情報処理学会論文誌　Vol.57　No.5　1441–1451 (May 2016)

議員定数配分問題とベータ・ダイバージェンス

一森 哲男[1,a)]

受付日 2015年8月8日, 採録日 2016年2月8日

概要：人口に比例して議席を配分する問題，すなわち，議員定数配分問題を扱う．これまで，議席を配分する方法は多数提案されてきたが，問題解決には至っていない．本論文ではベータ・ダイバージェンスを最小にする議席配分方式のクラスを新たに提案した．これを最適化問題としてとらえ，その最適性の条件を与えた．また，この配分方式のクラスの中で，最大剰余方式のみが取り分制約を満たし，Theil 方式のみが Alabama パラドックスを避けることを明らかにした．

キーワード：議員定数配分問題，ベータ・ダイバージェンス，カルバック・ライブラー情報量

Apportionment and the Beta Divergence

Tetsuo Ichimori[1,a)]

Received: August 8, 2015, Accepted: February 8, 2016

Abstract: This paper treats the apportionment problem where seats in a legislature are proportionally allocated based on the population of electoral districts. Until now a great number of allocation methods have been proposed. However, we have not yet obtained a method to attain proportional allocation. We propose a new class of allocation methods which minimize beta-divergences. In addition, we obtain some porperties: Hamilton's is the unique method in the class which stays within the quota and Theil's is the unique in the class which avoids the Alabama paradox.

Keywords: apportionment, beta divergence, Kullback-Leibler divergence

1. はじめに

人口や得票に比例して議席を配分する問題を議員定数配分問題という．人口に比例して議席を配分するという規定は，たとえば，アメリカ合衆国憲法第 1 条に明記されているが，このような規定はどこの国にもある普遍的なものである．実のところ，議員定数配分問題は，わが国では「1 票の格差」の問題としてよく知られている．ヨーロッパの多くの国々で使われている比例代表制においても，得票に比例して政党間で議席を配分しており，同じ議員定数配分問題が生じている．この問題は政治家や数学者により議論されてきたが，200 年以上にわたる未解決問題である．

最近，情報理論の観点から議員定数配分問題が議論され成果をあげつつある．例をあげると，議席配分方式の 1 クラスである「緩和除数方式」による議席の配分がアルファ・ダイバージェンスの最小化により得られる．いい換えれば，ある実数値パラメータを持つ緩和除数方式は，同じ値のパラメータを持つアルファ・ダイバージェンスに 1 対 1 に対応する．次章で述べるが，緩和除数方式はさまざまな好ましい性質を持つことが判明しつつある．そのような意味で，アルファ・ダイバージェンスは多くのダイバージェンスの中で好ましい性質を持つといえる．

緩和除数方式とアルファ・ダイバージェンスを同一視できることは，興味深いが，問題そのものが解決したわけではない．緩和除数方式は 1 つのパラメータを含むため，配分方式を特定するためにはその値を決定しなければならない．実際，そのパラメータ値を決定するいくつかの方法が提案されているものの，問題解決には至っていない [16], [18], [19]．これらのことを考慮に入れると，議員定数配分問題を解決するための新たなアプローチとして，ア

1　大阪工業大学
Osaka Institute of Technology, Hirakata, Osaka 573–0196, Japan
a)　ichimori@is.oit.ac.jp

ルファ・ダイバージェンスと同じ母関数を持つベータ・ダイバージェンスの最小化を考えてみる価値は十分にありそうである．本論文では，その結果，どのような配分方式が生まれるのか，また，それらはどのような性質を有するのかを議論する．

本論文の構成は以下のとおりである．2 章ではいくつかの議席配分方式を紹介し，3 章では，アルファおよびベータ・ダイバージェンスを最小にする議席配分問題を説明する．4 章では，このような議席配分問題を，より一般的な最適化問題の形で表現し，その最適性の条件を与える．この結果に基づき，5 章では，ベータ・ダイバージェンスに特化した議論を行う．6 章と 7 章では，ベータ・ダイバージェンスを最小にする議席配分を対象に，「取り分制約」と「Alabama パラドックス」についてそれぞれ議論する．最後の 8 章でまとめを与える．

2. 議席の配分方式

この章では，最初に，議席配分方式である，最大剰余方式と除数方式について説明する．次に，緩和除数方式の定義を与え，この方式に対して明らかになった事柄を紹介する．

文献 [2] によれば，現在，最大剰余方式（別名 Hamilton 方式）と除数方式が最も広く議席配分に使われている．ただし，除数方式とは 1 つの配分方式ではなく，無限の配分方式を含む配分方式のクラスである．実際，わが国では，議席を地域に配分するときは最大剰余方式が戦前から使用されており，政党に議席を配分するときは D'Hondt 方式が使われている．本論文では D'Hondt 方式を Jefferson 方式と呼ぶが，これは除数方式である．

議員定数配分問題を記述するため，便宜的に，アメリカの下院議員の配分を考える．最初に，いくつかの記号を定義する．$s \geq 2$ を州の数，$S = \{1, \ldots, s\}$ を州の集合，$h \geq 1$ を議員定数（議席総数）とする．各 $i \in S$ に対して，$p_i \geq 1$ を州 i の人口，$q_i > 0$ を州 i の「取り分」とする．これは州 i の受け取るべき議席の理想値（実数値）$q_i = hp_i/\pi > 0$ のことで，$\pi = \sum_{i \in S} p_i$ は総人口である．$Q = (q_1, \ldots, q_s)$ を取り分の分布という．当然，Q に関して，$\sum_{i \in S} q_i = h$ が成り立つ．また，州 $i \in S$ に配分される議席数を a_i とすると，$A = (a_1 \ldots, a_s)$ は配分と呼ばれ，$\sum_{i \in S} a_i = h$ が成り立つ．$\lfloor x \rfloor$ を床関数，$\lceil x \rceil$ を天井関数とし，記号 $\mathbb{R}$ を実数の集合，$\mathbb{Z}_0$ を非負の整数の集合，$\mathbb{Z}_+$ を正の整数の集合とする．このとき，取り分 q_i と配分方式の与える議席数 a_i との間の不等式

$$\lfloor q_i \rfloor \leq a_i \leq \lceil q_i \rceil \qquad \forall i \in S$$

を取り分制約といい，この制約をつねに満たすとき，配分方式は取り分制約を満たすという．また，議員定数を 1 増加し，$h+1$ 議席を配分し直したときの配分を $(a'_1, \ldots, a'_s)$ としたとき，

$$a'_i < a_i \qquad \exists i \in S$$

となれば，この現象を Alabama パラドックスと呼ぶ．

最初に，最大剰余方式を説明する．(i) 各州に取り分の整数部の数値に等しい議席を配分する．(ii) 残余の議席は取り分の小数部の大きな州から順次 1 議席を追加する．最大剰余方式は取り分制約を満たすが，Alabama パラドックスを許す．

次に，除数方式を説明する．丸め関数と呼ばれる関数 $d(k)$（$k \in \mathbb{Z}_0$）を考える．これは k に関して狭義増加で，$k \leq d(k) \leq k+1$ を満たし，これを以下のように利用する配分方式を除数方式という．正の実数 x を丸め関数 $d(k)$ を用いて整数に丸めるために，丸め記号 $[x]_d$ を定義する．これは，$d(k-1) < x < d(k)$ となる $k \in \mathbb{Z}_0$ が存在するとき $[x]_d = k$ とし，$x = d(k)$ となる $k \in \mathbb{Z}_0$ が存在するとき $[x]_d = k$ または $[x]_d = k+1$ と自由度を持たせる．便宜的に，$d(-1) = 0$ とする．このとき，$d(0) = 0$ となる丸め関数を持つ除数方式に対しては，議員定数が州の数以上，つまり，$h \geq s$ という仮定を追加すると，任意の除数方式に対して $\sum_{i \in S} [p_i/\lambda]_d = h$ を満たす除数 $\lambda = \lambda_d > 0$ が存在し，$a_i = [p_i/\lambda_d]_d$ とする配分 $A = (a_1, \ldots, a_s)$ が定まる．除数方式は取り分制約を満たさないが，Alabama パラドックスは許さない．

3 つ目の配分方式として，緩和除数方式を説明する．パラメータ $\theta \in \mathbb{R}$ に対して，関数 $d_\theta(k)$ $(k \in \mathbb{Z}_0)$ を以下のように定義する．$k \in \mathbb{Z}_+$ のとき，

$$d_\theta(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{e} \dfrac{(k+1)^{k+1}}{k^k}, & \theta = 1 \\ \dfrac{1}{\log \frac{k+1}{k}}, & \theta = 0 \\ \left(\dfrac{(k+1)^\theta - k^\theta}{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta - 1}}, & \theta \neq 1, 0 \end{cases} \tag{1}$$

