Vol.2016-MUS-111 No.14
2016/5/22

チュートリアル「積分方程式と音場再現」

大谷　真[†1]

概要：音場の支配方程式である波動方程式から導かれる積分方程式に基づいて，ある空間における音場を異なる空間内で再現する音場再現が可能となる．本稿では，音場再現の理論的基盤について，初学者向けに解説する．

キーワード：音場再現，ホイヘンスの原理，積分方程式，波面合成法，境界音場制御

Tutorial: Integral Equation and Sound Field Reproduction

MAKOTO OTANI[†1]

Abstract: Theoretically, a sound field in a space can be reproduced in another space based on integral equations derived from the wave equation. This paper introduces theoretical background of sound field reproduction for beginners.

Keywords: Sound Field Reproduction, Huygens' Principle, Integral Equation, Wave Field Synthesis, Boundary Surface Control

1. はじめに

ある空間において生じる音場を異なる空間において物理的に再現する，いわゆる音場再現に関する研究が行われてきた．音場再現は，物理的にはホイヘンスの原理を用いた説明が可能であり，数学的には波動方程式から導かれる積分方程式によって定式化される．

音場再現の概念は, '67 年に Camras により提案された[1]. Camras が提案した概念は物理的にはホイヘンスの原理（Huygens' principle）に基づくものである．すなわち，前進する波面上の無数の点を小さな点音源とみなし，各点音源から放射される２次波の重ね合わせによって新しい波面が生成されるという概念である．

図 1 に示すように，Camras は，コンサートホールなどの原音場におけるある領域 V の境界面 S 上に配置したマイクロホンによって音圧信号を収録し，異なる空間内（２次音場）に設定された V'≡V となる領域 V'の境界面 *S'*上に原音場での境界面 *S* 上のマイクロホンに対応して配置された音源を *S* 上での収録信号により駆動することで V 内の音場が V'内で再現される，と主張した．しかし，音場再現は理論上可能であるものの，実際に完全な音場再現を達成するためには，V'を囲む壁面が完全吸音であり，また，壁面に設置する音源が音場に影響を与えない理想的な点音源である必要があり，現実には実現不可能であるとの批判を受けた．

音場再現の概念を実装するにあたって上述の批判は妥当なものであったが，その一方で，理論面では，波動方程式から導出されるキルヒホッフ-ヘルムホルツ積分方程式（KHIE：Kirchhoff-Helmholtz integral equation）がホイヘンスの原理の数学的な解釈を与えることから，積分方程式に基づいた音場再現の理論が構築されてきた。

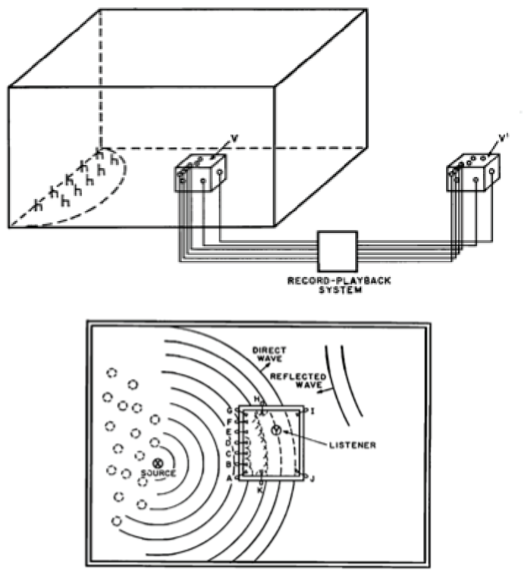

図 1　ホイヘンスの原理に基づいた音場再現[1]
Figure 1　Sound field reproduction based on Huygens' principle[1]

'88 年には，Berkhout によりいわゆる波面合成法（WFS: Wave Field Synthesis）が提案された[2]．WFS は，KHIE において境界面を無限平面とすることで導出される第２種あるいは第１種レイリー積分（Rayleigh integral）に基づいて定式化されたが，Camras の提案に対する批判，すなわち，完全な音場再現の実現には完全吸音の壁面と理想的な点音源が必要であるという課題は WFS にもそのまま該当しており，理論面での整備が進む一方で，実装面における課題は未解決であった．

