セントラル・サーバ・モデルにおけるパラメトリック・アナリシスの厳密性のための一条件†

木下俊之†† 大町一彦††

queueing network の解析手法である parametric analysis が厳密解を与えるための，一つの十分条件を導入した．その条件は，対象を中央ノードと周辺ノードから成る closed central server model とした場合，各ジョブの周辺ノードに入る確率が，そのノードで受ける総サービス時間に比例するというものである．parametric analysis は対象とする queueing network model 中のいくつかのノードを一つのノードに置き換えることで解析を容易化する手法であり，一般には近似解となる．しかし対象が closed central server model で本条件を満足すれば，ノードの置換えによるこの近似は入らず，厳密性が保たれることが証明できる．従来から，対象の queueing network model が local balance をもてば parametric analysis は厳密解に一致することは知られているが，これは積形解をもつ場合に限られる．本条件はこの local balance による条件を一般化したものであり，積形解をもたない場合にも適用可能である．また応用上は，対象とする closed central server model が本条件をどの程度満足するかを確認することで，近似度の判定基準とすることができる．

1. まえがき

計算機の性能評価手法の一つに，queueing network model による解析的手法がある．現在，異なる種類のジョブを含む queueing network model の厳密解として知られているのは，local balance をもつ場合の積形解に限られ[1]，それ以外の場合は近似解法によらざるをえない．この種の近似解法を用いる場合，結果の精度の観点から，その手法が厳密解を与えるための条件や，近似解となった場合の解の近似度の判定がつねに問題となる．

queueing network 手法の有力な近似解法として，Chandy による parametric analysis がある[2)~4)]．これは，電気回路における Norton の定理を queueing network model に応用したもので，実現が容易で広く用いられている手法である．Chandy[2] によると，parametric analysis による解は，対象とする queueing network model が local balance をもつ場合は厳密解に一致することが示されている．すなわち，local balance は parametric analysis が厳密解を与えるための一つの十分条件である．しかし，この議論は積形解を出発点としているため，local balance をもたない場合の解の厳密性や近似度については，まったく取り扱うことができない．

本論文は，対象とする queueing network model を中央ノードと周辺ノードから成る closed central server model に限った場合，parametric analysis による結果が厳密解と一致するためのより一般的な形の十分条件を与える．その条件とは，「対象とする closed central server model において，各ジョブが周辺ノードに入る確率はそのノードで受ける総サービス時間に比例する.」という内容である．この条件を満たす closed central server model の parametric analysis は，厳密解を与えることが証明できる．

従来の local balance による条件では，central server model の中央ノードも local balance をもたなければならなかったが，本条件では中央ノードに関する規定が含まれない点が特徴である．また積形解を出発点としていないため，中央ノードが local balance をもたない場合でも適用可能である．そして local balance をもつ closed central server model はつねに本条件を満足することが示されるので，本条件は local balance を包含する内容である．また，応用上は対象とする closed central server model が本条件を数値的にどの程度満足しているかを判定することにより，parametric analysis の近似度を知るための判定基準として用いることができる．

† A Sufficient Condition for the Strict Solution of the Parametric Analysis in a Closed Central Server Model by TOSHIYUKI KINOSHITA and KAZUHIKO OHMACHI (Systems Development Laboratory, Hitachi Ltd.).

†† (株)日立製作所システム開発研究所

2. Closed Central Server Model における parametric analysis

parametric analysis は原理的に一般の queueing network model に適用可能であるが，ここでは対象を次の条件Pを満たす closed central server model に限定する．

(条件P)

P1：すべてのノードは単一サーバとし，各ノードからの完了率はノードの状態に依存しない．

P2：複数のジョブ・クラスが存在し，ジョブのクラス変化は起きない．

P3：周辺ノードにおけるジョブのスケジュール方式は，指数サービスによる last come first served (LCFS) もしくは processor sharing (PS) スケジュールであるか，またはすべてのクラスに共通の指数サービスによる first come first served (FCFS) スケジュールとする．

