1D-4 二変数ハイブリッド有理関数近似の誤差評価[1]

甲斐博　　野田松太郎

愛媛大学 工学部 情報工学科

1 はじめに

本論では多変数近似 GCD の一つの応用として有理関数近似への応用について検討する．General Order Newton-Padé 近似 [1] により得られた二変数有理関数補間が不必要な特異点を与える問題において，我々は多変数近似 GCD を応用した．多変数近似 GCD により不必要な特異点が取り除かれ，結果として滑らかな近似が得られる．本論では，この方法を二変数ハイブリッド有理関数近似と表す．得られた有理関数近似とデータとの間の誤差は実験的に小さいことが示されるが，その誤差評価は今だ与えられていない．本論では，一変数のハイブリッド有理関数近似で示された誤差評価を用い，二変数ハイブリッド有理関数近似の誤差評価を検討する．

2 二変数有理関数補間に表れる不必要な特異点

General Order Newton Padé 近似は関数近似だけでなく与えたデータ値の有理関数補間の方法として用いることができる．補間点 (x_i, y_j) とデータ値 f_{ij} を与え $R(x_i, y_j) = f_{ij}$ となる有理関数 $R(x, y)$ を求める．

ここで，ある有理関数 $r(x, y) = p(x, y)/q(x, y)$ を考え，与えるデータ値が $f_{ij} \approx r(x_i, y_j)$ であるような場合を仮定する．もし $R(x, y)$ の次数が $r(x, y)$ の次数より大きいなら，有理関数補間の分子と分母の多項式は $P(x, y) = p(x, y)g(x, y) + \delta P(x, y)$, $Q(x, y) = q(x, y)g(x, y) + \delta Q(x, y)$ と表されるかもしれない．ここで，$\delta P(x, y)$ と $\delta Q(x, y)$ は微小係数多項式，$g(x, y)$ は $P(x, y)$ と $Q(x, y)$ の近似的共通因子を表す．このような近似的共通因子 $g(x, y)$ の存在により有理関数補間は不必要な特異点を持つ場合があることを次に示す．

補間点 $(x_i, y_j) = (i/8, j/8)$, $i = 0, \cdots, 4$, $j = 0, \cdots, 4$ とする．その上でのデータ値 f_{ij} として $r(x, y) = (x^2 + y + 1)/(x + y + 2)$ に近い

$$\begin{pmatrix} f_{00} & f_{01} & f_{02} & f_{03} & f_{04} \\ f_{10} & f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{20} & f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{30} & f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{40} & f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.50000073 & 0.52941208 & 0.55555635 & 0.57894824 & 0.60000062 \\ 0.47794138 & 0.50694510 & 0.53289510 & 0.55625065 & 0.57738173 \\ 0.47222252 & 0.50000062 & 0.52500095 & 0.54761924 & 0.5.681827 \\ 0.48026341 & 0.50625085 & 0.52976208 & 0.55113663 & 0.57065303 \\ 0.50000099 & 0.52380984 & 0.54545521 & 0.56521764 & 0.58333405 \end{pmatrix},$$

を与える．これらを補間する有理関数補間 $R(x, y)$ は次のように得られる．

$$\begin{aligned} R(x,y) &= P(x,y)/Q(x,y), \\ P(x,y) &= -2.6049577x^4 + (-0.00083949148y^3 + 0.00031480931y^2 + 2.8111073y + 0.97781496)x^3 \\ &\quad +(0.00031480931y^3 + 0.26408965y^2 - 3.8056766y - 2.5512149)x^2 \\ &\quad +(-0.000056647048y^3 + 2.8113202y^2 + 3.7912276y + 0.97911352)x \\ &\quad -0.00031597250y^4 + 0.26364437y^3 - 0.93596916y^2 - 1.1483022y + 0.052589706, \\ D(x,y) &= -2.6080651x^3 + (0.20602000y - 4.2282035)x^2 + (3.0751622y^2 + 5.4024684y + 2.0108000)x \\ &\quad +0.26255676y^3 - 0.67105834y^2 - 2.3491922y + 0.10517926. \end{aligned}$$

$R(x, y)$ の関数形は図 **1.** に示す．しかし，$x = 0.43, y = 0.15$ の近傍を拡大すると図 **2.** に示すように不必要な特異点が表れる．得られた $P(x, y)$ と $Q(x, y)$ のパラメータ $\epsilon = 10^{-3}$ の近似 GCD を Ochi 等により提案されているアルゴリズム [2] を用い求めると，$\tilde{g}(x) = \mathrm{GCD}(P, Q; 10^{-3}) = 1.000x^2 + (-1.080y - 0.3683)x - 0.1009y^2 + 0.4600y - 0.02112$ となる．得られた近似 GCD を P と Q から取り除くと不必要な特異点を持たない有理関数近似 $\tilde{r}(x, y) = \tilde{p}(x, y)/\tilde{q}(x, y), \tilde{p}(x, y) = 0.999x^2 - 0.007x + 0.992y + 0.997, \tilde{q}(x, y) = 1.000x + 1.001y + 1.990$ が得られる．

