

不等間隔データ点列に対する非線形スプラインの 安定な計算法†

原 田 耕 一^{††} 谷 本 智 昭^{††*} 中 前 栄 八 郎^{††}

CAGD やコンピュータ・グラフィックス技術の発達に伴い、計算機の出力を図形として得ることが頻繁に行われるようになってきた。与えられた有限個のデータを、視覚的に自然に補間する問題は、このような図形出力の基礎であり、この目的のために、線形スプラインが広く用いられている。しかしながら、スプライン関数の原形は非線形であることから、スプライン関数の値の性質を把握するためには、非線形スプラインの研究が必要である。本論文では、非線形スプラインを解析する上で有用と考えられる変分法による手法を取り上げ、この手法を、データ点間隔が不均一の一般的なデータ点に適用することを試みる。この目的のため、まず、非線形スプラインを不等間隔データ点列に対し定式化する。次に、定式化された非線形スプラインを、独立変数に関してスケールを導入することにより、数値的に安定に計算する方法を提案する。また、提案している方法を、実際の点列に適用し、広く用いられている線形スプラインと比較し検討する。

1. ま え が き

近年、設計問題に用いられている多くのスプライン関数¹⁾は、製図用具(雲形定規)にその源がある。計算機の発達に伴い、この製図用具を数学的に表現し、計算機内でシミュレートするようになってきた。スプラインの数学的表現は、これらの多くのスプライン関数に対応して、多数の形式で存在しているが²⁾、基本的には、後述の歪エネルギー極小の原理に基づくものである。歪エネルギーは、スプラインの長さに関して非線形に変化する。したがって、スプライン関数とは、元来、非線形である。スプラインのこの非線形性は収束計算を必要とし、応用面からは一般に不適當である。とくに、計算機援用による、インタラクティブな設計手法において、これは非常に大きな障害となる。そこで、歪エネルギーの基となる曲率を線形近似して導出される線形スプラインが生まれた。このスプラインは、計算機によって容易に計算できるので、非線形スプラインに代って広く用いられるようになってきた。こうして、線形スプラインのことをたんにスプラインと称するようになり、B-スプライン³⁾に代表されるごとく、前述のインタラクティブな設計手法では、ほぼ全面的に用いられている。

ところが、スプラインの原型、すなわち、非線形ス

プラインが有用な分野もあり、以下に述べるようないくつかの提案がなされている。船舶設計はこのような分野の一例であり、AUTOKON システムが有名である⁴⁾。このシステムでは、与えられたデータの間隔を微小部分に分割し、各微小区間の曲率を一定として非線形スプラインを生成している。したがって、この手法は次の2種類の収束計算を必要としている。

- 微小区間を生成する際の微小区間の個数および、区間分割法の決定。

- 与えられたデータ点において、得られた補間曲線の接線ベクトルが連続となるようにするための修正。

さらに、補間は、多数の円弧の組合せによって行われているため、各円弧の中心および半径を求めなければならない。なお、各データ間隔に存在する円弧の数を2個に制限した簡易な方法も提案されている⁵⁾。

これに対し、収束計算の種類を減少させるため、変分法によって非線形スプラインを上記の方法よりも直接的に取り扱う方法がある。ところで、前述の線形スプラインについては、スプラインの存在性、および唯一性に関する性質が明らかにされているが⁶⁾、非線形スプラインについてのこれらの性質は現在まで明らかにされていない。したがって、線形スプラインを基準とした変分法による非線形スプラインの解析手法が最も有効と考えられている。このような変分法による解析が最近 Malcolm によって提案された⁷⁾。しかし、この方法は次の欠点をもっている。

- データ点が等間隔である場合にしか適用できない。

† A Stable Calculation Method of Nonlinear Splines for Irregularly Spaced Data Points by KOICHI HARADA, TOMOAKI TANIMOTO and EIYACHIRO NAKAMAE (Faculty of Engineering, Hiroshima University).

