標本点数を低倍率で漸増させる実関数の FFT†

鳥居 達生†† 長谷川 武光†††

周期 2π の実数値関数，偶関数，奇関数を，それぞれ所要の精度でフーリエ級数，cosine 級数，sine 級数に展開する．標本数を 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, … と $\sqrt{2}$ 倍的に増大させながら高次の級数(実は三角補間多項式)を構成する．項数が２のべきの実数 FFT を補助的に用い本方法の高速化を図った．cosine 級数，sine 級数展開の場合，関数の対称性，歪対称性を用いているので無駄はない．本方法で求めた級数の打切り誤差は，離散型フーリエ級数のそれと比べわずかにわるいだけである．

1. まえがき

Clenshaw と Curtis は，有限閉区間で滑らかな関数をいったん Chebyshev 級数展開し，それを項別積分する自動積分法を提示した[1]．与えられた関数を逐次標本化（この場合標本数を倍々に増す）しながら，所要の精度で級数展開する自動化の最初の例が，これであろう．その後，Chebyshev 級数展開は FFT の手法を使い高速化され実用化されている[2),3]．自動 Chebyshev 級数展開は，たんに関数の積分だけでなく，激しい振動積分など特異積分などに応用されている[4)~6]．今後，微積分方程式に対する Chebyshev-Galerkin 法としても，それは大いに利用されるであろう．

われわれは複素数値関数の自動級数展開において，標本数を節約する立場から標本数を $\sqrt{2}$ 倍的に増す算法を提示した[8]．同様な考え方に基づき実数値周期関数のフーリエ展開，sine, cosine 級数展開および関数の Chebyshev 級数展開を行う[10]．自動級数展開の応用の広さから，その効率化の意義は大きいといえる．

FFT を用いて複素数値関数をべき級数に展開する算法を実数値関数のフーリエ展開に，そのまま使えない理由は次の点にある．負べきを有しない多項式においては，除法の定理によって，二つの多項式の商と余りは一意的に定まるが，負べきの項があるならば，それが成立しない．

そこで，三角多項式の除法の定理を確立することが算法の基礎となる．

周期 2π をもつ実数値関数 $X(t)$ において，$z=e^{it}$ と変数変換し $f(z)=X(t)$ とおけば $f(z)$ の正べき負べきの対応する係数は互いに複素共役となる．

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k \tag{1}$$

$$c_{-k}=\bar{c}_k$$

すなわち Hermite 対称である．ここで商と余りを定義すればよいことになる．

$f(z), \omega(z)$ を，それぞれ $n, m\leq n$ 次の三角多項式とする．$n-m$ 次および m 次の三角多項式 $q(z), r(z)$ を適当にとって

$$f(z)=\omega(z)q(z)+r(z) \tag{2}$$

とできる．$r(z)$ を $m-1$ 次にできないことに注意を要する．$q(z), r(z)$ の実係数の個数は，それぞれ $2(n-m)+1$, $2m+1$ であって，両者合わせて $2n+2$ 個となる．左辺 $f(z)$ の実係数の個数は $2n+1$ であるから，(2)の右辺は任意定数を１個含むことになる．そこで，この任意性を消すために $r(z)$ の最高位の係数の絶対値を最小化する．そのため $f(z)$ と $\omega(z)$ を同次の二項多項式

$$f(z)=c_{-n}z^{-n}+c_n z^n$$

$$\omega(z)=a_{-n}z^{-n}+a_n z^n$$

と限定して一般性を失わない．条件(２)を満たす商 $q(z)$ は，実の定数 q_0 であるから余り $r(z)$ は

$$r(z)=(c_{-n}-q_0 a_{-n})z^{-n}+(c_n-q_0 a_n)z^n$$

となる．複素数 a_n, c_n に対し $c_n-q_0 a_n$ の絶対値を最小化する実数 q_0 は

$$q_0=\mathrm{Re}\left(\frac{c_n}{a_n}\right)$$

で与えられる．したがって余りは

$$f(z), \bmod \omega(z)=r(z)$$
$$=\bar{C}_n z^{-n}+C_n z^n, \tag{3}$$

† Fast Fourier Transform for Real Functions Increasing the Sample Points with Slow Geometric Progression by TATSUO TORII (Department of Information Science, Faculty of Engineering, Nagoya University) and TAKEMITSU HASEGAWA (Department of Information Science, Faculty of Engineering, Fukui University).

†† 名古屋大学工学部情報工学科
††† 福井大学工学部情報工学科

ただし

$$C_n = ia_n \mathrm{Im}\left(\frac{c_n}{a_n}\right)$$

と表される．

明らかに $\omega(z)$ と $r(z)$ の最高位の係数の偏角の差は $\pi/2$ である．

2. 実数値関数のフーリエ展開

同期 2π の実数値関数 $X(t)$ の $2N$ 項の離散型フーリエ変換は

$$C_k^{2N} = \frac{1}{2N}\sum_{0\le j<2N} X\left(\frac{\pi}{N}j\right)e^{-\frac{\pi i}{N}kj} \qquad (4)$$

$$0\le k<2N$$

であって，$X(t)$ の実数性より離散型フーリエ係数は Hermite 対称 $C_{2N-k}^{2N}=\bar{C}_k^{2N}$ である．

$X(t)=f(z)$ が任意の三角多項式のとき

$$\sum_{|k|\le N}{}'' C_k^{2N}z^k = f(z),\ \mathrm{mod}\,\mathrm{Im}\,z^N \qquad (5)$$