とする．この関数 $d_\theta(k)$ は正の整数 k と $k+1$ のパラメータ θ の Stolarsky 平均[*1]といわれ，θ に関して連続かつ狭義増加で，$k < d_\theta(k) < k+1$ が成り立ち，$\theta \to -\infty$ のとき $d_\theta(k) \to k$，および，$\theta \to +\infty$ のとき $d_\theta(k) \to k+1$ となる [24]．さらに，$k = 0$ のとき，

$$d_\theta(0) = \begin{cases} e^{-1} \approx 0.37, & \theta = 1 \\ 0, & \theta \leq 0 \\ \left(\dfrac{1}{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta - 1}}, & \text{上記以外} \end{cases} \tag{2}$$

とする．このとき，$d_\theta(0)$ は $\theta > 0$ に関して連続かつ狭義増加で，$0 < d_\theta(0) < 1$（$\theta > 0$）が成り立ち，$\theta \to +\infty$ のとき $d_\theta(0) \to 1$ となることが確認できる．**図 1** に関数 $d_\theta(1)$ のグラフを $-20 \leq \theta \leq 20$ の範囲で描き，**図 2** に関

*1　$\theta = 1$ のときは identric 平均（式 (1) の右辺の 1 番目），$\theta = 0$ のときは対数平均（式 (1) の右辺の 2 番目）と呼ばれる．

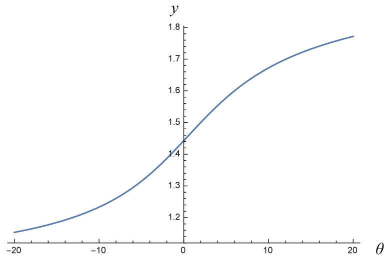

図 1　$y = d_\theta(1)$ のグラフ
Fig. 1　Graph of the function $y = d_\theta(1)$.

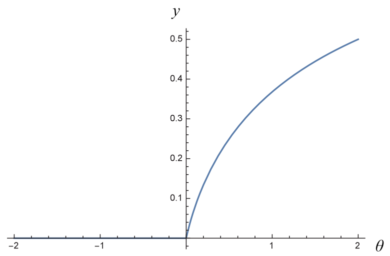

図 2　$y = d_\theta(0)$ のグラフ
Fig. 2　Graph of the function $y = d_\theta(0)$.

数 $d_\theta(0)$ のグラフを $-2 \le \theta \le 2$ の範囲で与える．この関数 $d_\theta(k)$ を丸め関数とする配分方式を緩和除数方式という [10], [23]．名前から受ける印象とは逆に，この配分方式は除数方式の特別な場合である．

最後に，緩和除数方式に対して，これまでに得られた結果を紹介する．除数方式と異なり，緩和除数方式の丸め関数は明示的な式で表現されているため（式 (1)，(2) 参照），さまざまな解析が容易である．たとえば，緩和除数方式の取り分制約の充足度 [7] や州の配分議席数と取り分との接近度 [9]，あるいは，緩和除数方式の偏りの大きさ [16], [19] などが容易に求まる．

アメリカでは 100 年以上にわたって，Hill 方式と Webster 方式の優劣が論じられてきたが，どちらの方式も緩和除数方式であり，両者が対称な位置関係にあることを明らかにした．その対称性から，両者の優劣の判定が困難であることを説明した [8]，また，ダイバージェンス間の支配関係から，両者の優劣がつかない理由を与えた [17]．

文献 [11] では，Rényi のエントロピーの最大化と緩和除数方式の対応を論じた．緩和除数方式による配分は，すべての人の 1 人あたり議席数の値 a_i/p_i のエントロピーを最大化することにより，この値を一致させようとする．また，パラメータ θ を変化させても，一定の区間，配分が変化しないという安定した性質を持つ [12]．

文献 [13] では，すべての除数方式が，ある特定の形の離散最適化問題として定式化できることを明らかにし，離散制約を線形緩和した問題の最適解が取り分に等しくなるとき，その除数方式が緩和除数方式に一致することを明らかにした．また，そのような性質を持つ除数方式が緩和除数方式に限ることを示した．州に配分する議席数を正の実数に緩和したとき，その値が取り分になるということは，議席数が人口に比例することを意味する．

文献 [14] ではダイバージェンスと配分方式の関係を明らかにした．1 章で述べたように，緩和除数方式がアルファ・ダイバージェンスに対応することを示し，取り分の分布 Q と議席の配分 A との差異について詳しく議論した．また，そのことから，両者の差異を最小にするために必要な議席数というものを考え，新たに提案した基準の下では Webster 方式が最善の配分方式であると結論づけた [18]．

除数方式は比例方式と非比例方式に分けられる．たとえば，500 議席を配分したとき，すべての州に配分される議席数が偶数ならば，250 議席を同一方式で配分したときの各州に配分される議席数が以前の半分となっているならば，その除数方式は比例方式といわれる．非比例方式となる除数方式は明らかに不合理であるとして受け入れられないが（詳細は文献 [2] 参照），緩和除数方式は比例方式となる [15]．

3.　ダイバージェンス最小化議席配分問題

ここでは，Chernoff のアルファ・ダイバージェンス [4]，および，Basu らのベータ・ダイバージェンス [1] を最小にする議席配分問題について説明する．

関数 $\psi_\theta(x)$（$x \ge 0$）を定義する．$x > 0$ に対して，

$$\psi_\theta(x) = \begin{cases} x \log x - (x-1), & \theta = 1 \\ -\log x + (x-1), & \theta = 0 \\ \dfrac{x^\theta - 1}{\theta(\theta-1)} - \dfrac{x-1}{\theta-1}, & \theta \ne 1, 0 \end{cases} \tag{3}$$

とし，$x = 0$ に対して，$\psi_\theta(0) = \lim_{x \to +0} \psi_\theta(x)$，すなわち，

$$\psi_\theta(0) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}, & \theta > 0 \\ +\infty, & \theta \le 0 \end{cases} \tag{4}$$

とする．式 (3) を母関数とする A から Q のアルファ・ダイバージェンスは

$$D_\alpha(A||Q) = \sum_{i \in S} q_i \psi_\theta\left(\frac{a_i}{q_i}\right) \tag{5}$$

と定義され [5]，緩和除数方式による配分は最適化問題 $\mathbf{P}_\alpha$：

$$\min D_\alpha(A||Q) \text{ s.t. (i) } a_i \in \mathbb{Z}_0 (i \in S), \text{(ii) } \sum_{i \in S} a_i = h$$

の最適解 $A = (a_1, \ldots, a_s)$ として定まる [14]．記号 s.t. は制約を意味する．

パラメータ θ の特定の値に対する緩和除数方式およびアルファ・ダイバージェンスは，特別な名前で呼ばれている（**表 1** 参照）．Hill 方式は文献 [2], [6]，TS 方式は [7], [25]，Theil 方式は [7], [26]，Webster 方式は [2], [27] で説明されている．また，KL ダイバージェンス（Kullback-Leibler ダ

表 1　配分方式とアルファ・ダイバージェンスの対応
Table 1　Correspondence between methods and divergences.

θ	配分方式	アルファ・ダイバージェンス
-1	Hill 方式	Neymann のカイ二乗ダイバージェンス
0	TS 方式	逆 KL ダイバージェンス
1	Theil 方式	KL ダイバージェンス
2	Webster 方式	Pearson のカイ二乗ダイバージェンス

イバージェンス）は [21]，Pearson のカイ二乗ダイバージェンスは [22]，その他のダイバージェンスは文献 [5] に述べられている．

式 (3) を母関数とする A から Q のベータ・ダイバージェンスは

$$D_\beta(A||Q) = \sum_{i\in S}(\psi_\theta(a_i) - \psi_\theta(q_i) - (a_i - q_i)\psi'_\theta(q_i)) \tag{6}$$

と定義される [5]．$\psi'_\theta(x)$ は $\psi_\theta(x)$ の導関数で，

$$\psi'_\theta(x) = \begin{cases} \log x, & \theta = 1 \\ \dfrac{x^{\theta-1}-1}{\theta-1}, & \theta \neq 1 \end{cases} \tag{7}$$

である．a_i と θ の値に応じて，$D_\beta(A||Q)$ の第 i 項，すなわち，$\psi_\theta(a_i)-\psi_\theta(q_i)-(a_i-q_i)\psi'_\theta(q_i)$ を具体的に表現すると，以下のようになる．最初に $a_i > 0$ と仮定する．式 (3) を用いると，$\theta = 1$ ならば $a_i\log a_i - q_i\log q_i - (a_i-q_i)(\log q_i+1)$，$\theta = 0$ ならば $-\log a_i + \log q_i - (a_i-q_i)/q_i$，$\theta \neq 1, 0$ ならば $(a_i^\theta - q_i^\theta)/(\theta(\theta-1)) - (a_i-q_i)q_i^{\theta-1}/(\theta-1)$ となる．次に，$a_i = 0$ と仮定する．式 (3) および式 (4) を用いると，第 i 項：$\psi_\theta(0) - \psi_\theta(q_i) + q_i\psi'_\theta(q_i)$ は $\theta > 0$ ならば q_i^θ/θ となり，$\theta \leq 0$ ならば $+\infty$ となる．これらの結果より，式 (3) と式 (4) で定義された関数 $\psi_\theta(x)$ を用いると，

$$D_\beta(A||Q) = \sum_{i\in S} q_i^\theta \psi_\theta\left(\frac{a_i}{q_i}\right) \tag{8}$$