†1 京都大学大学院工学研究科
Graduate School of Engineering, Kyoto University

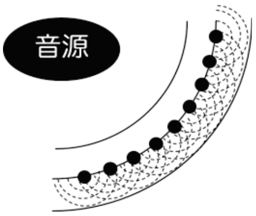

図 2　ホイヘンスの原理
Figure 2　Huygens' principle

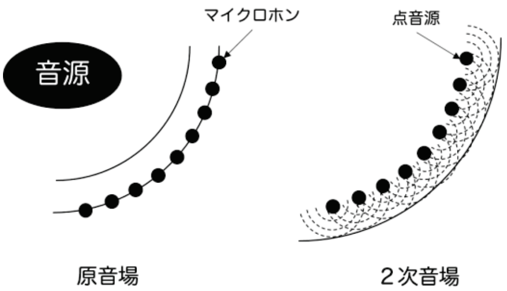

図 2　ホイヘンスの原理に基づいた音場再現の概念
Figure 2　Concept of sound field reproduction based on Huygens' principle

このような状況の中, '97 年に伊勢が KHIE と逆システム理論に基づいて提案した音場再現の理論が境界音場制御（BoSC: Boundary Surface Control）の原理である[3]. 従来の音場再現の理論を実装するには, 境界面上に理想的な点音源を並べるという技術的困難から逃れられないが, BoSC では逆システムを利用して境界面上の音圧と粒子速度を制御することで, ２次音場の再現領域を囲む壁面及び音源に関する制約が原理的に排除されることとなった. このことで, 音場再現の実現に向けた課題は, 完全吸音の壁面及び理想的な点音源の実現という解決困難な課題から正確かつ頑健な逆システムをいかに設計するかという現実的な課題に変換されることとなり, 音場再現は実用化に向けて大きく前進することとなった.

音場再現の理論の概要は上述のとおりであるが, 以下では, ホイヘンスの原理と積分方程式に基づいた音場再現の理論の発展についてより詳細に解説する.

2. ホイヘンスの原理

ある音源から放射された音波の広がりは, ホイヘンスの原理により説明できる. すなわち, 図 1 に示すように, 前進する波面上の無数の点を小さな点音源とみなし, 各点音源から放射される２次波の重ね合わせによって新しい波面が生成されると考える.

このようなホイヘンスの原理が表す概念を応用することで, 直感的にではあるが, 音場再現の原理を説明することができる. 例えば, 図 2 のように, 原音場におけるある波面上に配置したマイクロホンにより音圧信号を収録し, ２次音場に同様に配置した点音源から収録した信号を再生することで, 原音場で新たに生成される波面を２次音場において再現することができる. また, マイクロホン（及び点音源）を波面上に並べて配置するのではなく任意の面を想定してその面上に配置した場合でも、同様に波面を再現可能であることは想像に難くない. Camras が提唱したのは, このようなホイヘンスの原理に基づいた音場再現の概念である.

ホイヘンスの原理は, 音場再現の概念を物理的に説明するものであるが, 次章で解説する積分方程式によって, これに数学的な解釈を加えることが可能である.

3. 積分方程式

3.1 積分方程式の導出

(1) キルヒホッフ-ヘルムホルツ積分方程式

音場の支配方程式である波動方程式は３次元では

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \tag{1}$$

と表される. ここで, p は音圧を表す. 音圧 p を空間位置 $\mathbf{r}$ と時間 t の関数とし, 角周波数 ω で振動すると仮定すると

$$p(\mathbf{r},t) = p(\mathbf{r})e^{j\omega t}$$

と表せ, これを(1)式に代入すると,

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)p(\mathbf{r}) = 0$$

となり, ヘルムホルツ方程式が得られる. ここで, $k\ (=\omega/c)$ は波数である. 音場内に点音源がある場合には, デルタ関数 $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{s})$ を用いて,

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)p(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{s})$$

が成り立ち, このようなヘルムホルツ方程式を満たす解, すなわち境界を持たない自由音場における解としてグリーン関数（Green's function）

$$G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{s}) = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{s}|}}{4\pi\,|\,\mathbf{r}-\mathbf{s}\,|}$$

が知られている.