が成り立つ．ただし $C_{-k}^{2N}=C_{2N-k}^{2N}$ であって Σ'' は初項と末項を 1/2 倍して和をとることを意味する．

新たに N 個の標本 $X(2\pi(j+1/4)/N)$, $0\le j<N$ より，ずらしパラメータ 1/4 を含む広義の離散型フーリエ変換

$$A_{k,1/4}^N = \frac{1}{N}\sum_{0\le j<N} X\left(\frac{2\pi}{N}\left(j+\frac{1}{4}\right)\right)e^{-\frac{2\pi i}{N}k\left(j+\frac{1}{4}\right)}$$

$$0\le k<N \qquad (6)$$

を行う．$X(t)$ の実数性より Hermite 対称性

$$A_{-k,1/4}^N=\bar{A}_{k,1/4}^N=iA_{N-k,1/4}^N$$

が成り立つ[7]．(6)は，広義の離散型フーリエ係数を与えるが，同時に z^N-i の零点上における $f(z)$ の補間式

$$f(z),\ \mathrm{mod}\,(\mathrm{Im}\,(e^{-\pi i/4}z^{N/2}))=\sum_{|k|\le N/2}{}'' A_{k,1/4}^N z^k \qquad (7)$$

の係数でもある．

$f(z)$ の二つの補間式(5)，(7)を知って両者の合成

$$f(z),\ \mathrm{mod}\,(\mathrm{Im}\,z^N\cdot\mathrm{Im}\,(e^{-\pi i/4}z^{N/2}))$$
$$=2\mathrm{Re}\sum_{0\le k\le 3N/2}{}'' C_k^{3N}z^k \qquad (8)$$

を求めよう．

1 をつくる恒等式

$$(\mathrm{Re}\,z^N)^2+(\mathrm{Im}\,z^N)^2=1$$

の両辺に $f(z)$ をかけ(8)の意味で合同をとれば，その左辺は

$$(\mathrm{Re}\,z^N)^2\cdot(5)+(\mathrm{Im}\,z^N)^2\cdot(7)$$

$$=\frac{1}{2}((5)+(7))+\frac{1}{2}((5)-(7))\,\mathrm{Re}\,z^{2N} \qquad (9)$$

と変形される．c を任意の複素数とするとき

$$\mathrm{Re}\,(cz^k)\cdot\mathrm{Re}\,z^{2N}=\mathrm{Re}\,(\bar{c}z^{2N-k}),\ \mathrm{mod}\ \mathrm{Im}\,z^{2N}$$

であるから，この関係を使えば，(9)は

$$\mathrm{Re}\Big\{\sum_{0\le k\le N}{}'' C_k^{2N}z^k+\sum_{0\le k\le N/2}{}'' A_{k,1/4}^N z^k$$
$$+\sum_{0\le k\le N}{}'' \bar{C}_k^{2N}z^{2N-k}-\sum_{0\le k\le N/2}{}'' \bar{A}_{k,1/4}^N z^{2N-k}\Big\} \qquad (10)$$

と書ける．ここで $3N/2$ 次より高次の項を

$$\mathrm{Im}\,z^N\cdot\mathrm{Im}\,(e^{-\pi i/4}z^{N/2})=0 \qquad (11)$$

を用いて消去する．三角関数の除法により上式の下で

$$\mathrm{Re}\,(cz^{2N-k})=\mathrm{Re}\,(\bar{c}z^k+icz^{N-k}+i\bar{c}z^{N+k})$$
$$0\le k<N/2$$
$$\mathrm{Re}\,(cz^{3N/2})$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\{(c+i\bar{c})z^{3N/2}+(\bar{c}+ic)z^{N/2}\} \qquad (12)$$

であるから，c として $\bar{C}_k^{2N}-A_{k,1/4}^N$ をとれば，求める多項式(8)の係数は，以下のように確定する．

$$C_k^{3N}=C_k^{2N}$$
$$0\le k<N/2$$
$$C_{N-k}^{3N}=\frac{1}{2}\{C_{N-k}^{2N}+i\bar{P}_k\}$$
$$0\le k<N/2$$
$$C_{N+k}^{3N}=\frac{1}{2}\{\bar{C}_{N-k}^{2N}+iP_k\}$$
$$0\le k\le N/2$$
$$C_{N/2}^{3N}=\frac{1}{2}\left\{C_{N/2}^{2N}+\frac{1}{2}(C_{N/2}^{2N}+i\bar{P}_{N/2})\right\} \qquad (13)$$

ただし

$$P_k=C_k^{2N}-A_{k,1/4}^N$$
$$0\le k\le N/2$$

ここで $C_{2N/2}^{3N}$ は，特別扱いであるが $A_{N/2,1/4}^N=-i\bar{A}_{N/2,1/4}^N$ を用いて導いた．三角関数の除法の定理によれば，(11)と(8)の最高べきの係数は直交（偏角の差が $\pi/2$）しなければならない．実際，$A_{N/2,1/4}^N e^{\pi i/4}$ が実数であることに注意すれば，その事実は容易に確かめられる．