と書くことができる．

次に，ベータ・ダイバージェンス $D_\beta(A||Q)$ を最小にする議員定数 h の配分問題 $\mathbf{P}_\beta$：

$$\min D_\beta(A||Q) \text{ s.t. (i) } a_i \in \mathbb{Z}_0 (i \in S), \text{(ii) } \sum_{i\in S} a_i = h$$

を考える．配分がこの最適解 $A = (a_1, \ldots, a_s)$ として定まる配分方式をベータ方式と呼ぶ*2．

補題 1　パラメータ $\theta \leq 0$ の緩和除数方式（または，ベータ方式）による配分 $A = (a_1, \ldots, a_s)$ では，$a_i \geq 1$ ($\forall i \in S$) となる．

証明　$\theta \leq 0$ のとき，議員定数は $h \geq s$ と仮定していることに注意する．また，式 (4) より，$\theta \leq 0$ のとき，$\psi_\theta(0) = +\infty$ なので，どちらの配分問題 $\mathbf{P}_\alpha$，$\mathbf{P}_\beta$ でも各州に少なくとも 1 議席が配分され，$a_i \geq 1$（$\forall i \in S$）となる．□

*2　この命名の仕方からすれば，緩和除数方式はアルファ方式と呼ぶべきだったかもしれない．

表 2　配分方式とベータ・ダイバージェンスの対応
Table 2　Correspondence between methods and divergences.

θ	配分方式	ベータ・ダイバージェンス
1	Theil 方式	KL ダイバージェンス
2	最大剰余方式	ℓ_2 ノルム，平方 Euclid 距離

パラメータ θ の特定の値に対する緩和除数方式とベータ・ダイバージェンスは，特別な名前で呼ばれている（**表 2** 参照）．$\theta = 1$ のとき，式 (5) と式 (8) が一致することから，$\theta = 1$ のベータ方式は Theil 方式に等しい．また，$\theta = 2$ のとき，式 (8) と式 (3) より，

$$D_\beta(A||Q) = \sum_{i\in S}\frac{(a_i - q_i)^2}{2}$$

が導かれる．これは A から Q の ℓ_2 ノルム（平方 Euclid 距離）の半分を表している．最大剰余方式は任意の ℓ_p ノルム（実数 $p \geq 1$）を最小にする配分を与えることが知られているので [3]，$\theta = 2$ のベータ方式は最大剰余方式に等しい．

4.　一般化議席配分問題

ここでは，アルファおよびベータ・ダイバージェンスを最小にする議席配分問題を一般化した形で議論し，最適性の条件を導く．いま，s 個の狭義の凸関数 $f_i(x)$（$x \geq 0,\ i \in S$）を考える．この関数は，(I) $f_i(0) = +\infty$（$\forall i \in S$）または (II) $f_i(0) < +\infty$（$\forall i \in S$）のどちらかであると仮定する*3．これらの総和を目的関数とする，一般化された議席配分問題 $\mathbf{P}$：

$$\min \sum_{i\in S} f_i(a_i) \text{ s.t. (i) } a_i \in \mathbb{Z}_0 (i \in S), \text{(ii) } \sum_{i\in S} a_i = h$$

を考える．次に，$f_i(a_i)$ の差分：

$$g_i(a_i) = f_i(a_i + 1) - f_i(a_i), \quad a_i \in \mathbb{Z}_0 \tag{9}$$

を定義する．上記 (I) の場合，$g_i(0) = -\infty$（$\forall i \in S$）となり，(II) の場合，$g_i(0) > -\infty$（$\forall i \in S$）となるが，追加で，$g_i(-1) = -\infty$（$\forall i \in S$）と約束する．

定理 1　配分 $A = (a_1, \ldots, a_s)$ が問題 $\mathbf{P}$ の最適解となるための必要十分条件は

$$\max_{i\in S} g_i(a_i - 1) \leq \min_{j\in S} g_j(a_j) \tag{10}$$

である．ここで，等号が成り立つのは配分 A が唯一の最適解でないときに限る．

証明　（必要性）問題 $\mathbf{P}$ の最適解 a_i（$i \in S$）を考え

*3　問題 $\mathbf{P}_\alpha$ と $\mathbf{P}_\beta$ のそれぞれの目的関数 (5) と (8) は，どちらも，この仮定を満たしている．すなわち，$\theta \leq 0$ のとき仮定 (I) が成り立ち，$\theta > 0$ のとき仮定 (II) が成り立つ．

る．州のペア $k, \ell \in S$ に対し，a_k と a_ℓ が狭義の不等式：

$$g_k(a_k-1) > g_\ell(a_\ell) \qquad (11)$$

を満たすと仮定する．もし，$g_k(a_k-1) = -\infty$ ならば $g_\ell(a_\ell) < -\infty$ という関係を意味するが，これは実現不可能である．よって，上記 (I) の場合：$a_k = 1$ ならば $g_k(a_k-1) = -\infty$ なので $a_k \geq 2$，(II) の場合：$a_k = 0$ ならば $g_k(a_k-1) = -\infty$ なので，$a_k \geq 1$ となる．いま，新しい配分 $a'_k = a_k-1$, $a'_\ell = a_\ell+1$, $a'_i = a_i$ $(i \in S\backslash\{k,\ell\})$ を考える．差分の定義式 (9) より，$g_k(a_k-1) = f_k(a_k)-f_k(a_k-1)$ および $g_\ell(a_\ell) = f_\ell(a_\ell+1) - f_\ell(a_\ell)$ となることから，$f_k(a'_k) = f_k(a_k-1) = f_k(a_k) - g_k(a_k-1)$ および $f_\ell(a'_\ell) = f_\ell(a_\ell+1) = g_\ell(a_\ell) + f_\ell(a_\ell)$ が得られる．両者の和を求めると，

$$f_k(a'_k) + f_\ell(a'_\ell) = f_k(a_k) + f_\ell(a_\ell) + g_\ell(a_\ell) - g_k(a_k-1)$$

となる．狭義の不等式 (11) を仮定していたので，

$$f_k(a'_k) + f_\ell(a'_\ell) < f_k(a_k) + f_\ell(a_\ell)$$

が導かれる．このことから，狭義の不等式：

$$\sum_{i\in S} f_i(a'_i) < \sum_{i\in S} f_i(a_i)$$

が導かれるが，この不等式は a_i（$i \in S$）の最適性，すなわち，$\sum_{i\in S} f_i(a_i)$ の値が最小であることに矛盾する．よって，冒頭の仮定，すなわち，不等式 (11) が否定され，任意の 2 州 i，j に対して，$g_i(a_i-1) \leq g_j(a_j)$ となる．

（十分性）最初に，$f_i(a_i)$ は狭義凸と仮定しているので，式 (9) の差分 $g_i(a_i)$ は狭義増加関数となることに注意する．いま，配分 $A = (a_1, \ldots, a_s)$ が不等式 (10) を満たすと仮定し，次に，問題 $\mathbf{P}$ の最適解 b_i（$i \in S$）を考える．もし，$\sum_{i\in S} f_i(a_i) = \sum_{i\in S} f_i(b_i)$ ならば，a_i（$i \in S$）も最適解となり証明が終わる．よって，以下では，狭義の関係

$$\sum_{i\in S} f_i(a_i) > \sum_{i\in S} f_i(b_i) \qquad (12)$$

を仮定する．S の部分集合

$$L = \{i \mid b_i < a_i\}, \quad G = \{j \mid b_j > a_j\}$$

を定義する．このとき，任意の $i \in L$ と $j \in G$，および，任意の $1 \leq k_i \leq a_i - b_i$ と $0 \leq \ell_j \leq b_j - a_j - 1$ に対して，不等式 (10) および $g_i(a_i)$ の増加性より，

$$g_i(a_i-k_i) \leq g_j(a_j+\ell_j) \qquad (13)$$

が成り立つ．$\sum_{k\in S} a_k = \sum_{k\in S} b_k = h$ であることから，$\sum_{i\in L}(a_i - b_i) = \sum_{j\in G}(b_j - a_j)$ が導かれるが，この等式を書き直すと，

$$\sum_{i\in L}\sum_{k_i=1}^{a_i-b_i} 1 = \sum_{j\in G}\sum_{\ell_j=0}^{b_j-a_j-1} 1 \qquad (14)$$

が導かれる．これらの関係式 (13) および (14) から，

$$\sum_{i\in L}\sum_{k_i=1}^{a_i-b_i} g_i(a_i-k_i) \leq \sum_{j\in G}\sum_{\ell_j=0}^{b_j-a_j-1} g_j(a_j+\ell_j) \qquad (15)$$

が得られる．

さらに，以下の関係が得られる：

$$\begin{aligned}&\sum_{k\in S}(f_k(b_k) - f_k(a_k))\\ &= \sum_{i\in L}(f_i(b_i) - f_i(a_i)) + \sum_{j\in G}(f_j(b_j) - f_j(a_j))\\ &= -\sum_{i\in L}(f_i(a_i) - f_i(b_i)) + \sum_{j\in G}(f_j(b_j) - f_j(a_j))\end{aligned}$$

