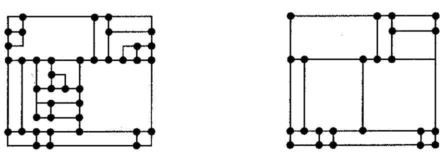
平面埋め込みが固定の平面グラフの最小個数のベンドを用いた直交描画は $O(n^2 \log n)$ または $O(n^{7/4}\sqrt{\log n})$ 時間で見つけられる [2][3]. ベンドとは，辺が直角に折れ曲がるところである．また，特に3連結3次平面グラフに関しては，最小個数のベンドを用いた直交描画が $O(n)$ 時間で求まることが知られている [4].

本研究では，3連結3次平面グラフをより一般的にした2連結3次平面グラフに関して最小個数のベンドを用いた直交描画を線形時間で求めるアルゴリズムを設計する．

2　直交描画

平面グラフの**直交描画**とは，図 1(a) のような描画である．

- 各頂点は，格子点に点として描かれる．
- 各辺は水平線分と垂直線分の列で描かれる．
  ここで，辺が曲がるところをベンドという．
- どんな2辺も共通の端点以外では交差しない．



(a) 直交描画　(b) 矩形描画

図 1: 描画の例

与えられた平面グラフの最小個数のベンドを用いた直交描画を求めたい．

3　矩形描画について

本論文のアルゴリズムは，直交描画問題を矩形描画問題に帰着させる．そこで，まず矩形描画について説明する．

平面グラフの**矩形描画**とは，図 1(b) のような描画である．

- 各辺は水平線分または，垂直線分のいずれかで描かれる．（ベンドがない）
- 各面は長方形として描かれる．

グラフ G は，外周上の4つの2次の頂点を除いて，すべての頂点が3次であるような，連結な平面グラフとする．G が次の3つのタイプのサイクルのいずれも持たないならば，G は矩形描画が可能であることが知られている [5].

(r1) 1-legged サイクル

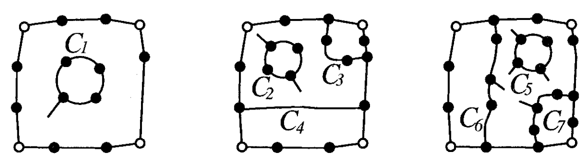
(r2) 高々1つの2次の頂点を含む 2-legged サイクル

(r3) 2次の頂点を含まない 3-legged サイクル

ここで，k 本の足を持つサイクル C を k-legged サイクルと呼ぶ．足とは，サイクルのちょうど一つの頂点に接続し，そのサイクルの外側に位置した辺のことである．また，足が接続しているサイクル C 上の頂点のことを leg 頂点と呼ぶ．

(r1)–(r3) の条件に当てはまるサイクルを *bad cycle* と呼ぶ．以下の図でサイクル C_1, C_2, C_3, C_5 は bad cycle である．

G が上述の条件を満たすかどうかは，線形時間でチェックできる [6]. G が上述の条件を満たしているなら，線形時間で G の矩形描画を見つけることができる [6].



(a) 1-legged サイクル　(b) 2-legged サイクル　(c) 3-legged サイクル

図 2: bad cycle の例

4　直交描画アルゴリズム

本文で扱うグラフは2連結3次平面グラフ G である．2連結3次平面グラフとは，一点を除去してもグラフが非連結にならず，かつ，各頂点の次数が全て3であるような平面グラフである．（図 3(a) 参照．）

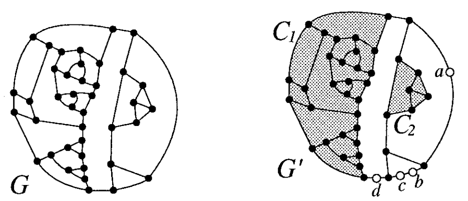


図 3: (a) 2連結3次平面グラフ G (b) グラフ G'