また，以下の議論で用いる記号は次のとおりとする．

S：対象とする一つの closed central server model

R：ジョブ・クラス数 $(r=1, 2, \cdots, R)$

L：Sの周辺ノード数．ただし，$l=1, 2, \cdots, L$ でSの周辺ノードを表し，$l=0$ で中央ノードを表す．

N_r：S 内に存在するクラス r のジョブ数

μ_{lr}：クラス r のジョブのノード l における平均完了率

e_{lr}：クラス r のジョブのノード l に対する相対到着率．これは，$\boldsymbol{e}_r=(e_{0r}, e_{1r}, \cdots, e_{Lr})$ とし，クラス r に関するマルコフ連鎖の遷移確率行列を $\boldsymbol{P}_r$ とするとき，線形方程式 $\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{P}_r$ の解として得られる値である．この $\boldsymbol{e}_r$ は定数倍を除いて一意に決まり，各 e_{lr} はクラス r のジョブの定常確率に比例する．

n_r：周辺ノード群内に存在するクラス r のジョブ数

n_{lr}：ノード l に存在するクラス r のジョブ数．

したがって $\sum_{l=0}^{L} n_{lr}=N_r$，$\sum_{l=1}^{L} n_{lr}=n_r$ が成り立つ．

$\mu_r(n_1, n_2, \cdots, n_R)$：周辺ノードの状態が $(n_1, n_2, \cdots, n_R)$ であるとき，クラス r のジョブの周辺ノード群からの平均完了率

さらに $\tau_{lr}=e_{lr}/\mu_{lr}$ とおくと，e_{lr} と μ_{lr} のおき方から，τ_{lr} はクラス r のジョブがノード l から受ける総サービス時間に比例する量である．

さて条件Pを満たす closed central server model S に関する parametric analysis の手順は，次のように述べることができる[2]．

step 1：S から中央ノードを取り除き，その間を短絡させた周辺ノードのみから成る queueing network S_1 を考える．この S_1 は条件Pにより local balance をもつので，定常解として積形解を有する．そこで，ジョブ数が $(n_1, n_2, \cdots, n_R)$（ただし $n_r=0, 1, 2, \cdots, N_r$）であるようなおのおのの場合について S_1 の解を求め，クラス r のジョブが短絡部分を単位時間に通過する率 $\mu_r'(n_1, n_2, \cdots, n_R)$ を求める．

step 2：元の S において，周辺ノード群を一つの合成ノードに置き換える．この合成ノードは，ノードの状態が $(n_1, n_2, \cdots, n_R)$ のときのクラス r のジョブの完了率が step 1 で求めた通過率 $\mu_r'(n_1, n_2, \cdots, n_R)$ に等しいものとして設定する．

step 3：中央ノードと合成ノードの2個のノードから成る queueing network S_2 を解いて，中央ノードの特性を解析する．

この step 1 において，S_1 は L 個のノードから成るクラス r のジョブ数が n_r であるような queueing network であり，すべてのノードで local balance が成り立つから，S_1 のノード l からの完了率は $e_{lr}\cdot g(\tau_{lr}; n_1, \cdots, n_r-1, \cdots, n_R)/g(\tau_{lr}; n_1, n_2, \cdots, n_R)$ と表される．ここで $g(\tau_{lr}; n_1, n_2, \cdots, n_R)$ は積形解の正規化定数で

$$g(\tau_{lr}; n_1, n_2, \cdots, n_R)=\sum_{\boldsymbol{n}\in F(L,R)} \prod_{l=1}^{L} \{(\sum_{r=1}^{R} n_{lr})!/\prod_{r=1}^{R} n_{lr}! \times \prod_{r=1}^{R} \tau_{lr}^{n_{lr}}\}$$

$$\left(\begin{array}{l} \boldsymbol{n}=(n_{lr})_{r=1,2,\cdots,R}{}^{l=1,2,\cdots,L}\text{：}L\times R\text{ 次の整数ベクトル} \\ F(L,R)= \\ \{\boldsymbol{n}: n_{lr}\geqq 0,\ \sum_{l=1}^{L} n_{lr}=n_r(r=1, 2, \cdots, R)\} \end{array}\right)$$