ここで，$f_i(a_i) - f_i(b_i) = \sum_{k_i=1}^{a_i-b_i} g_i(a_i-k_i)$ および $f_j(b_j) - f_j(a_j) = \sum_{\ell_j=0}^{b_j-a_j-1} g_j(a_j+\ell_j)$ に注意すると

$$= -\sum_{i\in L}\sum_{k_i=1}^{a_i-b_i} g_i(a_i-k_i) + \sum_{j\in G}\sum_{\ell_j=0}^{b_j-a_j-1} g_j(a_j+\ell_j)$$

となる．ここで，不等式 (15) を用いると，$\sum_{k\in S}(f_k(b_k) - f_k(a_k)) \geq 0$，すなわち，$\sum_{k\in S} f_k(b_k) \geq \sum_{k\in S} f_k(a_k)$ となり，式 (12) が成り立つと仮定したことに矛盾する．よって，a_i（$i \in S$）は問題 $\mathbf{P}$ の最適解となる． □

5. ベータ方式

ここでは，前章の定理 1 の内容をベータ・ダイバージェンス最小化の配分問題 $\mathbf{P}_\beta$ の場合に焼き直す．表記を簡単にするため，$\log 0 = -\infty$，$0^{-\theta} = +\infty$ $(\theta > 0)$，$0 \log 0 = 0$，$0^0 = 1$ と約束する．また，記号 $d_\theta^{\theta-1}(k)$ は $(d_\theta(k))^{\theta-1}$ を意味する．

定理 2 配分 $A = (a_1, \ldots, a_s)$ が問題 $\mathbf{P}_\beta$ の最適解となるための必要十分条件は $\theta = 1$ のとき，

$$\max_{i\in S} \frac{d_1(a_i-1)}{q_i} \leq \min_{j\in S} \frac{d_1(a_j)}{q_j} \qquad (16)$$

であり，$\theta \neq 1$ のとき，

$$\max_{i\in S} \frac{d_\theta^{\theta-1}(a_i-1) - q_i^{\theta-1}}{\theta-1} \leq \min_{j\in S} \frac{d_\theta^{\theta-1}(a_j) - q_j^{\theta-1}}{\theta-1} \qquad (17)$$

である．ここで，等号が成り立つのは配分 A が唯一の最適解でないときに限る．

証明 最初に，

$$f_i(x) = \psi_\theta(x) - \psi_\theta(q_i) - (x-q_i)\psi'_\theta(q_i)$$

とおくと，$f''_i(x) = \psi''_\theta(x) > 0$，つまり，$f_i(x)$ は狭義凸で

あり，問題 $\mathbf{P}$ の目的関数に関する条件を満たしていることに注意する．$f_i(a_i) = \psi_\theta(a_i) - \psi_\theta(q_i) - (a_i - q_i)\psi'_\theta(q_i)$ なので，差分は

$$\begin{aligned} g_i(a_i) &= f_i(a_i+1) - f_i(a_i) \\ &= \psi_\theta(a_i+1) - \psi_\theta(a_i) - \psi'_\theta(q_i) \end{aligned}$$

と変形できる．$\theta = 1$ のとき，

$$\begin{aligned} g_i(a_i) = &\{(a_i+1)\log(a_i+1) - a_i\} \\ &- \{a_i \log a_i - (a_i - 1)\} - \log q_i \end{aligned}$$

ここで，$1 = \log e$ と変形すると

$$\begin{aligned} &= (a_i+1)\log(a_i+1) - a_i \log a_i - \log e - \log q_i \\ &= \log\left(\frac{(a_i+1)^{a_i+1}}{e\, a_i^{a_i}} \Big/ q_i\right) \end{aligned}$$

となる．ここで，対数の中に a_i と a_i+1 の identric 平均（脚注 *1 参照）が含まれていることに注意すると

$$g_i(a_i) = \log\frac{d_1(a_i)}{q_i} \tag{18}$$

が得られる．さらに，$\theta \neq 1, 0$ のとき，

$$\begin{aligned} g_i(a_i) &= \left\{\frac{(a_i+1)^\theta - 1}{\theta(\theta-1)} - \frac{a_i}{\theta-1}\right\} \\ &\quad - \left\{\frac{a_i^\theta - 1}{\theta(\theta-1)} - \frac{a_i - 1}{\theta-1}\right\} - \frac{q_i^{\theta-1} - 1}{\theta-1} \\ &= \frac{(a_i+1)^\theta - a_i^\theta}{\theta(\theta-1)} - \frac{q_i^{\theta-1}}{\theta-1} \end{aligned}$$

となる．ここで，右辺第 1 項に Stolarsky 平均の $\theta-1$ 乗が含まれていることに注意すると

$$g_i(a_i) = \frac{d_\theta^{\theta-1}(a_i) - q_i^{\theta-1}}{\theta-1} \tag{19}$$

が導かれる．容易に確認できるが，この等式 (19) は $\theta = 0$ の場合にも成り立つ．

したがって，定理 1 の式 (10) に上記の式 (18) を代入し，対数変換で大小関係は変わらないことに注意すると，本定理の式 (16) が得られる．同様に，式 (10) に上記の式 (19) を代入すれば，本定理の式 (17) が得られる． □

最後に，ベータ方式による配分に関して，簡単ではあるが重要な性質を与えて，この章を終える．

定理 3 (i) ベータ方式による配分では逆転現象が起こらない，つまり，$q_i > q_j$ ならば $a_i \geq a_j$ となる．また，(ii) 人口が等しければ，配分議席数はたかだか 1 しか異ならない．つまり，$q_i = q_j$ ならば $|a_i - a_j| \leq 1$ となる．

証明 (i) の証明：簡単のため，$\theta > 1$，$q_i > q_j$ かつ $a_j = a_i + 1$ と仮定する．$\theta - 1 > 0$ に注意して，定理 2 の最適性の条件式 (17) を参考にすると，

$$d_\theta^{\theta-1}(a_j - 1) - q_j^{\theta-1} \leq d_\theta^{\theta-1}(a_i) - q_i^{\theta-1} \tag{20}$$

が成り立つ．この式 (20) に，$a_j = a_i + 1$ を代入すると，$d_\theta^{\theta-1}(a_i) - q_j^{\theta-1} \leq d_\theta^{\theta-1}(a_i) - q_i^{\theta-1}$，つまり，$q_j^{\theta-1} \geq q_i^{\theta-1}$ となるが，$\theta > 1$ なので，これは $q_j > q_i$ を意味し，仮定：$q_i > q_j$ に矛盾する．他の場合も同様にして証明することができる．(ii) の証明：簡単のため，$\theta > 1$，$q_i = q_j$ かつ $a_j = a_i + 2$ と仮定する．これらを上記の最適性の条件式 (20) に代入すると，$d_\theta^{\theta-1}(a_i+1) - q_i^{\theta-1} \leq d_\theta^{\theta-1}(a_i) - q_i^{\theta-1}$，つまり，$d_\theta^{\theta-1}(a_i+1) \leq d_\theta^{\theta-1}(a_i)$ が得られるが，$\theta > 1$ なので，これは $d_\theta(a_i+1) \leq d_\theta(a_i)$ を意味し，関数 $d_\theta(k)$ の狭義増加性：$d_\theta(a_i) < d_\theta(a_i+1)$ に矛盾する．他の場合も同様にして証明することができる． □

6. 取り分制約

アメリカでは 1790 年に 1 回目の国勢調査が行われ，Jefferson 方式により議席が配分された．当初，この方式で人口比例配分が実現すると思われていたが，次第に，この方式は人口の多い州に有利な議席配分を与えることが明らかになった．実際，1820 年度の国勢調査では，人口が最大の New York 州の取り分は 32.5，つまり，New York 州に配分されるべき理想の議席数は 32.5 議席であったものの，Jefferson 方式は同州に 34 議席を配分した．一方，人口の少ない Delaware 州の取り分は 1.69 議席であったにもかかわらず，同州には 1 議席しか配分されなかった．New York 州の 1 議席を Delaware 州に移動させれば，どちらの州も，配分議席数が取り分，つまり，理想値に近づくはずである．同様の現象が，1830 年度の国勢調査結果に対しても発生した．このことから，州に配分される議席数と州の取り分は 1 議席を超えるべきではない，つまり，配分方式は取り分制約を満たすべきと考えられるようになった．この章では，ベータ方式はパラメータが $\theta = 2$ の場合のみ，つまり，最大剰余方式のみが取り分制約を満たすことを明らかにする．

補題 2 $x > 0$ に対して，関数

$$f(x) = 2^{x-1} - \frac{2^x - 1}{x} - \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

を定義すると，$0 < x < 1$ のとき $f(x) > 0$，$1 < x < 2$ のとき $f(x) < 0$，$x > 2$ のとき $f(x) > 0$，$x = 1$ と $x = 2$ のとき $f(x) = 0$ となる．

証明

$$2^{x-1} - \frac{2^x - 1}{x} - \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 2^{x-1} - 1 - \frac{2}{x}(2^{x-1} - 1)$$

なので，$f(x) = (x-2)(2^{x-1}-1)/x$ と書ける．$y = 2^{x-1} - 1$ は点 $(1, 0)$ を通る狭義増加関数なので，容易に本補題の結論が導かれる． □

関数 $y = (x-2)(2^{x-1}-1)/x$ のグラフを $0 < x \leq 3$ の範囲で描くと**図 3** が得られる．

定理 4 パラメータ $\theta < 2$ のベータ方式は取り分制約を

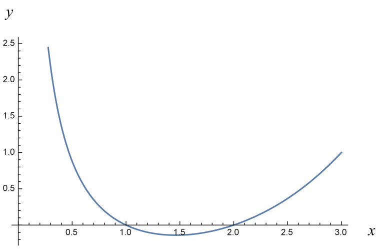

図 3 関数 $y=(x-2)(2^{x-1}-1)/x$ のグラフ
Fig. 3 Graph of the function $y=(x-2)(2^{x-1}-1)/x$.