複数の点音源を含む音場におけるヘルムホルツ方程式について考える. 領域 V 内の位置 $\mathbf{r'}_k$ に N 個の点音源があるとし, 各点音源の強さを $q_k\ (k=1,\ldots,N)$ とすると,

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)p(\mathbf{r}) = -j\omega\rho\sum_{k=1}^{N}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r'}_k)$$

が成り立つ. ρ は空気密度である. ここで, $G\nabla^2 p - p\nabla^2 G$ について考えると,

$$Q(\mathbf{r}) = j\omega\rho_0\sum_{k=1}^{N} q_k\cdot\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k{}')$$

として，

$$G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{s})\nabla^2 p(\mathbf{r}) - p(\mathbf{r})\nabla^2 G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{s}) = -G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{s})Q(\mathbf{r}) + p(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{s})$$

となり，両辺を V で体積積分をとると，

$$\begin{aligned}&\iiint_V \left\{G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{s})\nabla^2 p(\mathbf{r}) - p(\mathbf{r})\nabla^2 G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{s})\right\}dV \\ &= \iiint_V \left\{-G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{s})Q(\mathbf{r}) + p(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{s})\right\}dV\end{aligned} \tag{2}$$

となる．ここで左辺について，領域 V を囲む境界面を S として，グリーンの定理

$$\iiint_V \left(f\nabla^2 g - g\nabla^2 f\right)dV = \iint_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right)dS$$

を適用すると，

$$\begin{aligned}&\iiint_V \left\{G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{s})\nabla^2 p(\mathbf{r}) - p(\mathbf{r})\nabla^2 G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{s})\right\}dV \\ &= \iint_S \left\{G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{s})\frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial n} - p(\mathbf{r})\frac{\partial G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{s})}{\partial n}\right\}dS\end{aligned}$$

となる．

また，(2)式の右辺第１項，第２項について，デルタ関数の性質を考慮すると，

$$\begin{aligned}&\iiint_V \left\{-G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{s})Q(\mathbf{r}) + p(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{s})\right\}dV \\ &= -j\omega\rho\sum_{k=1}^{N} q_k G(\mathbf{r}_k'\,|\,\mathbf{s}) + p(\mathbf{s})\end{aligned}$$

となり，以上をまとめると，

$$\begin{aligned}p(\mathbf{s}) &= j\omega\rho_0\sum_{k=1}^{N} q_k G(\mathbf{r}_k'\,|\,\mathbf{s}) \\ &\quad + \iint_S \left\{G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{s})\frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial n} - p(\mathbf{r})\frac{\partial G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{s})}{\partial n}\right\}dS\end{aligned} \tag{3}$$

で表されるキルヒホッフ-ヘルムホルツ積分方程式（KHIE）を得る．さらに，(3)式において，領域 V 内に音源が存在しないとした場合（図 3），次式を得る．

$$p(\mathbf{s}) = \iint_S \left\{G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{s})\frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial n} - p(\mathbf{r})\frac{\partial G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{s})}{\partial n}\right\}dS \tag{4}$$

(2)　レイリー積分

(4)式で表されるキルヒホッフ-ヘルムホルツ積分方程式において，境界面を無限平面とした場合，

$$p(\mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi}\iint_{z=z_1}\left\{p(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{s}|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|}\right)\right\}dS \tag{5}$$

で表される第２種レイリー積分が得られる．また，同様の手順で，右辺が $\partial p(\mathbf{r})/\partial n$ の項のみから成る第１種レイリー積分も導出可能である．