である．したがって step 1 の $\mu_r'(n_1, n_2, \cdots, n_R)$ は

$$\mu_r'(n_1, n_2, \cdots, n_R)=\sum_{l=1}^{L} e_{lr}\cdot g(\tau_{lr}; n_1, \cdots, n_r-1, \cdots, n_R)/g(\tau_{lr}; n_1, n_2, \cdots, n_R) \quad (1)$$

と求められる[5),6)]．

この parametric analysis では，次の2か所で厳密性がくずれる可能性がある．それは，

(A1) step 2 において周辺ノード群を合成ノードに置き換える操作

(A2)　step 3 における S_2 の解析

の2か所である．このうち(A2)については，もしSの中央ノードが local balance をもたなければ S_2 においても local balance をもたず，したがって step 3 の解析の結果は積形解とならない．したがって step 3 で厳密な解析を行うためには，S_2 に関する global balance equation を解く必要がある．一般に global balance equation を解くには多くの計算量を必要とするので，これを避けるための近似解法も提案されている[3),4)]．しかし，parametric analysis では周辺ノード群を合成ノードに置き換え，取り扱う状態数が減少しているので，global balance equation の解析が可能な場合も少なくない．そこで以下では step 3 において，この厳密な解析が可能であるものとする．すなわち，(A2) では近似は入らず (A1) でのみ入る可能性があり，もし(A1)が正しければ，parametric analysis は厳密解に一致するものとする．

一方(A1)で厳密性が保たれるためには，S_2 の合成ノードがSの周辺ノードを正しく表現していなければならない．すなわち，Sの周辺ノード群からの総平均完了率 $\mu_r(n_1, n_2, \cdots, n_R)$ と S_2 の合成ノードからの完了率 $\mu_r'(n_1, n_2, \cdots, n_R)$ が，任意の状態 $(n_1, n_2, \cdots, n_R)$ について，

$$\mu_r(n_1, n_2, \cdots, n_R)=\mu_r'(n_1, n_2, \cdots, n_R) \qquad (2)$$

であれば，合成ノードは周辺ノード群を正しく表現しており，(A1)において近似は入らない．しかし，(2)式が成り立たなければ一般に近似解となる．

もしSにおける中央ノードとして任意のものを仮定すると，たとえ step 3 において S_2 の解析を厳密に行ったとしても，得られる結果は必ずしもSの厳密解とはならない．これは，Sの周辺ノード群が条件Pを満たしていても，中央ノードの性質によっては，すでに step 2 において合成ノードが周辺ノード群を正しく表現しておらず，(2)式が成立しないためである．

Sの中央ノードにおいて local balance が成り立つ場合には，条件Pと合わせるとSのすべてのノードで local balance が成り立つので，S には積形解が存在する．これを用いて，周辺ノードの状態が$(n_1, n_2, \cdots, n_R)$ であるという条件のもとでのSの周辺ノード群からの完了率を求めると，その値は(1)式に一致し，したがって(2)式が成立する．すなわち，次の条件BはSに関する parametric analysis が厳密解を与えるための，一つの十分条件であることがわかる．

(条件B)

条件Pを満たす closed central server model S において，中央ノードが local balance をもつ．

この条件Bの十分性は，すでに Chandy らが文献 2) において証明している．ここでは(2)式の成立を示すという考え方による証明を試みる．

中央ノードを含めた S の一つの状態 $\boldsymbol{n}'=(n_{lr})_{r=1,2,\dots,R}^{l=0,1,2,\cdots,L}$ (ただし $\sum_{l=0}^{L} n_{lr}=N_r$) の定常確率は積形解として，

$$P(\boldsymbol{n}')=\prod_{l=0}^{L}\{(\sum_{r=1}^{R} n_{lr})!/\prod_{r=1}^{R} n_{lr}!\times\prod_{r=1}^{R}\tau_{lr}^{n_{lr}}\}$$
$$/g'(\tau_{lr};\ N_1, N_2, \cdots, N_R)$$