†† 広島大学工学部

* 現在 (株)安川電機製作所

• 点列相互の位置関係によっては、収束解が得られないことがある。

本論文では、非線形スプラインを計算する有効な手法として Malcolm の方法を発展させ、上述の欠点を解消することを提案する。このため、まずデータ点の間隔が不均一である場合について、非線形スプラインを変分法により定式化する。次に、数値計算が収束しない理由を解析し、収束計算の途中でスケール変換を導入することにより、変分法によって線形化された収束計算を数値的に安定に実行する方法を提案する。

2. 非線形スプラインの定式化

データ点列 $(X_i, Y_i) (i=1, 2, \dots, n)$ が与えられているものとする。任意の点列は、パラメトリックな手法⁹⁾により一価の点列の集合に変換することができるので、一般性を失うことなく (X_i, Y_i) は一価であると仮定できる。まず、データ点間隔が不均一な場合の定式化について論述する。いま、 X_i を独立変数とし、後の離散化のため、次のように定義する。

$$H_i = X_{i+1} - X_i; \quad i=1, 2, \dots, (n-1)$$

$$H_i/k_i = h_i; \quad i=1, 2, \dots, (n-1) \quad (1)$$

$$K_1 = 0, \quad K_i = \sum_{j=1}^{i-1} k_j; \quad i=2, 3, \dots, n$$

ここで H_i は各スパンの長さであり、 k_i は i 番目のスパンの分割数である。そこで区間 $[X_1 - h_0, X_n + h_n]$ を k_i を用いて分割し、得られるサンプル点列を $(x_i, y_i) (i=0, 1, \dots, m+1)$ とする。ここで $m = k_n + 1$ である。以上の各記号を図 1 に示す。

非線形スプラインとは、与えられた点列に対し、この点列を通過するという条件の下で、次式で提案される歪エネルギー E_s を極小とする曲線として表現されるものである。

$$E_s = C \int_0^l \kappa^2 ds \quad (2)$$

ここで l は曲線の長さ、 C は定数であるが、以下では E_s の極小値を議論するので $C=1$ とおく。また、曲率 κ 、および線素 ds について $\kappa = y''/(1+y'^2)^{3/2}, ds =$

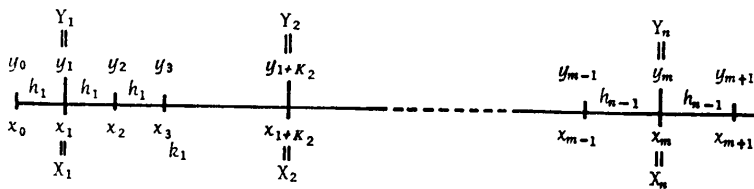


図 1 離散化されたデータ点列
Fig. 1 Digitized data sequences.

$(1+y'^2)^{1/2}$ を用いれば、

$$E_s = \int_{X_1}^{X_n} \frac{y''^2}{(1+y'^2)^{5/2}} dx \quad (3)$$

となる。ここで $'$ は独立変数に関する微分操作を表している。なお、(3)式において $y' \approx 0$ とおけば、線形スプラインが得られる。

計算機によって(3)式を処理するために、図1の記号を用いて離散化を行うと次式が得られる。

$$E_s(\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^m \frac{y_i''^2}{(1+y_i'^2)^{5/2}} \bar{h}_i \quad (4)$$

ここで、 i が j 番目のデータに一致する場合は、

$$y_i' = \frac{h_{j-1}^2 y_{i+1} + (h_j^2 - h_{j-1}^2) y_i - h_j^2 y_{i-1}}{h_{j-1} h_j (h_{j-1} + h_j)}$$

$$y_i'' = \frac{h_{j-1} y_{i+1} - (h_{j-1} + h_j) y_i + h_j y_{i-1}}{h_{j-1} h_j (h_{j-1} + h_j) / 2} \quad (5)$$

$$\bar{h}_i = (h_{j-1} + h_j) / 2$$

とし、 i がデータ点上にない場合は、

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h_j}$$

$$y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h_j^2} \quad (6)$$

$$\bar{h}_i = h_j$$

であるものとする。このように離散化することによって、非線形スプライン決定問題は、拘束条件

$$y_i = Y_j \quad (i=K_j+1; j=1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

のもとで、(4)式を極小とする $\mathbf{Y}' = (y_0, y_1, \dots, y_m, y_{m+1})$ を求める問題として定式化できる。ここで、 y_0 および y_{m+1} は離散化の都合上導入されたものであり、最終的な解からは除かれる。(4)式をデータ点を除く y_i について偏微分し、これを零とおけば(図1参照)次の各方程式が得られる。