以上でN次から $3N/2$ 次の三角多項式への移行が完了したことになる．誤差評価については後述するが，多項式(13)が所要の精度を満たすならば，計算は終了であるが満たさなければ，さらにN個の標本 $X(2\pi/N(j+3/4))$, $0\le j<N$ を追加しN項変換

$$A_{k,3/4}^N=\frac{1}{N}\sum_{0\le j<N} X\left(\frac{2\pi}{N}\left(j+\frac{3}{4}\right)\right)e^{-\frac{2\pi i}{N}k\left(j+\frac{3}{4}\right)}$$

$$0 \leq k < N \tag{14}$$

を求める．$\{A^N_{k,1/4}\}$ と $\{A^N_{k,3/4}\}$ を合成して $2N$ 項の中点則による変換 $\{B_k\}$ を得る．これと $\{C^{2N}_k\}$ を合成し $4N$ 項の変換 $\{C^{4N}_k\}$，換言すれば $2N$ 次の三角多項式が求められる．この過程は FFT の原理そのものであるから詳述を避ける．たとえば文献 7) をみよ．

N を 2 のべき 2^n とし，$n=2,3,4,\cdots$ と動かしながら上述の操作を繰り返せば，$\sqrt{2}$ 倍的に，すなわち

$2,3,4,6,8,12,16,24,32,\cdots$

と次数が増大する三角補間多項式の列がつくられる．

これらの補間式の誤差評価について述べる．

いま，実数値関数 $X(t)=f(z)$ のフーリエ級数

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k \tag{15}$$

の収束は十分速いとする．後の都合上項数 $4N$ の離散型フーリエ変換を考える．$\mathrm{Im}\, z^{2N}=0$ より

$$C^{4N}_k=\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{k+4mN} \tag{16}$$

となるよく知られた関係が得られる．離散フーリエ係数の精度は末尾に近づくほどわるくなる．したがって，$2N$ 次の離散型フーリエ級数の絶対誤差は

$$\Big|f(z)-\sum_{|k|\leq 2N}{}'' C^{4N}_k z^k\Big| \leq 2|\mathrm{Im}\, c_{2N}|+4(|c_{2N-1}|+|c_{2N-2}|+\cdots) \tag{17}$$

となる[7]．これに対し $3N$ 項変換(13)の誤差の振舞いはどのように異なるであろうか．そこで上述の $2N$ 次の三角多項式 $\sum C^{4N}_k z^k$ を $\mathrm{Im}\, z^N\cdot\mathrm{Im}(e^{-\pi i/4}z^{N/2})$ を使って $3N/2$ 次に圧縮すれば，(12)より

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{0\leq k\leq N/2}{}'' (C^{4N}_k+\bar{C}^{4N}_{2N-k})z^k + (C^{4N}_{N-k}+iC^{4N}_{2N-k})z^{N-k}+(C^{4N}_{N+k}+i\bar{C}^{4N}_{2N-k})z^{N+k} \tag{18}$$

が得られる．$3N$ 項変換を $4N$ 項離散型フーリエ変換の近似とみたとき(16)に対応する関係式は

$$\begin{aligned} &C^{3N}_k=C^{4N}_k+\bar{C}^{4N}_{2N-k},\quad 0\leq k<N/2\\ &C^{3N}_{N-k}=C^{4N}_{N-k}+iC^{4N}_{2N-k},\quad 0\leq k<N/2\\ &C^{3N}_{N+k}=C^{4N}_{N+k}+i\bar{C}^{4N}_{2N-k},\quad 0\leq k\leq N/2\\ &C^{3N}_{N/2}=C^{4N}_{N/2}+\frac{1}{2}(\bar{C}^{4N}_{3N/2}+iC^{4N}_{3N/2}) \end{aligned} \tag{19}$$

となる．係数ごとに誤差をみると C^{3N}_0, C^{3N}_N が最もよく $C^{3N}_{N/2}, C^{3N}_{3N/2}$ は最もわるい．N を十分大きくとれば C^{4N}_k は c_k $(k\leq 2N)$ のよい近似となるので打切り誤差は

$$\Big|f(z)-2\,\mathrm{Re}\sum_{0\leq k\leq 3N/2}{}'' C^{3N}_k z^k\Big| \leq 2\sqrt{2}\,|\mathrm{Re}\, c_{3N/2}-\mathrm{Im}\, c_{3N/2}| +8(|c_{3N/2+1}|+\cdots)+O(c_{2N}) \tag{20}$$

によって評価できる．この導出においても(12)が働く．

3. 偶関数の cosine 級数展開

3.1 閉区間 $[0,\pi]$ 上で関数が与えられた場合

周期 2π の偶関数 $X(t)$ は閉区間 $[0,\pi]$ 上で標本化され，端点 $t=0,\pi$ は，必ず標本点に含まれるものとする．関数 $X(t)$ が偶関数であることから，その複素フーリエ級数表示(1)において各係数は実数であって $c_{-k}=c_k$ が成り立つ．$X(t)$ の $2N$ 項離散型フーリエ変換(4)は，台形公式に基づく $N+1$ 項の cosine 変換になっている．

α を 1 より小さい非負の実数とする．一般中点則に基づく $X(t)$ の N 項離散型フーリエ変換

$$A^N_{k,\alpha}=\frac{1}{N}\sum_{0\leq j<N} X\Big(\frac{2\pi}{N}(j+\alpha)\Big)e^{-\frac{2\pi i}{N}k(i+\alpha)}$$

$$X\Big(\frac{2\pi}{N}(j+\alpha)\Big)=X\Big(\frac{2\pi}{N}(N-j-\alpha)\Big),\quad j\geq N/2 \tag{21}$$