と表される．ただし $g'(\tau_{lr};\ N_1, N_2, \cdots, N_R)$ は中央ノードも含めた正規化定数とする．これにより，周辺ノード内のジョブ数が $(n_1, n_2, \cdots, n_R)$ であるという条件のもとで，周辺ノードの状態が $\boldsymbol{n}=(n_{lr})_{r=1,2,\dots,R}^{l=1,2,\cdots,L}$ (ただし $\sum_{l=1}^{L} n_{lr}=n_r$) であるような条件付確率は，

$$P(\boldsymbol{n}|(n_1, n_2, \cdots, n_R))$$
$$\propto\prod_{l=1}^{L}\{(\sum_{r=1}^{R} n_{lr})!/\prod_{r=1}^{R} n_{lr}!\times\prod_{r=1}^{R}\tau_{lr}^{n_{lr}}\}$$

となる．そして $\sum_{\boldsymbol{n}\in F(L,R)} P(\boldsymbol{n}|(n_1, n_2, \cdots, n_R))=1$ であるから

$$P(\boldsymbol{n}|(n_1, n_2, \cdots, n_R))=\prod_{l=1}^{L}\{(\sum_{r=1}^{R} n_{lr})!/\prod_{r=1}^{R} n_{lr}!$$
$$\times\prod_{r=1}^{R}\tau_{lr}^{n_{lr}}\}/g(\tau_{lr};\ n_1, n_2, \cdots, n_R)$$

したがって

$$\begin{aligned}
&\mu_r(n_1, n_2, \cdots, n_R)\\
&=\sum_{\boldsymbol{n}\in F(L,R)}\sum_{l=1}^{L}\mu_{lr}n_{lr}/\sum_{l=1}^{R} n_{lr}\\
&\quad\times P(\boldsymbol{n}|(n_1, n_2, \cdots, n_R))\\
&=\sum_{l=1}^{L}\mu_{lr}\tau_{lr}\times g(\tau_{lr};\ n_1, \cdots, n_r-1, \cdots, n_R)\\
&\quad/g(\tau_{lr};\ n_1, n_2, \cdots, n_R)\\
&=\sum_{l=1}^{L}e_{lr}\times g(\tau_{lr};\ n_1, \cdots, n_r-1, \cdots, n_R)\\
&\quad/g(n_1, n_2, \cdots, n_R)
\end{aligned}$$

となり，(2)式が成り立つことがわかる．すなわち，条件Bは parametric analysis が厳密解を与えるための一つの十分条件である．

3. 厳密解を与える十分条件

(A1)において近似が入らず，parametric analysis が厳密解を与えるためには，(2)式が成り立つことが本質的である．(2)式と前節の条件Bでは，(2)式には周辺ノード群からの完了率に関する式のみで中央ノードに関する条件はないが，条件Bには中央ノードに関する条件も含まれているという違いがある．この原因は，条件Aから(2)式が成立することを導く際に，本質的に S が積形解をもつことを前提にするため，Sのすべてのノードで local balance が成り立つことが必要だからである．結局，条件Bは parametric analysis が積形解と等しくなるための条件を述べたもので，それ以外の厳密解を与える場合の十分条件とはなりえない．

そこで，S が積形解をもたない場合も含みうる，より一般的な場合について，parametric analysis が厳密解を与えるための十分条件として次のような条件を導入する．

(条件C)

条件Pを満たす closed central server model S において，周辺ノード群の状態が $(n_1, n_2, \cdots, n_R)$ のとき，クラス r のジョブのノード l への入り方は独立で，その確率 p_{lr} は各クラス r ごとに τ_{lr} に比例する．すなわち，各 $r=1,2,\cdots,R$ について，

$$p_{1r}:p_{2r}:\cdots:p_{Lr}=\tau_{1r}:\tau_{2r}:\cdots:\tau_{Lr} \quad (3)$$

が成り立つ．

この条件Cは，S の parametric analysis による結果が厳密解と一致するための一つの十分条件である．すなわち，次の定理が成り立つ．

[定理 1]

条件Pを満たす closed central server model が条件Cを満たせば，S に関する parametric analysis は厳密解を与える．