満たさない．

証明 具体的に，取り分制約を満たさない数値例を作成することにより証明を行う．十分大きな正の整数 n と十分小さな正の実数 ε を考える．ここでは，表記を簡単にするため，州 $n+1$ を州 0 と表す．州の数 $s=n+1$，議員定数 $h=n+1$，各州の取り分を $q_0=2+\varepsilon$，$q_i=1-(\varepsilon+1)/n$（$1\le i\le n$）とする．当然のことながら，取り分の総和は議員定数に等しくなっている．すなわち，$q_0+\sum_{i=1}^n q_i=n+1=h$ となっている．$\theta\le 0$ の場合，補題 1 より，配分は $a_0=1$，$a_i=1$（$1\le i\le n$）となり，州 0 の取り分が 2 より大きいにもかかわらず，同州には 1 議席しか配分されず，取り分制約に違反する．

以下では，場合分けにより，$0<\theta<2$ のときも，ベータ方式による配分は $a_0=1$, $a_i=1$（$1\le i\le n$）となり，結果，州 0 が取り分制約に違反することを示す．

(i) $1<\theta<2$ の場合：変数 x を θ で置き換えて，関数 $d_\theta(1)$ の定義式 (1) および $d_\theta(0)$ の定義式 (2) を補題 2 に適用すると，$1<\theta<2$ の場合，$2^{\theta-1}-d_\theta^{\theta-1}(1)<1-d_\theta^{\theta-1}(0)$，すなわち，

$$d_\theta^{\theta-1}(0)-1<d_\theta^{\theta-1}(1)-2^{\theta-1} \tag{21}$$

が成り立つ．ここで，$n\to+\infty$ かつ $\varepsilon\to 0$ のとき，$q_0\to 2$，$q_i\to 1$ に注意すると，式 (21) が狭義の不等式であることから，十分大きな n，十分小さな ε に対し，

$$d_\theta^{\theta-1}(0)-q_i^{\theta-1}<d_\theta^{\theta-1}(1)-q_0^{\theta-1} \tag{22}$$

が成り立つ．

取り分に関して，$q_i<q_0$ であるが，関数 $y=x^{\theta-1}$（$1<\theta<2$）は x に関して狭義増加なので，$q_i<q_0$ は $q_i^{\theta-1}<q_0^{\theta-1}$ を意味する．この大小関係を不等式 (22) に適用すると，容易に

$$\begin{aligned}&d_\theta^{\theta-1}(0)-q_0^{\theta-1}<d_\theta^{\theta-1}(0)-q_i^{\theta-1}\\&\qquad<d_\theta^{\theta-1}(1)-q_0^{\theta-1}<d_\theta^{\theta-1}(1)-q_i^{\theta-1}\end{aligned} \tag{23}$$

の関係が導かれる．$\theta-1>0$ に注意して，この関係式 (23) を用いると，定理 2 の式 (17) より，$a_0=1$，$a_i=1$（$1\le i\le n$）が唯一の配分となっていることが確認できる．すなわち，

$$\max\begin{Bmatrix}d_\theta^{\theta-1}(0)-q_0^{\theta-1}\\d_\theta^{\theta-1}(0)-q_i^{\theta-1}\end{Bmatrix}<\min\begin{Bmatrix}d_\theta^{\theta-1}(1)-q_0^{\theta-1}\\d_\theta^{\theta-1}(1)-q_i^{\theta-1}\end{Bmatrix}$$

の成立が確認できる．よって，州 0 が取り分制約に違反する．

(ii) $\theta=1$ の場合：$q_0>q_i$，$d_1(0)=1/e$，$d_1(1)=4/e$ であることから，n は十分大きく，$\varepsilon>0$ は十分小さいので，

$$\frac{d_1(0)}{q_0}<\frac{d_1(0)}{q_i}<\frac{d_1(1)}{q_0}<\frac{d_1(1)}{q_i}$$

の関係が成り立つ．この関係を用いると，$a_0=1$，$a_i=1$（$1\le i\le n$）に対し，定理 2 の式 (16) の成立が確認できる．以前同様，州 0 に 1 議席が配分され，同州は取り分制約に違反する．

(iii) $0<\theta<1$ の場合：関数 $y=x^{\theta-1}$（$\theta<1$）は x に関して狭義減少であることに注意して，上記ケース (i) の議論を繰り返せば，容易に，

$$\begin{aligned}&q_0^{\theta-1}-d_\theta^{\theta-1}(0)<q_i^{\theta-1}-d_\theta^{\theta-1}(0)\\&\qquad<q_0^{\theta-1}-d_\theta^{\theta-1}(1)<q_i^{\theta-1}-d_\theta^{\theta-1}(1)\end{aligned} \tag{24}$$

が導かれる．いま，$\theta-1$ が負であることに注意して，この関係式 (24) を用いると，$a_0=1$，$a_i=1$（$1\le i\le n$）に対し，定理 2 の式 (17) の成立が確認できる．よって，州 0 に 1 議席が配分され，同州は取り分制約に違反する． □

補題 3 $x\ge 2$ に対して，関数

$$f(x)=\frac{3^x-2^x}{x}-2^{x-1}-\frac{2^x-1}{x}+1$$

を定義すると，$f(x)\ge 0$ となる．

証明 明らかに，$f(2)=0$ となる．以下で，$f'(x)>0$ を明らかにすることにより，$f(x)\ge 0$（$x\ge 2$）を示す．$f'(x)$ を計算し，$x^2f'(x)$ を求めると，

$$((\log 3)x-1)\,3^x-\left((\log 2)x^2+4(\log 2)x-4\right)2^{x-1}-1$$

が得られる．この式を $g(x)$（$x\ge 2$）とおき，つまり，$g(x)=x^2f'(x)$ とし，$g(x)>0$ を示すことにより，$f'(x)>0$ を明らかにする．$g'(x)$ を計算し，$g'(x)/x$ 求めると，

$$(\log 3)^2 3^x-2^{x-1}(\log 2)((\log 2)x+2(2\log 2+1))$$

が得られる．全体を $(\log 2)^2 2^{x-1}>0$ で除すると

$$2\left(\frac{\log 3}{\log 2}\right)^2\left(\frac{3}{2}\right)^x-\left(x+4+\frac{2}{\log 2}\right)$$

すなわち，

$$5.024\times 1.5^x-(x+6.885)$$

が得られる．これは明らかに増加関数であり，$x\ge 2$ の範囲では，$x=2$ で最小値 2.419 をとる．よって，$g'(x)>0$ となる．また，$g(2)=1.14$ なので，$g(x)>0$（$x\ge 2$）とな

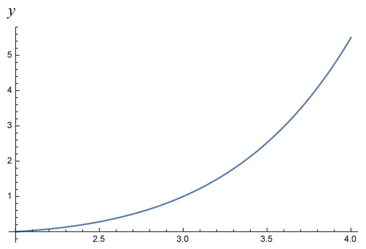

図 4　関数 $y = \frac{3^x - 2^x}{x} - 2^{x-1} - \frac{2^x - 1}{x} + 1$ のグラフ
Fig. 4　Graph of the function $y = \frac{3^x - 2^x}{x} - 2^{x-1} - \frac{2^x - 1}{x} + 1$.

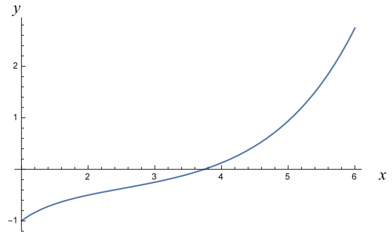

図 5　関数 $y = \frac{2^x - 2}{x} - \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}$ のグラフ
Fig. 5　Graph of the function $y = \frac{2^x - 2}{x} - \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}$.