(I) データ点の右に隣接する点について

$$\xi_{i-1}^{-1} \left\{ \frac{2}{h_{j-1}^2 (h_{j-1} + h_j)} y_i - \frac{2}{h_{j-1} h_j^2} y_{i-1} + \frac{2}{h_{j-1} h_j (h_{j-1} + h_j)} y_{i-2} \right\}$$

$$- 2 \frac{\xi_i}{h_j^3} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})$$

$$+ \frac{\xi_{i+1}}{h_j^3} (y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i)$$

$$- \mathcal{L}_{i-1}^{-1} \left\{ \frac{2h_{j-1}}{h_j^3 (h_{j-1} + h_j)} y_i + \frac{2(h_j - h_{j-1})}{h_{j-1} h_j^3} y_{i-1} - \frac{2}{h_{j-1} h_j (h_{j-1} + h_j)} y_{i-2} \right\}$$

$$+\frac{\mathcal{L}_{i+1}^+}{h_j^3}(y_{i+2}-y_i)=0 \quad (8)$$

(II) データ点の左に隣接する点について

$$\begin{aligned} & \frac{\xi_{i-1}^-}{h_j^3}(y_i-2y_{i-1}+y_{i+1})-2\frac{\xi_i^-}{h_j^3}(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}) \\ & +\xi_{i+1}^+\left\{\frac{2}{h_j h_{j+1}(h_j+h_{j+1})}y_{i+2}-\frac{2}{h_j^2 h_{j+1}}y_{i+1}\right. \\ & \left.+\frac{2}{h_j^2(h_j+h_{j+1})}y_i\right\}-\frac{\mathcal{L}_{i-1}^-}{h_j^3}(y_i-y_{i-2}) \\ & +\mathcal{L}_{i+1}^+\left\{\frac{2}{h_j h_{j+1}(h_j+h_{j+1})}y_{i+2}\right. \\ & \left.+\frac{2(h_{j-1}-h_j)}{h_j^3 h_{j+1}}y_{i+1}-\frac{2h_{j+1}}{h_j^2(h_j+h_{j+1})}y_i\right\}=0 \quad (9) \end{aligned}$$

(III) y_0, y_{m+1} において

$$\begin{aligned} y_0-2y_1+y_2=0 \\ y_{m-1}-2y_m+y_{m+1}=0 \end{aligned} \quad (10)$$

(IV) その他の点について

$$\begin{aligned} & \frac{\xi_{i-1}^-}{h_j^3}(y_i-2y_{i-1}+y_{i-2}) \\ & -2\frac{\xi_i^-}{h_j^3}(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}) \\ & +\frac{\xi_{i+1}^+}{h_j^3}(y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i) \\ & -\frac{\mathcal{L}_{i-1}^-}{h_j^3}(y_i-y_{i-2})+\frac{\mathcal{L}_{i+1}^+}{h_j^3}(y_{i+2}-y_i)=0 \quad (11) \end{aligned}$$

ただし,

$$\xi_i^+ = \frac{1}{[1+(y_{i+1}-y_{i-1})^2/(2h_j)^2]^{5/2}} \quad (12)$$

$$\xi_i^- = \frac{1}{[1+\{h_{j-1}^2 y_{i+1}+(h_j^2-h_{j-1}^2)y_i-h_j^2 y_{i-1}\}^2/\{h_{j-1}h_j(h_{j-1}+h_j)\}^2]^{5/2}} \quad (13)$$

$$\mathcal{L}_i^+ = \frac{5}{8h_j^2} \frac{(y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i)^2}{[1+(y_{i+1}-y_{i-1})^2/(2h_j)^2]^{7/2}} \quad (14)$$

$$\mathcal{L}_i^- = \frac{5}{8} \frac{\{h_{j-1}y_{i+1}-(h_{j-1}+h_j)y_i+h_j y_{i-1}\}^2/\{h_{j-1}h_j(h_{j-1}+h_j)^2/4\}}{[1+\{h_{j-1}^2 y_{i+1}+(h_j^2-h_{j-1}^2)y_i-h_j^2 y_{i-1}\}^2/\{h_{j-1}h_j(h_{j-1}+h_j)\}^2]^{7/2}} \quad (15)$$