(証明) 条件 P により，周辺ノードでは LCFS, FCFS または PS スケジュールが行われる．そこで，次のように分類して論ずる．

(i) LCFS, FCFS スケジュールの場合

一般式による記述は繁雑のため，次の例について具体的に説明する．

$R=2$

$L=2$(ただし各ノードを A, B と記す)

$n_1=2$(クラス1のジョブ数)

$n_2=1$(クラス2のジョブ数)

この場合，周辺ノード群の状態は(12, 1)などと書ける．これはノードAにクラス1のジョブとクラス2のジョブが入り（ただし，LCFS では後着順，FCFS では先着順とする．したがっていずれもクラス1のジョブが処理中)，ノード B にはクラス1のジョブが存在することを意味する．すると条件Cにより，周辺ノードからの完了率は次のように表される．

(状態の型)	(状態)	(完了率)
(3, 0)型	(112,)	$\mu_{A1}\cdot p_{A1}^2p_{A2}$
	(121,)	$\mu_{A1}\cdot p_{A1}p_{A2}p_{A1}$
	(211,)	$\mu_{A2}\cdot p_{A2}p_{A1}^2$
(2, 1)型	(11, 2)	$(\mu_{A1}+\mu_{B2})\cdot p_{A1}^2p_{B2}$
	(12, 1)	$(\mu_{A1}+\mu_{B1})\cdot p_{A1}p_{A2}p_{B1}$
	(21, 1)	$(\mu_{A2}+\mu_{B1})\cdot p_{A2}p_{A1}p_{B1}$
(1, 2)型	(1, 12)	$(\mu_{A1}+\mu_{B1})\cdot p_{A1}p_{B1}p_{B2}$
	(1, 21)	$(\mu_{A1}+\mu_{B2})\cdot p_{A1}p_{B2}p_{B1}$
	(2, 11)	$(\mu_{A2}+\mu_{B1})\cdot p_{A2}p_{B1}^2$
(0, 3)型	(, 112)	$\mu_{B1}\cdot p_{B1}^2p_{B2}$
	(, 121)	$\mu_{B1}\cdot p_{B1}p_{B2}p_{B1}$
	(, 211)	$\mu_{B2}\cdot p_{B2}p_{B1}^2$

ただし，このいずれの項にも正規化定数の逆数

$$g(p_{lr};\,2,1)^{-1}=(3p_{A1}^2p_{A2}+p_{A1}^2p_{B2}+2p_{A1}p_{A2}p_{B1}+2p_{A1}p_{B1}p_{B2}+p_{A2}p_{B1}^2+3p_{B1}^2p_{B2})^{-1}$$

がかかる．各ノードからは指数サービスを受けるので，周辺ノードからのクラス r のジョブの完了率 $\mu_r(2,1)$ は

$$\begin{aligned}\mu_1(2,1)=&\{2\mu_{A1}p_{A1}^2p_{A2}+\mu_{A1}p_{A1}^2p_{B2}\\&+(\mu_{A1}+\mu_{B1})p_{A1}p_{A2}p_{B1}+\mu_{B1}p_{A1}p_{A2}p_{B1}\\&+(\mu_{A1}+\mu_{B1})p_{A1}p_{B1}p_{B2}+\mu_{A1}p_{A1}p_{B1}p_{B2}\\&+\mu_{B1}p_{A2}p_{B1}^2+2\mu_{B1}p_{B1}^2p_{B2}\}\\&/g(p_{lr};\,2,1)\\=&(\mu_{A1}p_{A1}+\mu_{B1}p_{B1})\times(2p_{A1}p_{A2}+p_{A1}p_{B2}\\&+p_{A2}p_{B1}+2p_{B1}p_{B2})/g(p_{lr};\,2,1)\\=&(\mu_{A1}p_{A1}+\mu_{B1}p_{B1})\\&\times g(p_{lr};\,1,1)/g(p_{lr};\,2,1)\end{aligned}$$

$$\mu_2(2,1)=(\mu_{A2}p_{A2}+\mu_{B2}p_{B2})\times g(p_{lr};\,2,0)/g(p_{lr};\,2,1)$$