3.2 積分方程式の物理的解釈

(1)　キルヒホッフ-ヘルムホルツ積分方程式

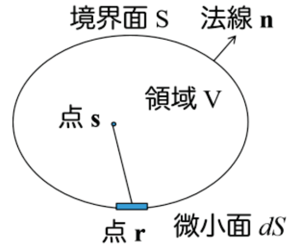

図 3　境界面 S に囲まれた領域 V

Figure 3　Volume V and boundary S

(4)式において, グリーン関数 $G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{s})$ は自由音場における単極（モノポール）音源すなわち点音源による音場を表すものであり，(4)式の右辺第１項は $\partial p(\mathbf{r})/\partial n$ の大きさを持つ点音源とみなせる．また， $\partial G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{s})/\partial n$ はダイポール（双極子）音源を表すため，右辺第２項は $-p(\mathbf{r})$ の大きさをもつダイポール音源とみなせる．したがって，KHIE は，境界面 S 上にモノポール音源とダイポール音源が分布し，それによって領域 V 内の音場 $p(\mathbf{s})$ が生じるという概念を表現している．これが，KHIE がホイヘンスの原理の数学的解釈を与えるとされる所以である．

(2)　レイリー積分

(5)式の右辺に現れる $e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{s}|}/|\mathbf{r}-\mathbf{s}|$ の z 方向の偏微分はグリーン関数から定数項を除き境界面の法線方向に偏微分したものであり， $\partial p(\mathbf{r})/\partial n$ と同様にダイポール音源とみなせる．したがって，第２種レイリー積分は，無限平面上に大きさ $p(\mathbf{r})$ のダイポール音源が分布し，それによって半無限領域内の音場 $p(\mathbf{s})$ が生じる，という概念を表現していることになる．同様に，第１種レイリー積分では，無限平面上に分布するモノポール音源を考えればよい．したがって，レイリー積分では，モノポール音源とダイポール音源のいずれかのみを考慮すればよい．

4. 積分手方式に基づいた音場再現

4.1 波面合成法（WFS）

Berkhout が提唱した波面合成法（WFS）は，(5)式で能わされる第２種レイリー積分に基づいている．すなわち，原音場において境界面である無限平面 $z = z_1$ 上の音圧を収録し，２次音場において，その音圧と同じ大きさの振幅をもつダイポール音源を壁面上に分布させて駆動することで，半無限領域内における音場が再現される．

レイリー積分ではダイポール音源を配置すべき境界面が無限平面であるため, レイリー積分に基づいた WFS でも，原理的には無限に拡がる平面スピーカアレイを用いる必要があるが，実際には不可能であり，有限の平面スピーカアレイが用いられることになる．このことは，再現される音

場の精度低下を生じさせる．また，理想的な点音源を完全吸音の壁面に設置しなければならないという Camras の提案に対する批判は WFS にも該当しており，WFS の原理的問題となっている．

4.2 境界音場制御（BoSC）

伊勢が提案した境界音場制御（BoSC）[3]は，KHIE に基づいて定式化され，また，境界面上に音源を配置するのではなく，逆システムと境界面の外側に配置されたスピーカを用いて境界面上の音圧と粒子速度を制御するという２点が最大の特徴である．(4)式で表される KHIE の右辺は，境界面 S 上にモノポール音源とダイポール音源が分布し，それによって領域 V 内の音場 $p(\mathbf{s})$が生じる，と解釈されてきた．しかし，$p(\mathbf{r})$と $\partial p(\mathbf{r})/\partial n$ を音圧と粒子速度，G と $\partial G/\partial n$ を境界面の形状により決定される係数と解釈することも可能であり，必ずしも境界面上に音源を配置する必要はなく，２次音場における境界面上の音圧と粒子速度が原音場のそれと等しくなるように制御すれば，２次音場の領域 V’内において原音場が再現されることになる．

BoSC による音場再現システムの概念図を図 4 に示す．BoSC による音場再現の手順は以下の通りである．

1) 原音場内の領域 V を囲む閉じた境界面 S 上の音圧と粒子速度を収録する．粒子速度は境界面を挟んで法線方向に並んで配置された２つのマイクロホンにより収録された音圧の差分として近似的に求める．
2) ２次音場における同様の境界面 S'上にマイクロホンを設置する．
3) ２次音場における領域V’の外部に複数のスピーカを配置し，スピーカ-マイクロホン間の伝達関数 $\mathbf{H}$ を測定する．
4) 逆システム $\mathbf{H}^{-1}$ を設計し，原音場で収録された信号と畳み込み，２次音場で再生する．