とする。また ξ_i^+ , \mathcal{L}_i^+ はそれぞれ(13)式, (15)式において, j についての添字をすべて1だけ増加させたものである。式(8)~(11)を用いて構成される連立方程式は非線形方程式である。したがって, 次節で述べる収束計算が必要である。

3. 数値計算のためのスケールの導入

前述の方程式(8)~(15)を連立させてこれを解けば非線形スプラインが得られる。繰返し計算法によってこの連立方程式を解くための初期解として, まず線形スプラインを求める。このためには,

$$\left. \begin{aligned} \xi_i^{(1)} &= 1; i \neq K_j+1, j=1, 2, \dots, n \\ \xi_i^{- (1)} &= 1; i=K_j+1, j=2, 3, \dots, n-1 \\ \xi_i^{+ (1)} &= 1; i=K_j+1, j=2, 3, \dots, n-1 \\ \mathcal{L}_i^{(1)} &= 0; i \neq K_j+1, j=1, 2, \dots, n \\ \mathcal{L}_i^{- (1)} &= 0; i=K_j+1, j=1, 2, \dots, n-1 \\ \mathcal{L}_i^{+ (1)} &= 0; i=K_j+1, j=2, 3, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

において, 連立方程式(8)~(15)を解けばよい。なお添字(1)は式(16)中の各パラメータが初期設定値であることを示している。この線形スプラインについての方程式は,

$$A\mathbf{y}=\mathbf{b} \quad (17)$$

の形式で表現される。ここで A は, $h_i(i=1, 2, \dots, n-1)$

によって決定される係数行列である。また, $\mathbf{y}=[y_1, y_2, \dots, y_m]^t$ は解ベクトルであり, $\mathbf{b}=[Y_1, 0, \dots, 0, Y_2, 0, \dots, 0, \dots, Y_n]^t$ である。式(17)によって定まる解を $\mathbf{y}^{(1)}$ とおき, 漸化式

$$\left. \begin{aligned} \xi_i^{(l+1)} &= \xi_i^{(l)}(\mathbf{y}^{(l)}); i \neq K_j+1, j=1, 2, \dots, n \\ \xi_i^{- (l+1)} &= \xi_i^{- (l)}(\mathbf{y}^{(l)}); i=K_j+1, j=2, 3, \dots, n-1 \\ \xi_i^{+ (l+1)} &= \xi_i^{+ (l)}(\mathbf{y}^{(l)}); i=K_j+1, j=2, 3, \dots, n-1 \\ \mathcal{L}_i^{(l+1)} &= \mathcal{L}_i^{(l)}(\mathbf{y}^{(l)}); i \neq K_j+1, j=1, 2, \dots, n \\ \mathcal{L}_i^{- (l+1)} &= \mathcal{L}_i^{- (l)}(\mathbf{y}^{(l)}); i=K_j+1, \\ & \quad j=1, 2, \dots, n-1 \\ \mathcal{L}_i^{+ (l+1)} &= \mathcal{L}_i^{+ (l)}(\mathbf{y}^{(l)}); i=K_j+1, j=2, 3, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

を用いる。 $l \geq 2$ の場合は係数行列 A の要素は $\xi_i^{(l)}$, $\xi_i^{- (l)}$, $\xi_i^{+ (l)}$, $\mathcal{L}_i^{(l)}$, $\mathcal{L}_i^{- (l)}$ および $\mathcal{L}_i^{+ (l)}$ によって定まる。このようにして, 非線形スプラインは, 係数行列 A を式(18)にしたがって更新することにより, 式(17)により定まる解ベクトルとして求めることができる。以上で, データ点間隔が不均一な場合についての定式化が完了する。

次に, 非線形スプラインを計算する際の問題点について述べる。1章で述べた Malcolm の方法⁷⁾ の2番目の欠点は, 係数行列 A の性質として述べるができる。すなわち, データ点相互の位置関係によって

は、収束計算実行中に、係数行列の正定値性がくずれることがある。さらに、係数行列 A の正定値性が保障されても、最終的な収束解が不連続となる場合があり、また、収束が非常に緩やかであって、収束計算の回数がきわめて多くなり、あらかじめ設定した指定回数では収束しない場合がある。このような場合にはいずれも適当な解が得られない。そこで、データ点列を、収束計算を行う間だけ変換し、上記の不都合な状態を避けることができる。