同様にして一般の場合も

$$\mu_r(n_1,n_2,\cdots,n_R)=\sum_{l=1}^{L}\mu_{lr}p_{lr}\times g(p_{lr};\,n_1,\cdots,n_r-1,\cdots,n_R)/g(p_{lr};\,n_1,\cdots,n_r,\cdots,n_R)$$

と表される．条件Cにより，各クラス r ごとに比例定

数 K_r が存在して，$p_{lr}=K_r\times\tau_{lr}(l=1,2,\cdots,L)$ と書けるから

$$g(p_{lr};\ n_1,\cdots,n_r,\cdots,n_R)$$
$$=\prod_{r=1}^{R}K_r^{n_r}\cdot g(\tau_{lr};\ n_1,\cdots n_r,\cdots,n_R)$$
$$g(p_{lr};\ n_1,\cdots,n_r-1,\cdots,n_R)$$
$$=\prod_{r'=1}^{R}K_{r'}^{n_{r'}}/K_r\times g(\tau_{lr};\ n_1,\cdots,n_r-1,\cdots,n_R)$$
$$\sum_{l=1}^{L}\mu_{lr}p_{lr}=K_r\cdot\sum_{l=1}^{L}\mu_{lr}\tau_{lr}=K_r\cdot\sum_{l=1}^{L}e_{lr}$$
$$\therefore\ \mu_r(n_1,n_2,\cdots,n_R)$$
$$=\sum_{l=1}^{L}e_{lr}\times g(\tau_{lr};\ n_1,\cdots,n_r-1,\cdots,n_R)$$
$$/g(\tau_{lr};\ n_1,\cdots,n_r,\cdots,n_R)$$

となって $\mu_r'(n_1,n_2,\cdots,n_R)$ に一致し，(2)式が成立する．

(ii) PS スケジュールの場合

$R=2$，$L=2$(各ノードを A，B と書く)，$n_1=5$，$n_2=3$ の例で説明する．前項と同様に，たとえば状態 (11212, 121) の起生確率は $p_{A1}{}^3p_{A2}{}^2p_{B1}{}^2p_{B2}$ に比例するが，PS の場合は各ノードへの着順が異なっていても，各ノードに存在するジョブのクラスの内訳が等しければ，同一の状態と見なすべきである．$n_{A1}=3$，$n_{A2}=2$, $n_{B1}=2$, $n_{B2}=1$ であるような状態数は $\dfrac{5!}{3!\times2!}\cdot\dfrac{3!}{2!\times1!}$ 通りあるから，これの確率 $p((3,2)),(2,1))$ は，

$$p((3,2),(2,1))=\frac{5!}{3!\times2!}\cdot\frac{3!}{2!\times1!}\,p_{A1}{}^3p_{A2}{}^2p_{B1}{}^2p_{B2}\times p_0 \qquad (4)$$

この形より，p_0 は正規化定数の逆数 $g(p_{lr};\ 5,3)^{-1}$ に等しいことがわかる．

一方，この状態からの完了率は，

$$\left.\begin{array}{l}\text{クラス 1 について } (3/5)\cdot\mu_{A1}+(2/3)\cdot\mu_{B1}\\ \text{クラス 2 について } (2/5)\cdot\mu_{A2}+(1/3)\cdot\mu_{B2}\end{array}\right\} \qquad (5)$$

であるから，状態確率を含めた完了率は，たとえばクラス 1 については，

$$\left\{\mu_{A1}p_{A1}\times\frac{4!}{2!2!}\cdot\frac{3!}{2!1!}\cdot p_{A1}{}^2p_{A2}{}^2p_{B1}{}^2p_{B2}\right.$$
$$\left.+\mu_{B1}p_{B1}\times\frac{5!}{3!2!}\cdot\frac{2!}{1!1!}\cdot p_{A1}{}^3p_{A2}{}^2p_{B1}p_{B2}\right\}$$
$$\times g(p_{lr};\ 5,3)^{-1}$$