り，$f'(x) > 0$ が得られる，よって，本補題が導かれる．□

実際に，関数 $y = (3^x - 2^x)/x - 2^{x-1} - (2^x - 1)/x + 1$ のグラフを $2 \le x \le 4$ の範囲で描くと**図 4** が得られる．

定理 5　パラメータ $\theta > 2$ のベータ方式は取り分制約を満たさない．

証明　十分大きな正の整数 n と十分小さな正の実数 ε を考える．以前同様，表記を簡単にするため，州 $n+1$ を州 0 と表す．州の数 $s = n+1$，議員定数 $h = 2n+2$，各州の取り分を $q_0 = 1 - \varepsilon$，$q_i = 2 + (\varepsilon + 1)/n$（$1 \le i \le n$）とする．この場合も，当然，取り分の総和は議員定数に等しくなっている：$q_0 + \sum_{i=1}^{n} q_i = 2n + 2 = h$．以下では，$\theta > 2$ のベータ方式による配分は $a_0 = 2$，$a_i = 2$（$1 \le i \le n$）となることを示す．結果，取り分が 1 より小さい州 0 に 2 議席が配分され，同州は取り分制約に違反する．

補題 3 より，$d_\theta^{\theta-1}(1) - 1 < d_\theta^{\theta-1}(2) - 2^{\theta-1}$ が成り立つ．n は十分大きく，$\varepsilon > 0$ は十分小さいので，この関係から

$$d_\theta^{\theta-1}(1) - q_0^{\theta-1} < d_\theta^{\theta-1}(2) - q_i^{\theta-1} \tag{25}$$

が導かれる．

一方，現在の取り分の設定では $q_0 < q_i$ であるが，$\theta > 2$ なので，$q_0^{\theta-1} < q_i^{\theta-1}$ となる．この大小関係を不等式 (25) に適用すると，容易に，

$$\begin{aligned} d_\theta^{\theta-1}(1) - q_i^{\theta-1} &< d_\theta^{\theta-1}(1) - q_0^{\theta-1} \\ &< d_\theta^{\theta-1}(2) - q_i^{\theta-1} < d_\theta^{\theta-1}(2) - q_0^{\theta-1} \end{aligned} \tag{26}$$

の関係が導かれ，$a_0 = 2$，$a_i = 2$（$1 \le i \le n$）に対し，定理 2 の式 (17) の成立が確認できる．よって，州 0 に 2 議席が配分され，同州は取り分制約に違反する．□

系 1　パラメータ値が 2 のベータ方式（つまり，最大剰余方式）以外のベータ方式は取り分制約を満たさない．

7.　Alabama パラドックス

アメリカでは 1880 年の国勢調査人口に対して，下院議員の配分を行っていると，奇妙な現象（つまり，Alabama パラドックス）が発生した．当時使われていた，議席配分方式は最大剰余方式であり，議員定数が 299 のとき Alabama 州には 8 議席が配分されたが，議員定数を 300 に増加させると，同州には 7 議席しか配分されなかった．パイが大きくなったにもかかわらず，受け取る議席が減少した．この現象はアメリカ議会に大きな打撃を与え，結局，アメリカでは Alabama パラドックスを許す配分方式は使われなくなった．この章では，ベータ方式はパラメータが $\theta = 1$ の場合のみ，つまり，Theil 方式のみが Alabama パラドックスを避けることを明らかにする．

補題 4　$x \ge 1$ に対して，関数

$$f(x) = \frac{2^x - 2}{x} - \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}$$

を定義すると，$f(x)$ は狭義増加となる．

証明　以下で，$f'(x) > 0$ を明らかにすることにより，$f(x)$ の狭義増加性を示す．$f'(x)$ を計算し，$x^2 f'(x)$ を求めると，

$$((\log 2)x - 1)\, 2^x + 2 - \left(\log \frac{3}{2}\right) x^2 \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}$$

が得られる．この式を $g(x)$（$x \ge 1$）とおき，つまり，$g(x) = x^2 f'(x)$ とし，$g(x) > 0$ を示すことにより，$f'(x) > 0$ を明らかにする．$g'(x)$ を計算し，$g'(x)/x$ 求めると，

$$(\log 2)^2 2^x - \left(\log \frac{3}{2}\right) \left(\left(\log \frac{3}{2}\right) x + 2\right) \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}$$

が得られる．全体を $(\log(3/2))^2 (3/2)^{x-1} > 0$ で除すると

$$\frac{3}{2} \left(\frac{\log 2}{\log(3/2)}\right)^2 \left(\frac{4}{3}\right)^x - \left(x + \frac{2}{\log(3/2)}\right)$$

すなわち，

$$4.38 \times (4/3)^x - (x + 1.71)$$

が得られる．これは明らかに増加関数であり，$x \ge 1$ の範囲では，$x = 1$ で最小値 3.14 をとる．よって，$g'(x) > 0$ となる．また，$g(1) = 0.98$ なので，$g(x) > 0$（$x \ge 1$）となり，$f'(x) > 0$ が得られる，よって，本補題が導かれる．□

実際に，関数 $y = (2^x - 2)/x - (3/2)^{x-1}$ のグラフを $1 \le x \le 6$ の範囲で描くと**図 5** が得られる．補題 4 で定義された関数 $f(x)$ に関して，$f(3)f(4) < 0$，あるいは，図 5 より，方程式 $f(x) = 0$ は，$x \ge 1$ の範囲では唯一の解を 3 と 4 の間に持つ．以下，この解を c^* と書く．この値は二分探索や Newton 法を用いれば，容易に求まり，$c^* \approx 3.74$

が得られる．

定理 6 パラメータ $\theta > 1$ のベータ方式は Alabama パラドックスを許す．

証明 具体的に，Alabama パラドックスを許す数値例を作成することにより証明を行う．州の数を $s = 3$，議員定数を $h = 3$，取り分を $q_1 = q_2 = q$，$q_3 = 3 - 2q$（$1 < q < 3/2$）とすると，$q_1 = q_2 > q_3$ となる．当然，$q_1 + q_2 + q_3 = 3 = h$ が成り立っている．$\theta > 1$ とき，$(1, 1, 1)$ がベータ方式による唯一の配分となるための必要十分条件は，$i \in \{1, 2\}$ として，$\theta - 1 > 0$ に注意すると，定理 2 の式 (17) より，

$$\max\begin{Bmatrix} d_\theta^{\theta-1}(0) - q_i^{\theta-1} \\ d_\theta^{\theta-1}(0) - q_3^{\theta-1} \end{Bmatrix} < \min\begin{Bmatrix} d_\theta^{\theta-1}(1) - q_i^{\theta-1} \\ d_\theta^{\theta-1}(1) - q_3^{\theta-1} \end{Bmatrix}$$

と書ける．この不等式において，$q_i > q_3$ と $\theta - 1 > 0$ が $q_i^{\theta-1} > q_3^{\theta-1}$ を意味することに注意すると，$(1, 1, 1)$ がベータ方式による唯一の配分となるための必要十分条件は，$d_\theta^{\theta-1}(0) - q_3^{\theta-1} < d_\theta^{\theta-1}(1) - q_i^{\theta-1}$ と簡単化される．ここで，$q_i = q$，$q_3 = 3 - 2q$，$d_\theta(0)$ の定義式 (2) および $d_\theta(1)$ の定義式 (1) を代入すると，この条件式は

$$\frac{1}{\theta} - (3 - 2q)^{\theta-1} < \frac{2^\theta - 1}{\theta} - q^{\theta-1} \tag{27}$$

と書き換えられる．

議員定数を 1 増加して $h = 4$ にすると，取り分は 4/3 倍され，$q_1 = q_2 = (4/3)q$，$q_3 = (4/3)(3 - 2q)$ と増加する[*4]．このとき，$q_1 = q_2 > q_3$ の関係に注意して，定理 3 を用いると，ベータ方式による配分として許されるのは，$(2, 2, 0)$，$(1, 2, 1)$ および $(2, 1, 1)$ のみとなる．$\theta - 1 > 0$，$i \in \{1, 2\}$ のとき，定理 2 の式 (17) より，$(1, 2, 1)$ または $(2, 1, 1)$ がベータ方式による配分となるための必要十分条件は

$$\max\begin{Bmatrix} d_\theta^{\theta-1}(0) - q_i^{\theta-1} \\ d_\theta^{\theta-1}(1) - q_i^{\theta-1} \\ d_\theta^{\theta-1}(0) - q_3^{\theta-1} \end{Bmatrix} \le \min\begin{Bmatrix} d_\theta^{\theta-1}(1) - q_i^{\theta-1} \\ d_\theta^{\theta-1}(2) - q_i^{\theta-1} \\ d_\theta^{\theta-1}(1) - q_3^{\theta-1} \end{Bmatrix}$$

となるが，$d_\theta^{\theta-1}(0) < d_\theta^{\theta-1}(1) < d_\theta^{\theta-1}(2)$ なので，

$$\max\begin{Bmatrix} d_\theta^{\theta-1}(1) - q_i^{\theta-1} \\ d_\theta^{\theta-1}(0) - q_3^{\theta-1} \end{Bmatrix} \le \min\begin{Bmatrix} d_\theta^{\theta-1}(1) - q_i^{\theta-1} \\ d_\theta^{\theta-1}(1) - q_3^{\theta-1} \end{Bmatrix} \tag{28}$$