いま、データ点列を (SX_i, Y_i) ($i=1, 2, \dots, n$) と表す。 $S=1$ の場合、この点列は与えられたデータ点列に一致する。 S は独立変数に作用するスケールであり、 S を変化させることにより、データ点列の独立変数に対する傾きを変化させることができる。 $S \rightarrow \infty$ とすれば、この傾きは無限に小さくなり、 $y' \approx 0$ となる。すなわち、線形スプラインが得られる。 S を 0 から ∞ まで変化させ、上述の収束計算を実行すれば、任意のデータ点列の点相互の位置関係によって、計算結果は図 2 の点線で示されるような 4 通りの状態推移をする。この図から、 S_c という臨界スケールの存在が予測される。しかしながら、原方程式 (3) に存在する非線形性のため、 S_c の存在を数学的に厳密に証明することはできない。

この臨界の S_c の存在は、スプライン関数の計算が、従属変数の独立変数に対する変化率に依存していることにより説明される。すなわち、 S を十分に大きくした場合、換言すれば上記の変化率が十分小さい場合は、 $y' \approx 0$ の仮定が成立し、非線形スプラインは線形スプラインに収束する。したがって、 $S \rightarrow \infty$ の操作により、いかなる点列に対してもスプライン補間が得ら

れる。逆に変化率が大い場合 ($S \rightarrow 0$) は、式 (17) の係数行列 A が悪条件となり、補間関数は得られない。以上のように S_c の存在は説明できるが、 S_c の一意性については、現在までの理論では何も述べることができない。この S_c を境に、収束計算の結果が妥当であるか、不適当となるかが定まる。したがって、Malcolm の方法が有効である点列は $S_c \leq 1$ の場合であることがわかる。

上述のように、 S を十分に大きくして収束計算を実行すれば、いかなる点列に対してもスプライン関数を求めることができる。しかし、こうして得られるスプライン関数は線形スプラインに近いものとなり、このような場合には収束計算によらず、直接、線形スプラインを求めるほうがより適切である。したがって、 $S_c > 1$ で、スケールを導入しなければ収束解が得られない場合は、 S_c になるべく近く、かつ、これより大きいスケール S_0 を選ぶ必要がある。次節でこのスケール S_0 を定める具体的手法について述べる。

4. 収束解の求め方

適当なスケールを選び、非線形スプラインを収束解として定めるためには、入れ子構造をした 2 種類の収束計算を必要とする。すなわち、

- 前述の S_0 を得るために必要な収束計算。
- 線形スプラインを初期解とする非線形スプラインを定めるための収束計算。

後者の収束計算は式 (18) に基づく方法にしたがって計算しなければならず、手順はすでに定まっている。これに対し、前者の収束計算には、種々の方式が考えられるが、ここでは、この収束計算を効率よく実行するために、次の方法を提案する。

4.1 初期スケール S_0 の決定法

データ点列の並びの大局的な傾向にしたがって初期スケールを定めるのが最も適当であると考えられる。前述のように非線形スプラインを定めるための収束計算は、データ点列に含まれる従属変数の独立変数に対する傾斜の大小に大きく依存している。この相互関係を調べるため、傾斜を連続に変化させることのできる点列を選び、これを標準データ点列と呼ぶことにする。そこで、次の 2 種類の標準データ点列を用いる。

データ点列 (I)

$$X_i = (i-1) \times 10, \quad i=1, 2, \dots, 11$$

$$Y_i = \begin{cases} -50 \sqrt{1-X_i/50} + 50, & i=1, 2, \dots, 6 \\ 50 \sqrt{X_i/50-1} + 50, & i=7, 8, \dots, 11 \end{cases} \quad (19)$$

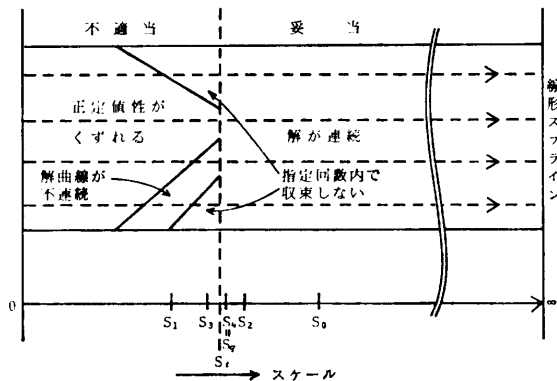


図 2 スケール変化に対する 4 種類の計算結果の変化
Fig. 2 Four types of calculation results' transition against the scale S .