---

[1] Error Estimation of Bivariate Hybrid Rational Function Approximation,

Hiroshi Kai and Matu-Tarow Noda,
Department of Computer Science, Ehime University,
3 Bunkyo-cho, Matsuyama, Ehime 790-8577, Japan

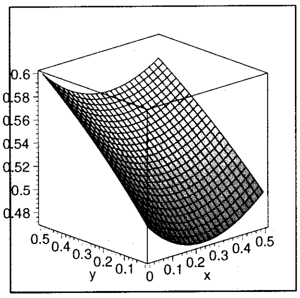

図 1. $R(x,y)$

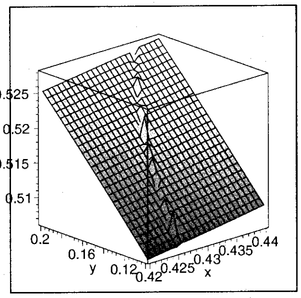

図 2. 不必要な特異点

3 二変数ハイブリッド有理関数近似の誤差評価

有理関数補間 $R(x,y)$ は正確にデータ値 f_{ij} を補間するが，有理関数近似 $\tilde{r}(x,y)$ はデータ値を近似するのみである．$\tilde{r}(x,y)$ の誤差として，$(x,y)=(x_i,y_j)$ の点の上で，次の e を評価することを考える．

$$\left|\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}-\frac{\tilde{p}(x,y)}{\tilde{q}(x,y)}\right|\le e.$$

Ochi 等の近似 GCD のアルゴリズムでは

$$\begin{aligned}P(x,y) &= \tilde{g}(x,y)\tilde{p}(x,y)+\delta P(x,y),\ \|\delta P\|=O(\epsilon),\\ Q(x,y) &= \tilde{g}(x,y)\tilde{q}(x,y)+\delta Q(x,y),\ \|\delta Q\|=O(\epsilon),\end{aligned}$$

を満足する近似 GCD が求められる．ここで多項式ノルムは L_∞ ノルムを表す．これは基本的に一変数の近似 GCD と同じ定義である．この定義を用いて一変数のハイブリッド有理関数近似の誤差評価 [3] を二変数の場合に拡張することを行うと，次の関係が成り立つ．
$1\le|Q(z,w)|$ を満足する $z,w\in[-1,1]$ に対して，

$$\left|\frac{P(z,w)}{Q(z,w)}-\frac{p(z,w)}{q(z,w)}\right|\le\left(1+\left|\frac{P(z,w)}{Q(z,w)}\right|\right)\frac{\tilde{\epsilon}}{1-\tilde{\epsilon}},$$

が成り立つ．ここで $\tilde{\epsilon}=\max\{\|\delta P\|_1,\|\delta Q\|_1\}\le\max\{t_p\|\delta P\|,t_q\|\delta Q\|\}$ である．$\|\delta P\|_1,\|\delta Q\|_1$ はそれぞれ $\delta P,\delta Q$ の係数の絶対値の和を表し，t_p,t_q は $\delta P,\delta Q$ の単項式の項数を表す．
2 節の例では，$x=0,y=0.5$ において $|Q(0,0.5)|\ge 1$ が成り立ち，この時 $\tilde{\epsilon}=0.1173$ なので，

$$\left|\frac{P(0,0.5)}{Q(0,0.5)}-\frac{p(0,0.5)}{q(0,0.5)}\right|\le\left(1+\left|\frac{P(0,0.5)}{Q(0,0.5)}\right|\right)\frac{0.1173}{1-0.1173}=0.2127,$$

が得られる．このように $x=0,y=0.5$ での誤差を示すことが出来る．

4 まとめ

本論では，General Order Newton Padé 近似に表れる不必要な特異点を二変数ハイブリッド有理関数近似により取り除く方法を示し，その誤差評価の方法を検討した．一変数のハイブリッド有理関数近似で示した誤差評価を用いることにより二変数の場合の誤差評価が容易に行える．

しかし，実際の $x=0,y=0.5$ での誤差は，$|P(0,0.5)/Q(0,0.5)-p(0,0.5)/q(0,0.5)|=0.0004061$ と非常に小さい．評価値を実際の値に近づけて行くことが今後の課題である．

References

[1] A.A.M. Cuyt and B.M. Verdonk, General Order Newton-Padé Approximants for Multivariate Functions, Numer. Math., **43**, pp.293–307, 1984.

[2] M.Ochi, M.T.Noda and T.Sasaki, Approximate Greatest Common Divisor of Multivariate Polynomials and Its Application to ill-Conditioned Systems of Algebraic Equations, Journal of Information Processing, **14**(3), pp.292–300, 1991.

[3] 甲斐博, ハイブリッド有理関数近似の誤差評価, 情報処理学会論文誌, Vol.40, No.4, 1999.