と書ける．いま，$\theta - 1 > 0$，$q_i > q_3$ なので，この関係は $q_i^{\theta-1} > q_3^{\theta-1}$ を意味し，さらに，$q_i^{\theta-1} > q_3^{\theta-1}$ の関係は $d_\theta^{\theta-1}(1) - q_i^{\theta-1} \le d_\theta^{\theta-1}(1) - q_3^{\theta-1}$ を導く．よって，$(1, 2, 1)$ または $(2, 1, 1)$ がベータ方式による配分となるための必要十分条件は，式 (28) より，$d_\theta^{\theta-1}(0) - q_3^{\theta-1} \le d_\theta^{\theta-1}(1) - q_i^{\theta-1}$ と簡単になる．だから，この条件が成り立たなければ，つまり，$d_\theta^{\theta-1}(0) - q_3^{\theta-1} > d_\theta^{\theta-1}(1) - q_i^{\theta-1}$ ならば，$(1, 2, 1)$，$(2, 1, 1)$ はベータ方式による配分とはならない．いい換えれば，残りの配分 $(2, 2, 0)$ のみがベータ方式による配分となる．ここで，$q_i = (4/3)q$，$q_3 = (4/3)(3 - 2q)$，$d_\theta(0)$ の定義式 (2) および $d_\theta(1)$ の定義式 (1) を代入すると，$(2, 2, 0)$ がベータ方式による唯一の配分となるための必要十分条件は

$$\frac{1}{\theta} - \left(\frac{4}{3}\right)^{\theta-1}(3 - 2q)^{\theta-1} > \frac{2^\theta - 1}{\theta} - \left(\frac{4}{3}\right)^{\theta-1} q^{\theta-1} \tag{29}$$

と書き表せる．

式 (27) および式 (29) より，$h = 3$ のときの配分が $(1, 1, 1)$ で，$h = 4$ のときの配分が $(2, 2, 0)$ となる，すなわち，州 3 で Alabama パラドックスが生じるための必要十分条件は，任意の $\theta > 1$ に対して，

$$r(q, \theta) < s(\theta) < \left(\frac{4}{3}\right)^{\theta-1} r(q, \theta) \tag{30}$$

を満たす $1 < q < 3/2$ が存在することである．ただし，$r(q, \theta) = q^{\theta-1} - (3 - 2q)^{\theta-1}$（$\theta > 1$, $1 < q < 3/2$），$s(\theta) = (2^\theta - 2)/\theta$（$\theta > 1$）とする．

各 $\theta > 1$ に対して，$r(q, \theta)$ は q に関して連続な狭義増加関数であり，$\lim_{q\to 0} r(q, \theta) = 0$，$\lim_{q\to 3/2} r(q, \theta) = (3/2)^{\theta-1}$ より，$0 < r(q, \theta) < (3/2)^{\theta-1}$，$0 < (4/3)^{\theta-1} r(q, \theta) < 2^{\theta-1}$ となる．また，$\theta > 1$ に対して，$s(\theta) = (2^\theta - 2)/\theta > 0$ および $s(\theta) = (2^\theta - 2)/\theta < (2^\theta - 1)/\theta = d_\theta^{\theta-1}(1) < 2^{\theta-1}$ なので，

$$0 < s(\theta) < 2^{\theta-1}, \quad \theta > 1 \tag{31}$$

が成り立つ．

補題 4 および定数 $c^* \approx 3.74$ の定義より，$\theta \ge c^*$ のとき，$(3/2)^{\theta-1} \le s(\theta)$ となり，式 (31) の関係も考慮に入れると，$(3/2)^{\theta-1} \le s(\theta) < 2^{\theta-1}$ が成り立つ．ここで，$\lim_{q\to 3/2} r(q, \theta) = (3/2)^{\theta-1}$ と $\lim_{q\to 3/2}(4/3) r(q, \theta) = 2^{\theta-1}$ に注意しながら，十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して，$q = 3/2 - \varepsilon$ とすれば，式 (30) が成り立つことが分かり，Alabama パラドックスが発生する．$1 < \theta < c^*$ のときは，補題 4 より，$s(\theta) < (3/2)^{\theta-1}$ となり，式 (31) の関係も考慮に入れると，$0 < s(\theta) < (3/2)^{\theta-1}$ が成り立つ．$0 < r(q, \theta) < (3/2)^{\theta-1}$ を満たす $r(q, \theta)$ は q に関して狭義増加であることを思い出すと，$r(q, \theta) = s(\theta)$ を満たす $1 < q^* < 3/2$ がつねに存在し，十分小さな正数 ε を用いて $q = q^* - \varepsilon$ と選べば，式 (30) が成り立つ．結果，Alabama パラドックスが発生する．□

定理 7 パラメータ $\theta < 1$ のベータ方式は Alabama パラドックスを許す．

証明 記述を簡単にするため $\theta \ne 0$ と仮定する．州の数を $s = 3$，議員定数を $h = 5$，取り分を $q_1 = q_2 = q$，$q_3 = 5 - 2q$（$0 < q < 5/3$）とすれば，$q_1 = q_2 < q_3$ となる．当然，$q_1 + q_2 + q_3 = 5 = h$ の関係が成り立っている．

[*4] $h = 3$ と $h = 4$ に対する取り分は異なるが，表記の複雑化を避けるため，同じ記号 (q_1, q_2, q_3) を用いている．

$q_1 = q_2 < q_3$ の関係と定理 3 に注意すると，ベータ方式による配分となる可能性のあるものは $(0,0,5)$，$(0,1,4)$，$(1,0,4)$，$(1,1,3)$，$(1,2,2)$，$(2,1,2)$ の 5 つのみである．

このうち，配分 $(1,2,2)$，$(2,1,2)$ がベータ方式による配分となるための必要十分条件を考える．$i \in \{1,2\}$ として，$\theta-1<0$ に注意すると，$q_i < q_3$ は $q_i^{\theta-1} > q_3^{\theta-1}$ を含意し，$q_i^{\theta-1} - d_\theta^{\theta-1}(1) \le q_3^{\theta-1} - d_\theta^{\theta-1}(2)$ は $q_3^{\theta-1} - d_\theta^{\theta-1}(1) \le q_i^{\theta-1} - d_\theta^{\theta-1}(1)$ を含意する．よって，定理 2 より，配分 $(1,2,2)$，$(2,1,2)$ がベータ方式による配分となるための必要十分条件は $q_i^{\theta-1} - d_\theta^{\theta-1}(1) \le q_3^{\theta-1} - d_\theta^{\theta-1}(2)$ となる．逆にいえば，配分 $(1,2,2)$，$(2,1,2)$ がベータ方式による配分とならないための必要十分条件は $q_i^{\theta-1} - d_\theta^{\theta-1}(1) > q_3^{\theta-1} - d_\theta^{\theta-1}(2)$ となる．いい換えれば，配分 $(0,0,5)$，$(0,1,4)$，$(1,0,4)$，$(1,1,3)$ のいずれかがベータ方式による配分となるための必要十分条件は，$\theta \neq 0$ と仮定しているので，

$$q^{\theta-1} - \frac{2^\theta - 1}{\theta} > (5-2q)^{\theta-1} - \frac{3^\theta - 2^\theta}{\theta} \tag{32}$$

となる．

次に，$h = 6$ としたとき，配分 $(2,2,2)$ がベータ方式による唯一の配分となるための必要十分条件を考える．このとき，取り分はすべて 6/5 倍されて，$q_i = (6/5)q$，$q_3 = (6/5)(5-2q)$ と変化するが，大小関係 $q_i < q_3$ は変わらず，$\theta - 1 < 0$ のとき，$q_i^{\theta-1} > q_3^{\theta-1}$ となる．よって，$q_i^{\theta-1} - d_\theta^{\theta-1}(1) < q_3^{\theta-1} - d_\theta^{\theta-1}(2)$ は $q_3^{\theta-1} - d_\theta^{\theta-1}(1) < q_i^{\theta-1} - d_\theta^{\theta-1}(2)$ を含意する．したがって，定理 2 の式 (17) を参考にすると，配分 $(2,2,2)$ がベータ方式による唯一の配分となるための必要十分条件は $q_i^{\theta-1} - d_\theta^{\theta-1}(1) < q_3^{\theta-1} - d_\theta^{\theta-1}(2)$ となり，$\theta \neq 0$ の場合，

$$\left(\frac{6}{5}\right)^{\theta-1} q^{\theta-1} - \frac{2^\theta - 1}{\theta} < \left(\frac{6}{5}\right)^{\theta-1} (5-2q)^{\theta-1} - \frac{3^\theta - 2^\theta}{\theta} \tag{33}$$

と書ける．

いま，$r(q,\theta) = q^{\theta-1} - (5-2q)^{\theta-1}$（$\theta < 1,\ 0 < q < 5/3$），$s(\theta) = (2^\theta - 1)/\theta - (3^\theta - 2^\theta)/\theta$（$\theta < 1,\ \theta \neq 0$）とおく．議員定数が 5 から 6 に増加したとき，配分 $(0,0,5)$，$(0,1,4)$，$(1,0,4)$，$(1,1,3)$ が配分 $(2,2,2)$ に変化すると，どの場合でも州 3 において Alabama パラドックスが発生する．よって，式 (32)，式 (33) より，0 を除く任意の $\theta < 1$ に対し

$$\left(\frac{6}{5}\right)^{\theta-1} r(q,\theta) < s(\theta) < r(q,\theta) \tag{34}$$