$$\alpha \geq 1$$

データ点列(II)

$$X_i = (i-1) \times 10, \quad i=1, 2, \dots, 11$$

$$Y_i = \begin{cases} 0, & i=1, 2, \dots, 5 \\ 10, & i=6 \\ \beta, & i=7, 8, \dots, 11 \end{cases} \quad (20)$$

$$0 \leq \beta \leq 10$$

これらの点列は以下のようにして選択した。まず、数学で通常よく用いられる関数 (sin 関数等) をはじめとして、補間手法に関する論文で引用されているデータ点列を多数用意し、これらをスケールを導入せずに処理する。次に、これらの点列のなかで、収束解が得られなかったものを抽出し、抽出された点列のなかから、独立変数に対する変化量が最も大きな部分を取り出す (この変化量の大きい部分が収束計算の妨げとなっていることは、このような部分を点列から取り除けば収束解が得られることから、確かめることができる)。とり出された部分に共通の大局的なパターンを描けば、点列 (I), (II) を決定できる。データ点列 (I), (II) に対し、

$$P = \frac{\max_i |Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}|}{|Y_{i+1} - Y_{i-1}|},$$

$$Q = \frac{\max_i |Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}|}{H_i \cdot S_q'}$$

$$\frac{S_q' - S_i}{S_i} \leq 0.01 \quad (21)$$

を用いて P, Q を求める。ここで P, Q はそれぞれ、従属変数の 2 階導関数を、従属変数の変動量、および独立変数について正規化したものである。また、 S_q' は、点列 (I), (II) に対し収束計算結果が妥当となるか否

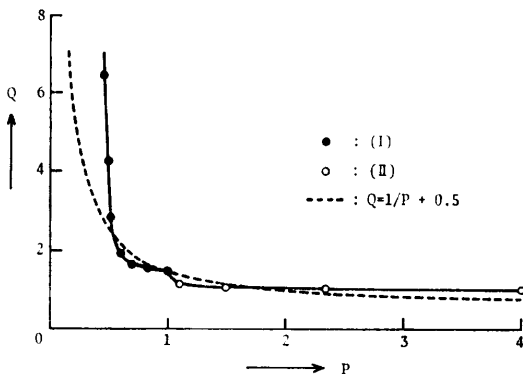


図 3 標準データ点列に対する P と Q との関係
Fig. 3 The relation between P and Q for the sets of data given by Eqs. (19) and (20).

かの臨界のスケール S_i (図 2 参照) に十分近く、かつ、これより大きなスケールの一例であり、 P, Q の関係を定めるために用いることができる。 P, Q の関係を実際にプロットすれば、図 3 のように、 $Q=1/P+0.5$ のグラフでこれらの関係を近似できることがわかる。そこで、与えられた点列について $|Y_{i+1}-Y_{i-1}|$ の最大値を求める。なぜなら $|Y_{i+1}-Y_{i-1}|$ の最大値が係数行列 A に最も大きな影響を与えるからである。この最大値の逆数を P とし、この P に対応する Q を図 3 のグラフ上で定める。すると、 $1/Q$ が $H_i \cdot S_q'$ となるので S_q' を計算し、これを収束計算の初期スケール S_0 とすればよい。

4.2 スケール S_q の決定法

前項の初期スケール S_0 をもとにして S_q を定める。

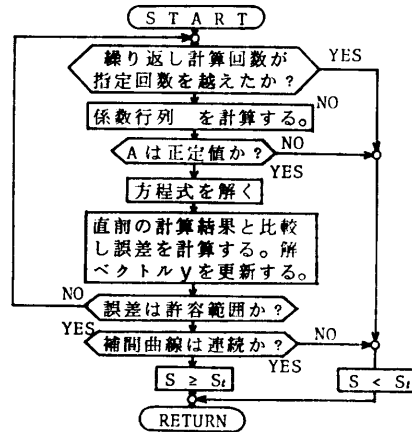


図 4 S と S_i との相対関係を求めるフローチャート
Fig. 4 The diagram for determining the relation between S and S_i .