などをすべての状態について加えたものになる．この場合，{ }内の各項の第 2 因数の和は $g(p_{lr};\ 4,3)$ になるから，以上により，

$$\mu_1(5,3)=(\mu_{A1}p_{A1}+\mu_{B1}p_{B1})\times g(p_{lr};\ 4,3)$$
$$/g(p_{lr};\ 5,3)$$

同様にして一般の場合も

$$\mu_r(n_1,n_2,\cdots,n_R)$$
$$=\sum_{l=1}^{L}\mu_{lr}p_{lr}\times g(p_{lr};\ n_1,\cdots,n_r-1,\cdots,n_R)$$
$$/g(p_{lr};\ n_1,\cdots,n_r,\cdots,n_R)$$

以降は，前項(i)と同様である． (Q. E. D.)

この証明の式の導出は，一般の queueing network model の解析において積形解からスループットを導く操作[5),6)] と類似しているが，定理の前提がまったく異なる．

4. 両十分条件の比較

closed central server model に関する二つの条件 BとCは，ともに parametric analysis が厳密解を与えるための十分条件であることがわかった．そこで両者の比較を試みる．まず，両条件が含む範囲については，条件Cを導入する際に述べたように，条件Bでは S が積形解をもつことを前提としているが，条件Cはこれを前提としていない．その点で条件Cは条件Bより広い範囲を含みうる条件である．そしてさらに強く次の定理が成り立つ．

[定理 2]

closed central server model S が条件B を満たせば，条件Cも満たす．

(証明)

周辺ノードが LCFS, FCFS の場合を考える．他の場合もほぼ同様である．$(i_{11}i_{12}\cdots i_{1n_1}, i_{21}i_{22}\cdots i_{2n_2},\cdots, i_{L1}i_{L2}\cdots i_{Ln_L})$ (ただし $\#\{j:\ i_{lj}=r\}=n_{lr}$) で周辺ノードの順序を含めた状態を表す．中央ノードにおけるクラス r のジョブ数が m_r である状態を $E_{m_1,m_2,\cdots,m_R}$ と書くと，中央ノードのスケジュールが PS の場合の local balance equation は，

$$e_{lr}\cdot\mu_{0r}\times(N_r-n_r)/\sum_{r'=1}^{R}(N_{r'}-n_{r'})$$
$$\times p(E_{N_1-n_1,\cdots,N_R-n_R},$$
$$(i_{11}\cdots i_{1n_1},\cdots,i_{l1}\cdots i_{ln_l},\cdots,i_{L1}\cdots i_{Ln_L}))$$
$$=\sum_{l'=1}^{L}e_{l'r}\cdot\mu_{lr}\times p(E_{N_1-n_1,\cdots,N_r-n_r-1,\cdots,N_R-n_R},$$
$$(i_{11}\cdots i_{1n_1},\cdots,ri_{l1}\cdots i_{ln_1},\cdots,i_{L1}\cdots i_{Ln_L}))$$

これより

$$p_{lr}\propto(e_{lr}/\mu_{lr})\times\mu_{0r}(N_r-n_r)/\sum_{l'=1}^{L}e_{l'r}\sum_{r'=1}^{R}(N_{r'}-n_{r'})$$

$\propto \tau_{lr}(l=1, 2, \cdots, L)$

中央ノードがLCFS, FCFS の場合は(ただし FCFS ではサービス率はクラスに共通)，中央ノードで処理中であるジョブがクラス r であり，かつ中央ノードのジョブ数が $(m_1, m_2, \cdots, m_R)$ である状態を $E^r{}_{m_1, m_2, \cdots, m_R}$ と書くと，local balance equation は，

$$e_{lr} \cdot \mu_{0r} \times p(E^r{}_{N_1-n_1, \ldots, N_R-n_R}, (i_{11}\cdots i_{1n_1}, \cdots, i_{l1}\cdots i_{ln_l}, \cdots, i_{L1}\cdots i_{Ln_L}))$$
$$= \sum_{l'=1}^{L} e_{l'r}\mu_{lr} p(E_{N_1-n_1, \ldots, N_r-n_r-1, \ldots, N_R-n_R}, (i_{11}\cdots i_{1n_1}, \cdots, r i_{lr}\cdots i_{ln_1}, \cdots, i_{L1}\cdots i_{Ln_L}))$$