を満たす $0 < q < 5/3$ が存在すれば，Alabama パラドックスが発生する．

上記の定義式より，$s(\theta) = d_\theta^{\theta-1}(1) - d_\theta^{\theta-1}(2)$ であるが，$\theta - 1 < 0$ のとき，$d_\theta(1) < d_\theta(2)$ は $d_\theta^{\theta-1}(1) > d_\theta^{\theta-1}(2)$ を含意するので，$s(\theta) > 0$（$\theta < 1,\ \theta \neq 0$）である．任意の $\theta < 1$ に対して，$r(q,\theta)$ は q に関して，連続で狭義減少関数であり，$\lim_{q\to 0} r(q,\theta) = +\infty$，$\lim_{q\to 5/3} r(q,\theta) = 0$ となる．だから，0 を除く任意の $\theta < 1$ に対して，$s(\theta) = r(q,\theta)$ となる唯一の解 $0 < q^* < 5/3$ が存在する．このことから，十分小さな正数を ε とし，$q = q^* - \varepsilon$ と選べば，式 (34) が成り立ち，Alabama パラドックスが発生する．$\theta = 0$ の場合も同様にして証明することができる．□

系 2　パラメータ値が 1 のベータ方式（つまり，Theil 方式）以外のベータ方式は Alabama パラドックスを許す．

8. おわりに

本論文では，アルファ・ダイバージェンスと同じ母関数を持つベータ・ダイバージェンスを最小にする配分方式，すなわち，ベータ方式について調べた．この方式による議席配分を最適化問題で表現し，その最適性の条件を与えた．さらに，ベータ方式の取り分制約の充足性や Alabama パラドックスの発生についても調べた．

ベータ方式の取り分制約の充足性に関する議論では，パラメータ値が 2 の最大剰余方式のみが取り分制約を満たすことを明らかにした．アルファ・ダイバージェンスを最小にする配分方式，つまり，緩和除数方式のクラスの中には取り分制約を満たすものは存在しない．このことを考えると，取り分制約に関する，最大剰余方式の唯一性は非常に注目に値する．最大剰余方式は Alabama パラドックスを許すものの，わが国を含め多くの国々では現在も使用され続けている．その使用され続けている理由は明らかではないが，最大剰余方式の唯一性がその理由の一部を与えているのかもしれない．

ベータ方式と Alabama パラドックスの関係では，パラメータ値が 1 の Theil 方式のみが Alabama パラドックスを避けることを明らかにした．一方，緩和除数方式のクラスの配分方式はすべて Alabama パラドックスを避ける．このことは，アルファ・ダイバージェンスを最小にする配分方式のクラスとベータ・ダイバージェンスを最小にする配分方式のクラスの交わりが Theil 方式のみということを意味している．

ベータ・ダイバージェンスの中で，よく知られたものとして，$\theta = 2$ の平方 Euclid ダイバージェンス，$\theta = 1$ の KL ダイバージェンス，$\theta = 0$ の板倉斎藤ダイバージェンス [20] があげられる．平方 Euclid ダイバージェンスは最大剰余方式に，KL ダイバージェンスは Theil 方式に対応する．前者は取り分制約を満たす唯一の配分方式（$\theta = 2$）で，後者は Alabama パラドックスを許さない唯一の配分方式（$\theta = 1$）である．一方，板倉斎藤ダイバージェンスに関しては，これを最小にする配分方式は取り分制約を満たさず，Alabama パラドックスを許してしまう．そのため，板倉斎藤ダイバージェンスを最小にする配分方式はこれまで提案されたことがないのかもしれない．

参考文献

[1] Basu, A., Harris, I.R., Hjort, N.L. and Jones, M.C.: Robust and Efficient Estimation by Minimising a Density Power Diveregence, *Biometrika*, Vol.85, No.3, pp.549–559 (1998).

[2] Balinski, M.L. and Young, H.P.: *Fair Representation*, Yale University Press, New Haven (1982). 越山　康，一森哲男（訳）：公正な代表制，千倉書房，東京 (1987). 2nd ed., Brookings Institution Press, Washington D.C. (2001).

[3] Birkhoff, G.: House Monotone Apportionment Schemes, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, Vol.73, No.3, pp.684–686 (1976).

[4] Chernoff, H.: A Measure of Asymptotic Efficiency for Tests of a Hypothesis Based on a Sum of Observations, *Annals of Mathematical Statistics*, Vol.23, No.4, pp.493–507 (1952).

[5] Cichocki, A. and Amari, S.: Families of Alpha- Beta- and Gamma-Divergences: Flexible and Robust Measures of Similarities, *Entropy*, Vol.12, pp.1532–1568 (2010).

[6] Huntington, E.V.: The Apportionment of Representatives in Congress, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol.30, No.1, pp.85–110 (1928).

[7] Ichimori, T.: New Apportionment Methods and Their Quota Property, *JSIAM Letters*, Vol.2, pp.33–36 (2010).

[8] 一森哲男：連続平等性と対称性の観点からみた議員定数配分方法と大域的最適化問題，日本応用数理学会論文誌，Vol.21, No.1, pp.103–124 (2011).

[9] Ichimori, T.: On Rounding off Quotas to the Nearest Integers in the Problem of Apportionment, *JSIAM Letters*, Vol.3, pp.21–24 (2011).

[10] Ichimori, T.: Relaxed Divisor Methods and Their Seat Biases, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.55, No.1, pp.63–72 (2012).

[11] 一森哲男：レニーのエントロピーを最大にする議席配分方式について，日本応用数理学会論文誌，Vol.22, No.3, pp.81–96 (2012).

[12] Ichimori, T.: A Note on Relaxed Divisor Methods, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.55, No.4, pp.225–234 (2012).

[13] 一森哲男：議員定数配分問題の離散最適化による解法について，日本応用数理学会論文誌，Vol.23, No.1, pp.15–35 (2013).

[14] 一森哲男：分布間ダイバージェンスと議席配分方式の関係について，情報処理学会論文誌，Vol.54, No.8, pp.1988–1995 (2013).

[15] 一森哲男：緩和除数方式の比例性と歴史上の 5 方式との関係について，日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌，Vol.56, pp.1–14 (2013).

[16] 一森哲男：緩和除数方式の偏りについて，日本応用数理学会論文誌，Vol.23, No.4, pp.601–617 (2013).

[17] 一森哲男：ダイバージェンスが定める議席配分方式，情報処理学会論文誌，Vol.55, No.5, pp.1568–1572 (2014).

[18] 一森哲男：ダイバージェンスを最小にする議席配分方式について，情報処理学会論文誌，Vol.56, No.6, pp.1442–1450 (2015).

[19] 一森哲男：ダイバージェンスによる議員定数配分方式の偏りについて，日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌，Vol.58, pp.42–55 (2015).

[20] Itakura, F. and Saito, S.: Analysis-Synthesis Telephony based upon the Maximum Likelihood Method, *Proc. 6th Int. Congress on Acoustics*, pp.17–20 (1968).

[21] Kullback, S. and Leibler, R.A.: On Information and Sufficiency, *Annals of Mathematical Statistics*, Vol.22, No.1, pp.79–86 (1951).

[22] Pearson, K.: On the Criterion That a Given System of Deviations from the Probable in the Case of a Correlated System of Variables is Such That it can be Reasonably Supposed to Have Arisen from Random Sampling, *Philosophical Magazine*, Vol.50, No.302, pp.157–172 (1900).

[23] 薩摩順吉，大石進一，杉原正顯（編）：応用数理ハンドブック，朝倉書店 (2013).

[24] Stolarsky, K.B.: Generalizations of the Logarithmic Mean, *Mathematics Magazine*, Vol.48, No.2, pp.87–92 (1975).

[25] Theil, H. and Schrage, L.: The Apportionment Problem and the European Parliament, *European Economic Reviews*, Vol.9, No.3, pp.247–263 (1977).

[26] Theil, H.: The Desired Political Entropy, *American Political Science Review*, Vol.63, No.2, pp.521–525 (1969).

[27] Willcox, W.F.: The Apportionment of Representatives, *American Economic Review*, Vol.6, No.1, pp.3–16 (1916).

一森 哲男　（正会員）

昭和 28 年生．昭和 57 年大阪大学大学院工学研究科応用物理学専攻博士後期課程修了．同年広島大学工学部助手．昭和 60 年より大阪工業大学工学部専任講師．昭和 63 年より大阪工業大学工学部助教授．平成 8 年より大阪工業大学情報科学部教授．システムの最適化に関する研究に従事．工学博士．昭和 62 年日本オペレーションズ・リサーチ学会事例研究奨励賞受賞．平成 25 年日本応用数理学会論文賞受賞．日本オペレーションズ・リサーチ学会，日本応用数理学会各会員．