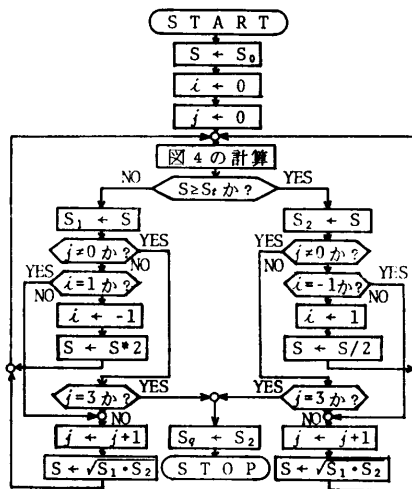


図 5 スケール S_q を決定するフローチャート
Fig. 5 The diagram for determining S_q .

スケール S と臨界スケール S_c との相対関係は図4の手順によって決定される。 S と S_c との大小関係に従って次に図5の手順によってスケール S の更新を行う。図5で $j=3$ のとき、すなわち S を、 $S_1 < S_c < S_2$ を満足する二つのスケール S_1, S_2 の相乗平均で置きかえる操作を3度繰り返した後は $S_2 = \sqrt[3]{2} S_1 = 1.09 S_1$ となる。したがって、 $S_c < S < 1.09 S_c$ となり、実用上十分に S_c に近く、かつ、これより大きいスケールが得られる。

一般に、非線形スプラインはスケールに対して保存されない。したがって、提案している方法が真に非線形スプラインを与えているかどうかは検証する必要がある。1章でも述べたように、このための数学的証明は、現在までで知られている非線形スプラインの内容からは得ることができない。しかし、数値的には、得られた補間曲線の歪エネルギー(式(4)参照)を計算することができる。この数値計算の結果、提案しているアルゴリズムによって得られる補間曲線のもつ歪エネルギーは、同じ点列を従来の線形スプラインを用いて得られた補間曲線のもつ歪エネルギーより小さいことが確認された。したがって、図4、図5を用いて得られる曲線は、歪エネルギー極小という見地からの非線形スプラインを与えているといえる。なお、与えられた点列に対する補間曲線の、スケールに対する歪エネルギー変化の大局的性質が明らかでない場合には、最小値に近い極小値を採用することが望ましいことはいうまでもない。

5. 適用例

本論文で提案している非線形スプライン計算アルゴリズムを実際の点列に応用する。図6, 7, 8はそれぞれ文献9)~11)に用いられているものである。このうち、図6, 7のデータ点列は、ある物理的現象の観測結果として得られたものであり、図8のデータは、閉曲線の例として取り上げられているものである。なお、観測データに対する曲線の「あてはめ」法として、線形スプライン(B-スプライン)の節点を、与えられたデータ上に制限せずに適切に選ぶことにより、良好な補間曲線を得る方法も報告されているが¹²⁾、本論文では、線形スプラインと非線形スプラインとの相互比較に主眼を置いているので、以下の適用例では、補間曲線の節点は、すべてデータ点に一致しているものと仮定している。図中、非線形スプラインおよび線形スプラインは、それぞれ実線および点線を用いて示

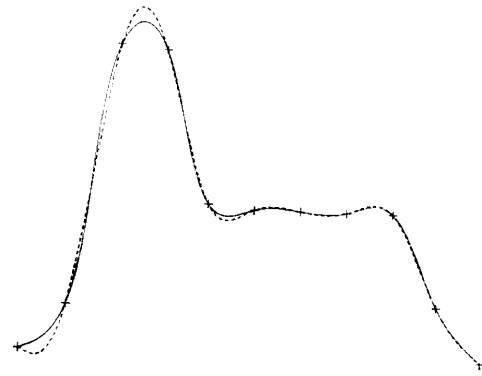


図6 適用例 (I)
Fig. 6 Example (I).

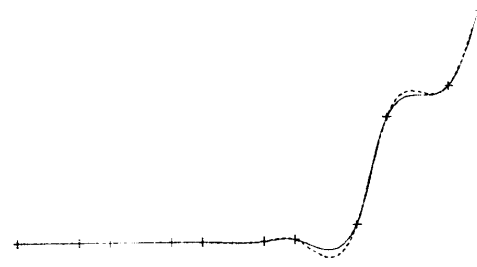


図7 適用例 (II)
Fig. 7 Example (II).