これより

$$p_{lr} \propto (e_{lr}/\mu_{lr}) \times \mu_{0r} / \sum_{l'=1}^{L} e_{l'r} \propto \tau_{lr}$$
$$(l=1, 2, \cdots, L) \qquad \text{(Q. E. D.)}$$

この定理2により，条件Cは条件Bを論理的に包含しており，条件Bより一般的な十分条件となっていることがわかる．

次に，中央ノードをどう規定しているかという点では，条件Bでは中央ノードが local balance をもつことを明示しているが，条件Cでは周辺ノードに関する制約のみで，中央ノードに関する制約は明示的には述べられていない．一般に central server model 全体の性質は，中央ノードにおけるスケジュール方式，サービス分布などに依存するから，周辺ノードからの完了率 $\mu_r(n_1, n_1, \cdots, n_R)$ も中央ノードの性質により変化する．そして条件Cはこの周辺ノードからの完了率に(2)式が成り立つことを要請しており，これが間接的に中央ノードの性質を規定したことになる．すなわち，条件Cは，

「周辺ノードで条件Pを満たすclosed central server model において，中央ノードが(2)式を成り立たせる性質をもつこと」

と言い換えることができる．

条件Cの第3の特徴は，「ジョブがノードに入る確率」という統計量に対して制約条件が与えられている点である．したがって，条件Cが厳密に成り立つことを確かめられなかった場合でも，数値的な方法などによりこれを確認すれば，適用することが可能である．もちろん，この方法では近似的にしか確かめられないが，対象とする closed central server model S のいくつかのポイントについてシミュレーションなどを用いて条件Cがどの程度成り立つかを調べることにより，S の他の環境下における parametric analysis の近似度の判定基準として用いることができる．

5. む す び

closed central server model に関する parametric analysis が厳密解を与えるための，一つの十分条件を導入し十分性を証明した．この条件は，従来から知られている local balance による条件を包含し，かつ積形解をもたない場合にも適用可能である．また中央ノードに関する制約条件が明示されず，条件の内容もジョブがノードに入る確率に関する定量的なものであるため，これの成立を数値的に確認して適用することも可能である．今後は本論文で取り扱った両条件が成り立つ範囲の違いをより詳細に調べ，また一般の queueing network への拡張を試みる予定である．

謝辞 最後に，本研究について貴重なご意見をいただいた電気通信大学亀田壽夫助教授，当社システム開発研究所の方々，ならびに研究の機会を与えていただいた同研究所三浦武雄所長に深く感謝の意を表します．

参 考 文 献

1) Baskett, F., Chandy, K. M., Muntz, R. R. and Palacious, F. G.: Open Closed and Mixed Networks of Queues with Different Classes of Customers, *J. ACM*, Vol. 22, No. 2, pp. 248-260 (1975).
2) Chandy, K. M., Herzog, U. and Woo, L.: Parametric Analysis of Queueing Networks, *IBM J. Res. Dev.*, Vol. 19, No. 1, pp. 36-42 (1975).
3) Chandy, K. M., Herzog, U. and Woo, L.: Approximate Analysis of General Queueing Networks, *IBM J. Res. Dev.*, Vol. 19, No. 1, pp. 43-49 (1975).
4) Sauer, C. H. and Chandy, K. M.: Approximate Analysis of Central Server Models, *IBM J. Res. Dev.*, Vol. 19, No. 3, pp. 301-313 (1975).
5) Balbo, G., Bruell, S. C. and Schwetman, H. D.: Customer Classes and Closed Network Models—A Solution, *Proc. IEEE*, pp. 559-564 (1977).
6) Bruell, S. C. and Balbo, G.: *Computational Algorithms for Closed Queueing Networks*, Elsevier North Holland, New York (1980).

(昭和57年5月20日受付)
(昭和57年9月6日採録)