BoSC は KHIE に基づいており，閉じた境界面を扱えるため，無限平面を扱う WFS のように境界面を打ち切る必要がない．また，境界面上に直接音源を配置せずに，逆システムと境界面より外に配置されたスピーカにより境界面上の音圧と粒子速度を制御するため，理想的な点音源を用いる必要がなく，２次音場の室内壁面の音響的影響は逆システムによりキャンセル可能であるため，完全吸音の壁面を必要としない．すなわち，BoSC は従来手法である Camras の提案及び WFS が抱える原理的な課題を解決した理論であると言える．

一方で，BoSC に基づいた音場再現に必要となる逆システムの設計には，細心の注意を要する．スピーカ数を L，マイクロホン数を M とすると，伝達関数行列 $\mathbf{H}$ は $L\times M$ の複素行列となり，その逆行列 $\mathbf{H}^{-1}$ は Moore-Penrose の擬似

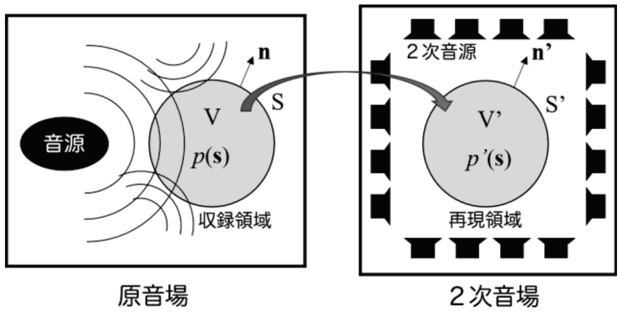

図 4 BoSC による音場再現
Figure 4 Sound field reproduction based on BoSC

逆行列 $\mathbf{H}^{+}$として求めることができる．しかし，$\mathbf{H}^{+}$の算出は悪条件問題となる場合が多く，不安定な逆システムとなってしまう．正則化等の前処理を施すことで安定した逆システムを設計することは可能であるが，逆に制御の精度が低下するという問題が生じる．安定かつ高精度な逆システムの設計法の考案が今後の課題であろう．

4.3 音場再現の課題

WFS 及び BoSC に共通の課題として，収録・再生のために非常に多くのチャンネルを必要とする点が挙げられる．境界面上の音圧あるいは粒子速度を連続的に制御することは難しいため，境界面を離散的に制御することになる．空間サンプリングを考慮すれば，離散化間隔を制御対象となる周波数の半波長として制御点を配置すればよいが，例えば，頭部を囲む半径 50 cm の球状の領域を境界面とした場合，ヒトの可聴域の上限とされる 20 kHz の音波（半波長：8.5 mm）を物理的に正確に再現するのに必要な制御点の数は数万点以上に及ぶ．現状のハードウェア技術でこのような超多チャンネルの収録・制御を行うことは難しいが，これを解決する技術の開発が期待される．

5. まとめ

ホイヘンスの原理と積分方程式に基づいた音場再現の理論について解説した．理論及び関連技術の発展により，音場再現の実現性は大いに高まりつつある．今後は音場再現システムのさらなる性能向上そして音場再現技術の応用の拡がりが期待される．

参考文献

[1] M. Camras, “Approach to Recreating a Sound Field”. J. Acoust. Soc. Am. 1967, vol. 43, p. 1425-1431.
[2] A.J. Berkhout, “Holographic approach to acoustic control,” J. Audio Eng. Soc. 1988, vol. 36, p. 977-995.
[3] 伊勢史郎, “キルヒホッフ-ヘルムホルツ積分方程式と逆システム理論に基づく音場制御の原理,” 日本音響学会誌，1997, vol. 53, p. 706-713.