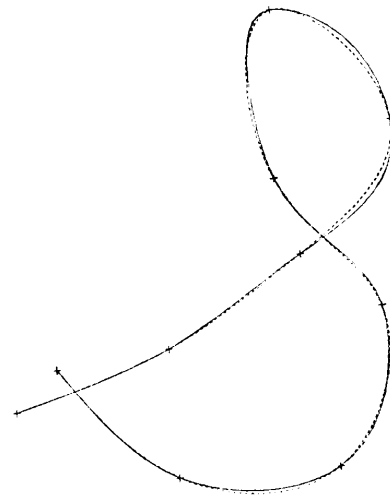


図8 適用例 (III)
Fig. 8 Example (III).

してある。図6は等間隔データ点であるが、Malcolmの方法では収束解が得られない例である。また、図7, 8は不等間隔データ点列であるため、Malcolmの方法が適用できない例である。各例の必要な繰返し計算回数(非線形スプラインを定めるために必要な収束計

表 1 各例の計算時間および繰返し回数

Table 1 Run time and required numbers of iterative procedure of each example.

	計算時間 (秒)	必要な繰返し回数 (回)
適用例 (I)	13	33
適用例 (II)	16	39
適用例 (III)	13	37

算回数(の総数), および計算時間を表 1 に示す. なお, 使用計算機はミニコン OKITAC システム 50/40 である.

6. おわりに

与えられた点列に対し, これらを通過する非線形スプラインを計算する手法について述べた. 本アルゴリズムは, 補間問題として取り扱うことのできる, いかなる点列についても有効である. しかし, S_i が非常に大きい場合, 換言すれば, データ点相互の位置が急激に変化する場合は, 本アルゴリズムは線形スプラインに近い補間曲線を与える. ところが, この場合は $y' \approx 0$ の仮定が成立せず, 線形スプラインによる補間は意味がないことになる. したがって, このような点列に対しては, 線形スプラインを基準とした方法を適用することは不適當である. しかし, 線形スプライン以外の基準補間曲線は, 現在までのところ得られておらず, このための数学的に厳密な議論の成果が望まれている.

参 考 文 献

1) 秦野: スプライン関数, 情報処理, Vol. 22, No.

- 1, pp. 19-27 (1981).
- 2) Lee, E. H. and Forsythe, G. E.: Variational Study of Nonlinear Spline Curves, *SIAM Rev.*, Vol. 15, No. 1, pp. 120-133 (1973).
- 3) de Boor, C.: *A Practical Guide to Splines*, p. 108, Springer-Verlag, New York (1978).
- 4) Mehlum, E.: Curve and Surface Fitting Based on a Variational Criterion for Smoothness, *Cent. Inst. Ind. Res.*, Oslo, Norway (1969).
- 5) 小杉: 局所的接線算出アルゴリズムを用いた円弧による曲線の創成, 電子通信学会論文誌, Vol. J-60 D, No. 12, pp. 1023-1030 (1977).
- 6) たとえば, 研野: 自動設計法, p. 59, コロナ社, 東京 (1969).
- 7) Malcolm, M. A.: On the Computation of Nonlinear Splines Functions, *SIAM J. Num. Anal.*, Vol. 14, No. 2, pp. 254-282 (1977).
- 8) Rogers, D. F. and Adams, J. A.: *Mathematical Elements for Computer Graphics*, p. 89, McGraw-Hill, New York (1976).
- 9) Fritsch, F. N. and Carlson, R. E.: Diecwise Cubic Interpolation Methods, Lawrence Livermore Laboratory, UCRL-81230 (1978).
- 10) Fritsch, F. N. and Carlson, R. E.: Monotone Piecewise Cubic Interpolation, *SIAM J. Num. Anal.*, Vol. 17, No. 2, pp. 238-246 (1980).
- 11) 小杉, 寺西: 円弧を用いた曲線セグメントの創成, 電子通信学会論文誌, Vol. J-60 D, No. 11, pp. 754-760 (1977).
- 12) 市田, 吉本: スプライン関数とその応用, p. 121, 教育出版, 東京 (1979).

(昭和 57 年 10 月 8 日受付)

(昭和 58 年 4 月 19 日採録)