において，$X(t)$ の実数性と対称性より

$$A^N_{N-k,\alpha}=e^{-2\pi i\alpha}\bar{A}^N_{k,\alpha} \tag{22}$$

$$A^N_{k,1-\alpha}=\bar{A}^N_{k,\alpha} \tag{23}$$

が成り立つ[7]．とくに $\alpha=1/4$ のとき，(23)より $\{A^N_{k,1/4}\}$，$\{A^N_{k,3/4}\}$ のいずれか一方は他方より定まることになり，$2N$ 項の中点則による変換 $\{B^{2N}_k\}$ は N 項変換 $\{A^N_{k,1/4}\}$ に帰着されることになる[9]．したがって偶関数の cosine 級数展開を次数を倍々に増しながら行う関数入力の高速 cosine 変換においては，ずらしパラメータ α を 1/4 とする実数 FFT を繰り返し用いればよい．われわれは，次数が倍々に増えるこの過程の中間段階の級数展開を知りたい．そのためには $\{A^N_{k,1/4}\}$ の構成要素である $N/2$ 項変換 $\{A^{N/2}_{k,1/8}\}$, $\{A^{N/2}_{k,5/8}\}$ のいずれか一方が必要となる．これら二つと $\{C^{2N}_k\}$ から $\{C^{4N}_k\}$ が高速 cosine 変換の原理に基づき生成される経過を図 1 に示す．

高速 cosine 変換を実数 FFT を用いて行うとき次

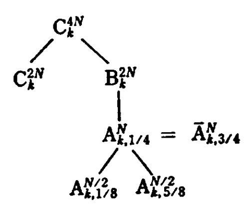

図 1 高速 cosine 変換（閉型）
Fig. 1 Fast cosine transform (closed type).

の二つの補題が基礎となっている.

［補題1］ 周期 2π の関数 $X(t)\,(=f(z),\ z=e^{it})$ が偶関数のとき

$$f(z),\ \mathrm{mod}\ \mathrm{Im}\,(e^{-\pi i\alpha}z^{N/2})=\sum_{|k|\leq N/2}{}'' A^N_{k,\alpha}z^k \quad (24)$$

ならば

$$X(t),\ \mathrm{mod}\,(\cos Nt-\cos 2\pi\alpha)$$
$$=\sum_{0\leq k<N}{}' \frac{2\,\mathrm{Im}(\bar{A}^N_{N-k,\alpha})}{\sin 2\pi\alpha}\cos kt \quad (25)$$

が成り立つ.

ただし $\sum'$ は初項だけ 1/2 倍して和をとる記号とする.

(証明) $f(z)$ の対称性より性質 (23) が利用できるので

$$f(z),\ \mathrm{mod}\,(\mathrm{Im}\,e^{\pi i\alpha}z^{N/2})=\sum_{|k|\leq N/2}{}'' \bar{A}^N_{k,\alpha}z^k \quad (26)$$

である. 明らかに

$$\mathrm{Im}\,(e^{\pi i\alpha}z^{N/2})\cdot\mathrm{Im}\,(e^{-\pi i\alpha}z^{N/2})$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(\cos 2\pi\alpha-z^N)$$
$$=\frac{1}{2}(\cos 2\pi\alpha-\cos Nt)$$

また, 1を生成する恒等式

$$\frac{1}{2\sin 2\pi\alpha}\{(\sin Nt+\sin 2\pi\alpha)-(\sin Nt-\sin 2\pi\alpha)\}$$
$$=1$$

の両辺に $f(z)$ をかけ, $\cos Nt-\cos 2\pi\alpha=0$ を用いると

$$f(z),\ \mathrm{mod}\,(\cos Nt-\cos 2\pi\alpha)$$
$$=\frac{1}{2\sin 2\pi\alpha}\cdot\{(\sin Nt+\sin 2\pi\alpha)(24)$$
$$-(\sin Nt-\sin 2\pi\alpha)(26)\}$$

となる. 右辺は, まだ見掛け上 $3N/2$ 次であるので

$$\cos(N+k)t,\ \mathrm{mod}\,(\cos Nt-\cos 2\pi\alpha)$$
$$=-\cos(N-k)t+2\cos 2\pi\alpha\cos kt$$

を用いてN次式に圧縮すれば

$$f(z)=\frac{2}{\sin 2\pi\alpha}\sum_{0\leq k\leq N/2}{}'' (\mathrm{Im}\,(\bar{A}^N_{k,\alpha})\cos(N-k)t$$
$$+(\mathrm{Re}(A^N_{k,\alpha})\sin 2\pi\alpha$$
$$+\mathrm{Im}\,(A^N_{k,\alpha})\cos 2\pi\alpha)\cos kt)$$

となる. ここで $X(t)$ の実数性から性質 (22) を使い, $A^N_{0,\alpha}$ が実数であることに注意すれば, 求める式 (25) の表現が得られる. (証明終)

［補題2］ 補題1の仮定に加えて

$$f(z),\ \mathrm{mod}\ \mathrm{Re}\,(e^{-\pi i\alpha}z^{N/2})=\sum_{|k|\leq N/2}{}'' A^N_{k,\alpha+1/2}z^k \quad (27)$$

が与えられるならば

$$X(t),\ \mathrm{mod}\,(\cos 2Nt-\cos 4\pi\alpha)$$
$$=\frac{2}{\sin 4\pi\alpha}\sum_{0\leq k<2N}{}' \mathrm{Im}\,(A^{2N}_{2N-k,\alpha})z^k \quad (28)$$