(1) G の外周上に，4つの2次のダミー頂点 a, b, c, d を置く（詳細略 [7]）．得られた平面グラフを G' とする．（図 3(b) 参照．白丸はダミー頂点．）

(2) 各 bad cycle $C_1, C_2, \ldots, C_i$（図 3(b) の灰色部分）とその内部を一点に縮約する．得られたグラフには bad cycle がないので矩形描画可能である．（図 4の G'' 参照．灰色の頂点が縮約された頂点である．）
サイクル C_i とその内部を一点に縮約するとは，サイクル C_i と内部の点を除去し，サイクル C_i の全ての leg 頂点を一点に同一視することである．

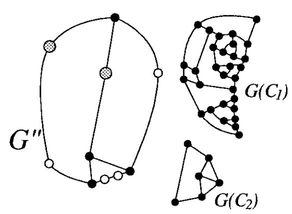


図 4: bad cycle を縮約

(3) 各サイクル $C_1, C_2, \ldots, C_i$ とその内部を再帰的に直交描画する．図 5 参照．（詳細略 [7]．）

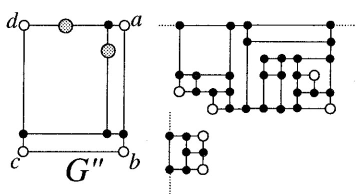


図 5: 直交描画にする

(4) 得られた描画をつなぎ合わせ，直交描画を得る．図 6(a) 参照．（詳細略．）

(5) ダミー頂点 a, b, c, d をベンドと取り替える．

定理 1. 上記アルゴリズムは，2連結3次平面グラフの最小個数のベンドを用いた直交描画を線形時間で求める．

証明 [7] 参照．

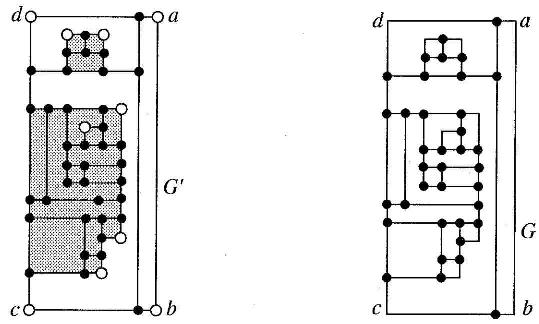


図 6: (a) G' の直交描画　(b) G の直交描画

5 まとめ

本論文では，2連結3次平面グラフの最小個数のベンドを求めるアルゴリズムを与えた．

参考文献

[1] 中野 眞一, 西関 隆夫, グラフの自動描画, 電子情報通信学会誌, Vol. 82, No. 2, pp. 175–180, 1999 年 2 月.

[2] R.Tamassia, *On embedding a graph in the grid with the minimum number of bends* , SIMA J. Comput. 16 (1987) pp. 421–444.

[3] A.Garg and R.Tamassia, *A new minimum cost flow algorithm with applications to graphdrawing*, Proc. of Graph Drawing'96, LNCS 1190 (1997) pp. 201-226.

[4] M. S. Rahman, S. Nakano and T. Nishizeki, *A Linear Algorithm for Optimal Orthogonal Drawings of Triconnected Cubic Plane Graphs*, Graph Drawing 97, Roma, Lect. Notes in Comp. Sci., 1353, Springer, (1998) pp. 99–110.

[5] C. Thomassen, *Plane representations of graphs*, (EDS.) J.A. Bondy and U.S.R. Murty, Progress in Graph Theory, Academic Press Canada, (1984) pp. 43-69.

[6] M. S. Rahman, S. Nakano and T. Nishizeki, *Rectangular grid drawings of plane graphs*, Proc. of COCOON'96, LNCS 1090 (1996) pp. 92-105.

[7] S. Nakano and M. Yoshikawa, *A Linear time Algorithm for Bend-Optimal Orthogonal Drawings of biconnected cubic plane graphs*, Technical Report GU-CS-00-2,2000. (http://www.msc.cs.gunma-u.ac.jp/nakano_lab/TR/GU-CS-00-3.ps)