ただし $\{A^{2N}_{k,2\alpha}\}$ は, 一般中点則による $2N$ 項離散型フーリエ変換である.

$$\left.\begin{aligned}
A^{2N}_{k,2\alpha}&=\frac{1}{2}(A^N_{k,\alpha}+A^N_{k,\alpha+1/2})\\
A^{2N}_{N+k,2\alpha}&=\frac{1}{2}e^{-2\pi i\alpha}(A^N_{k,\alpha}-A^N_{k,\alpha+1/2})\\
0\leq k&<N
\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

(証明) 補題1を (27) に適用すれば

$$f(z),\ \mathrm{mod}\,(\cos Nt+\cos 2\pi\alpha)$$
$$=-\frac{2}{\sin 2\pi\alpha}\sum_{0\leq k<N}{}' \mathrm{Im}\,(\bar{A}^N_{N-k,\alpha+1/2})\cos kt \quad (30)$$

となる. ここで, 恒等式

$$\frac{1}{2\cos 2\pi\alpha}\{(\cos Nt+\cos 2\pi\alpha)$$
$$-(\cos Nt-\cos 2\pi\alpha)\}=1$$

の両辺に $f(z)$ をかけ $\cos 2Nt-\cos 4\pi\alpha$ を法として合同をとれば, 左辺の括弧内は

$$(\cos Nt+\cos 2\pi\alpha)(25)-(\cos Nt-\cos 2\pi\alpha)(30)$$

となる. これは $2N$ 項の cosine 級数である. 関数 $X(t)$ の実数性に基づく性質 (22) と FFT の合成則である (29) を用い, 書き変えることによって求める式 (28) の表示が得られる. (証明終)

関数の Chebyshev 級数展開を実数 FFT を用いて初めて行ったのは Gentleman である[2]. この論文は難解であるが, われわれはその算法の基礎的な部分を算法と無関係に三角関数の除法の定理をかりて述べただけである.

補題 1, 2 において $\alpha=1/8, N$ を $N/2$ とすれば中点公式に基づく離散型 cosine 級数 $X(t),\ \mathrm{mod}\,(\cos Nt)$ が得られる. これと台形公式による級数 $X(t),\ \mathrm{mod}\,(\sin Nt)$ を合成して次数が倍の $X(t),\ \mathrm{mod}\,(\sin 2Nt)$ が得られる. 問題は, 二つの級数

$$X(t),\ \mathrm{mod}\ \sin Nt=2\sum_{0\leq k\leq N}{}'' C^{2N}_k\cos kt \quad (31)$$

$$X(t),\ \mathrm{mod}\left(\cos\frac{N}{2}t-\cos\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=2\sqrt{2}\sum_{0\leq k<N/2}{}' \mathrm{Im}\,(\bar{A}^{N/2}_{N/2-k,1/8})\cdot\cos kt \quad (32)$$

を与えて

$$X(t),\ \mathrm{mod}\left(\left(\cos\frac{N}{2}t-\cos\frac{\pi}{4}\right)\sin Nt\right)$$

$$=2\sum_{0\le k\le 3N/2}'' C_k^{3N}\cos kt \tag{33}$$

を求めることである．

そこで，上式左辺の意味で $X(t)$ と合同となる $3N$ 次の多項式

$\sin^2 N\theta\cdot(32)+\cos^2 N\theta\cdot(31)$

について考える．まず

$$2\sin^2 N\theta\cdot\cos k\theta=\cos k\theta-\cos(2N-k)\theta$$
$$2\cos^2 N\theta\cdot\cos k\theta=\cos k\theta+\cos(2N-k)\theta$$
$$\mathrm{mod}\,(\sin 2N\theta)$$

を用いると上の $3N$ 次式は $2N$ 次式へ圧縮される．

$$\sqrt{2}\sum_{0\le k<N/2}'\mathrm{Im}(\bar{A}_{N/2-k,1/8}^{N/2})(\cos kt-\cos(2N-k)t)$$
$$+\sum_{0\le k\le N}'' C_k^{2N}(\cos kt+\cos(2N-k)t) \tag{34}$$

次に

$$2\left(\cos\frac{N}{2}t-\cos\frac{\pi}{4}\right)\sin Nt=0 \tag{35}$$

を用いて $3N/2$ 次以上の項を消去する．これより

$$\cos(2N-k)t$$
$$=\cos(N+k)t-\cos(N-k)t$$
$$-\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{N}{2}+k\right)t-\cos\left(\frac{3N}{2}-k\right)t\right)+\cos kt \tag{36}$$

となる．さらに $X(t)$ の実数性より (22) を用いると

$$\mathrm{Re}\,A_{k,1/8}^{N/2}=\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\,A_{N/2-k,1/8}^{N/2}+\mathrm{Im}\,A_{k,1/8}^{N/2}$$

上の両式を使って次の結果を得る．

$$C_k^{3N}=C_k^{2N},\quad 0\le k<N/2$$
$$C_{N-k}^{3N}=\frac{1}{2}(C_{N-k}^{2N}+P_k),\quad 0<k<N/2$$
$$C_{N+k}^{3N}=\frac{1}{2}(C_{N-k}^{2N}-P_k),\quad 0<k\le N/2$$
$$C_{N/2}^{3N}=\frac{1}{2}\left(C_{N/2}^{2N}+\frac{1}{2}(C_{N/2}^{2N}+P_{N/2})\right)$$
$$C_N^{3N}=\frac{1}{2}C_N^{2N} \tag{37}$$

ただし

$$P_k=\sqrt{2}\,(\mathrm{Re}\,A_{N/2-k,1/8}^{N/2}-C_{N/2-k}^{2N})-C_k^{2N}$$
$$0\le k\le N/2$$

以上で算法の説明を終り以下誤差解析を行う．まず $2N$ 次の cosine 級数

$$X(t)=2\sum_{0\le k\le 2N}' a_k\cos kt \tag{38}$$

に対し，変換 (37) をほどこしたときの係数ごとの誤差をしらべる．この変換は $3N/2$ 次の級数に対しては，恒等変換であるから，それより高次の項の効果

$$2\sum_{0\le k<N/2} a_{2N-k}\cos(2N-k)t$$
$$\mathrm{mod}\left(\sin Nt\left(\cos\frac{N}{2}t-\cos\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

を (36) を用いて計算すればよい．すなわち

$$C_0^{3N}=a_0+2a_{2N}$$
$$C_k^{3N}=a_k+a_{2N-k}$$
$$C_{N/2}^{3N}=a_{N/2}-\sqrt{2}\,a_{2N}$$
$$C_{N-k}^{3N}=a_{N-k}-\sqrt{2}\,a_{3N/2+k}-a_{2N-k}$$
$$C_N^{3N}=a_N$$
$$C_{N+k}^{3N}=a_{N+k}+\sqrt{2}\,a_{3N/2+k}+a_{2N-k}$$
$$C_{3N/2}^{3N}=a_{3N/2}+\sqrt{2}\,a_{2N}$$
$$1\le k<N/2 \tag{39}$$

本節の終りに，$3N/2$ 次の級数 (33) の絶対誤差を評価する．条件 (35) の下で

$$\cos\left(\frac{3}{2}N+k\right)t=\cos\left(\frac{3}{2}N+k\right)t$$
$$-4\left(\cos\frac{N}{2}t-\cos\frac{\pi}{4}\right)\sin kt\sin Nt$$

であるから

$$(33)\text{の絶対誤差}<12\sum_{k>3N/2}|a_k| \tag{40}$$

が成り立つ．ただし，ここで不等式

$$\left|\left(\cos\frac{Nt}{2}-\cos\frac{\pi}{4}\right)\sin Nt\right|<\frac{3}{2} \tag{41}$$

を用いている．この証明は略す．

3.2 開区間 $(0,\pi)$ 上で関数が与えられた場合

偶関数 $X(t)$ の標本化は開区間 $(0,\pi)$ 上で行われるものとする．$X(t)$ の cosine 変換を定義する数値積分公式が，前節では閉じた公式であるのに対し本節では開いた公式を用いることになる．

一般中点則に基づく二つの N 項変換 $\{A_{k,\alpha}^N\}$，$\{A_{k,\alpha+1/2}^N\}$ の合成 (29) において，$X(t)$ が偶関数（あるいは奇関数）のとき，それが再帰的となるのは，$\alpha=0$ と 1/3 の場合だけである[7]．前者の場合は，いわゆる台形公式と中点公式の相補性であり前節で述べたので，後者の場合について考える．

さて，$X(t)$ の対称性より性質 (23) を用いると $\{A_{k,1/3}^{2N}\}$ は，$\{A_{k,1/3}^N\}$ と $\{A_{k,1/6}^N\}$ からつくられる．さらに $\{A_{k,1/6}^N\}$ は $\{A_{k,1/12}^{N/2}\}$ と $\{A_{k,5/12}^{N/2}\}$ に分解される．この過程を**図 2** に示す．

いま，$X(t)$ を実関数とみなしたときの N 項変換 $\{A_{k,1/3}^N\}$ と $N/2$ 項変換 $\{A_{k,1/12}^{N/2}\}$ が与えられたとき $3N/2$ 項の cosine 級数

$$X(t),\ \mathrm{mod}\left(\cos Nt-\cos\frac{2}{3}\pi\right)\left(\cos\frac{N}{2}t-\cos\frac{\pi}{6}\right)$$

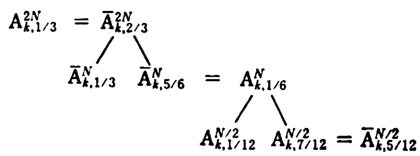

図 2　高速 cosine 変換 (開型)
Fig. 2　Fast cosine transform (open type).

$$=2\sum_{0\leq k<3N/2}{}' A_k \cos kt \tag{42}$$

を求めることにしよう．

補題1と仮定から，二つの cosine 級数

$$X(t),\ \mathrm{mod}\left(\cos Nt+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\sum_{0\leq k<N}{}' \mathrm{Im}\,(\bar{A}^{N}_{N-k,1/3})\cos kt \tag{43}$$
$$X(t),\ \mathrm{mod}\left(\cos\frac{N}{2}t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=4\sum_{0\leq k<N/2}{}' \mathrm{Im}\,(\bar{A}^{N/2}_{N/2-k,1/12})\cos kt \tag{44}$$

を既知としてよい．

そこで，恒等式

$$\frac{1}{2}\sec 2\pi\alpha\,\{(\cos Nt+\cos 2\pi\alpha)$$
$$-(\cos Nt-\cos 2\pi\alpha)\}=1$$
$$\alpha=1/3 \tag{45}$$

の両辺に $X(t)$ をかけ $\cos 2Nt-\cos 4\pi\alpha$ を法として $X(t)$ と合同をとれば

$$\frac{1}{2}((43)+(44))+\frac{1}{2}\sec 2\pi\alpha\cos Nt((43)-(44))$$

となる．引き続き (42) の意味で合同をとればよい．

したがって求める係数は以下のようになる．

記法の便宜上 $P_{N/2}=0$,

$$P_k=\mathrm{Im}\,(\bar{A}^{N/2}_{N/2-k,1/12})-\mathrm{Im}\,(\bar{A}^{N}_{N/2-k,1/3})$$
$$+\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathrm{Im}\,(\bar{A}^{N}_{k,1/3})-\mathrm{Im}\,(\bar{A}^{N}_{N-k,1/3}))$$
$$0\leq k<N/2$$

とおけば

$$A_k=P_k+\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Im}\,(\bar{A}^{N}_{N-k,1/3})$$
$$A_{N-k}=P_k+\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Im}\,(\bar{A}^{N}_{k,1/3})$$
$$A_{N+k}=P_k,\quad 0\leq k\leq N/2 \tag{46}$$

と表される．

被近似関数を $2N$ 次の cosine 級数 (38) として，係数ごとの誤差評価を行う．仮定として

$$\left(\cos Nt+\frac{1}{2}\right)\left(\cos\frac{t}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0 \tag{47}$$

であるから，

$$\cos 2Nt=-\frac{1}{2}$$
$$\cos\frac{3}{2}Nt=\frac{\sqrt{3}}{2}-2\cos\frac{N}{2}t+\sqrt{3}\cos Nt$$
$$\cos\left(\frac{3}{2}N+k\right)t$$
$$=\sqrt{3}\,(\cos kt+\cos(N-k)t+\cos(N+k)t)$$
$$-\left(\cos\left(\frac{N}{2}-k\right)t+\cos\left(\frac{N}{2}+k\right)t\right.$$
$$\left.+\cos\left(\frac{3}{2}N-k\right)t\right) \tag{48}$$

が成立するので，この関係を用い

$$2\sum_{k=3N/2}^{2N} a_k\cos kt$$

を，たかだか $3N/2-1$ 次の cosine 級数に圧縮することにより次の結果が導かれる．

$$A_0=a_0+\sqrt{3}\,a_{3/2N}-a_{2N}$$
$$A_k=a_k+\sqrt{3}\,a_{3/2N+k}-a_{2N-k}$$
$$A_{N/2}=a_{N/2}-2a_{3/2N}$$
$$A_{N-k}=a_{N-k}+\sqrt{3}\,a_{3N/2+k}-a_{2N-k}$$
$$A_N=a_N+\sqrt{3}\,a_{3N/2}$$
$$A_{N+k}=a_{N+k}+\sqrt{3}\,a_{3N/2+k}-a_{2N-k}$$
$$1\leq k<N/2 \tag{49}$$

また，不等式

$$\left|\left(\cos Nt+\frac{1}{2}\right)\left(\cos\frac{N}{2}t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|\leq\frac{3(2+\sqrt{3})}{4}<3$$

を用いることにより級数 (42) の絶対誤差の評価

$$|X(t)-2\sum_{0\leq k<3N/2}{}' A_k\cos kt|$$
$$<24\sum_{k\geq 3N/2}|a_k| \tag{50}$$

が得られる．これは前節で述べた閉じた積分公式に基づく方法に比べ，1ビット精度がおちることを注意しておこう．

4. 奇関数の sine 級数展開

偶関数の cosine 級数展開とほぼ同様にして，奇関数 $X(t)$ の sine 級数展開ができるが，本質的に異なるところだけ述べる．$X(t)$ を実関数とみて，一般中点則に基づく N 項変換を $\{A^{N}_{k,\alpha}\}$ とするとき，(22) が成立するのは当然であるが，$X(t)$ が奇関数であることから，(23) に対応して

$$A^{N}_{k,\alpha}=-\bar{A}^{N}_{k,1-\alpha},\quad \alpha>0 \tag{51}$$

が成り立つ[7]．

偶関数の cosine 級数展開の計算法の基礎である補題1, 2に対応して奇関数の場合次の補題が必要となる.

[補題3]　周期 2π の関数 $X(t)$ $(=f(z), z=e^{it})$ が奇関数のとき

$$f(z),\ \mathrm{mod}\ \mathrm{Im}(e^{-\pi i\alpha}z^{N/2})$$
$$=\sum_{|k|\le N/2}{}'' A^N_{k,\alpha}z^k$$

ならば

$$X(t),\ \mathrm{mod}(\cos Nt-\cos 2\pi\alpha)$$
$$=\sum_{0\le k<N}{}' \frac{2\mathrm{Re}(A^N_{k,\alpha})}{\sin 2\pi\alpha}\sin(N-k)t$$

が成り立つ.

[補題4]　補題3の仮定に加えて

$$f(z),\ \mathrm{mod}\ \mathrm{Re}(e^{-\pi i\alpha}z^{N/2})=\sum_{|k|\le N/2}{}'' A^N_{k,\alpha+1/2}z^k$$

が与えられるならば

$$X(t),\ \mathrm{mod}(\cos 2Nt-\cos 4\pi\alpha)$$
$$=\frac{2}{\sin 4\pi\alpha}\sum_{0\le k<2N}{}' \mathrm{Re}(A^{2N}_{k,2\alpha})\sin(2N-k)t$$

ただし $A^{2N}_{k,2\alpha}$ は(29)でつくられるものとする.

証明は略す.

表 1　(52)式の Chebyshev 級数展開

Table 1　Chebyshev expansion of (52).

	展 開 係 数	誤差×10^{10}
0	2.00000 00009 31322	9.3
1	1.00000 00011 64153	11.6
2	.50000 00019 79060	19.8
3	.25000 00037 83498	37.8
4	.12500 00074 79684	74.8
5	6250 00149 15713	149.2
6	3125 00298 09598	298.1
7	1562 50596 08283	596.1
8	781 24993 41455	−6.6
9	390 61887 45356	−612.5
10	195 30923 91588	−326.1
11	97 65422 33613	−202.7
12	48 82631 92455	−180.6
13	24.41157 47499	−248.8
14	12 20261 76303	−441.4
15	6 09496 93258	−854.6
16	3 05175 78132	—
17	1 53442 52072	854.6
18	76735 30759	441.4
19	38395 74824	248.8
20	19254 06302	180.6
21	9739 40931	202.7
22	5094 46026	326.1
23	2996 74133	612.6
24	1198 69653	6.6

5. 数 値 例

閉区間[1, −1]で滑らかな関数 $f(x)$ の Chebyshev 級数展開に3.1節で述べた cosine 級数展開を応用する.

例として Chebyshev 多項式の母関数

$$f(x)=\frac{1-a^2}{1-2ax+a^2}$$
$$=2\sum_{k=0}^{\infty}{}' a^kT_k(x),\quad a=\frac{1}{2} \tag{52}$$

を用いる. 係数ごとの誤差評価(39)の検証が容易なことから, $a=1/2$ とした. 仮数部16進14桁の計算機を使用した. ずらしパラメータを含む実数 FFT を補助的に使い, (37)で求めた結果が**表1**である. $N=16$ のとき cosine 級数の次数は24である.

6. む す び

項数が2のべきの実数 FFT を補助的に使いながら標本数を 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, … と $\sqrt{2}$ 倍的に増す自動級数展開法について述べた. 取り扱った関数は実数値関数, 偶関数, 奇関数である.

三角多項式の除法の定理を基礎に統一的に計算法を記述したつもりである.

cosine 級数, sine 級数展開においては, 関数の対称性, 歪対称性は用いられているので実数 FFT を使うとはいえ無駄はない.

標本数を倍々に増す通常の関数入力の FFT (選点直交関係を用いた離散型フーリエ変換) と $\sqrt{2}$ 倍的に標本数を増す本方法と項数を一定として精度を相対的に比較するならば次のようになる. 前者の誤差を1としたとき後者の誤差は2章のフーリエ展開の場合2となる. cosine 級数展開の方法は二通り述べたが, 3.1節の方法の場合3, 3.2節の場合6となる.

すなわち正確な離散型フーリエ変換に比べ, ここで述べた“準”離散型フーリエ変換は1〜3ビット精度を損うだけである.

数値的安定性と計算法 (とくに計算の停止則) について複素数値関数の場合[8]を参照されることを望む.

謝辞　おわりに, 日頃いろいろ討論していただく二宮市三教授にお礼申し上げる.

参 考 文 献

1) Clenshaw, C. W. and Curtis, A. R.: A Method for Numerical Integration on an Automatic

Computer, *Numer. Math.*, Vol. 2, No. 4, pp. 197-205 (1960).

2) Gentleman, W. M.: Implementing Clenshaw-Curtis Quadrature, *Comm. ACM*, Vol. 15, No. 5, pp. 337-342, 343-346 (1972).

3) 鳥居達生：高速 sine 変換，cosine 変換とその数値積分への応用，情報処理，Vol. 15, No. 9, pp. 670-679 (1974).

4) Piessens, R. and Branders, M.: Computation of Oscillating Integrals, *J. Comput. Math.*, Vol. 1, No. 3, pp. 153-164 (1975).

5) Piessens, R. and Branders, M.: Numerical Solution of Integral Equations of Mathematical Physics, Using Chebyshev Polynomials, *J. Comput. Phys.* Vol. 21, No. 2, pp. 178-196 (1976).

6) 長谷川武光，鳥居達生：激しい振動積分 $\int_{-1}^{1} e^{i\omega t} f(t)dt$ の求積法，数理解析研究所講究録 453, pp. 197-210 (1982).

7) 森　正武，名取　亮，鳥居達生：岩波講座情報科学 18　数値計算，pp. 147-197，岩波，東京 (1982).

8) 鳥居達生，長谷川武光：$\sqrt{2}$ 倍的に標本数を増す複素関数入力の FFT，情報処理，(投稿中).

9) 鳥居達生，長谷川武光，二宮市三：等差数列的に標本数を増す補間的自動積分法，情報処理，Vol. 19, No. 3, pp. 248-255 (1978).

10) 鳥居達生，長谷川武光：$\sqrt{2}$ 倍的に標本数を増す関数入力の高速 cosine 変換，情報処理学会第23回（昭和56年後期）全国大会講演論文集，pp. 905-906 (1981).

(昭和57年 9 月 16 日受付)
(昭和57年 11 月 8 日採録)